

РЕГУЛЯРИЗОВАННАЯ АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ С БЫСТРО ИЗМЕНЯЮЩИМИСЯ ЯДРАМИ

А.А. БОБОДЖАНОВ, В.Ф. САФОНОВ

Аннотация. Метод регуляризации Ломова обобщается на уравнения в частных производных с интегральными операторами, ядро которых содержит быстро изменяющийся экспоненциальный множитель. Исследуется случай, когда верхний предел интегрального оператора совпадает с переменной дифференцирования. Для таких задач развивается алгоритм построения регуляризованной асимптотики. В отличие от работ М.И. Иманалиева, где для аналогичных задач с медленно изменяющимися ядрами исследуется только предельный переход при стремлении малого параметра к нулю, здесь строится асимптотическое решение любого порядка (по параметру). Отметим, что метод регуляризации Ломова применялся в основном для обыкновенных сингулярно возмущенных интегродифференциальных уравнений (см. подробную библиографию в конце статьи). В одной из работ авторов был рассмотрен случай уравнения в частных производных с медленно изменяющимися ядрами. Разработка этого метода для уравнений частных производных с быстро изменяющимися ядрами ранее не проводилась. Тип верхнего предела интегрального оператора в таких уравнениях порождает две принципиально разные ситуации. Наиболее трудной является ситуация, когда верхний предел оператора интегрирования не совпадает с переменной дифференцирования. Как показали исследования, в этом случае у интегрального оператора могут возникнуть характеристические значения, и для построения асимптотики потребуются более жесткие условия на исходные данные задачи. Ясно, что эти трудности возникают и при исследовании интегродифференциальной системы с быстро изменяющимся ядром, поэтому в данной работе сознательно избегается случай зависимости верхнего предела интегрального оператора от переменной x . Кроме того, предполагается, что та же закономерность наблюдается и в быстро убывающей экспоненте ядра интегрального оператора. Любые отклонения от этих (казалось бы незначительных) ограничений сильно усложняют задачу с точки зрения построения ее асимптотического решения. Предполагается, что в дальнейшем в наших работах будут продолжены исследования в направлении ослабления этих ограничений.

Ключевые слова: сингулярно возмущенный, интегродифференциальное уравнение, регуляризация интеграла.

Mathematics Subject Classification: 35R09, 45K05

A.A. BOBODZHANOV, V.F. SAFONOV, REGULARIZED ASYMPTOTICS OF SOLUTIONS TO INTEGRO-DIFFERENTIAL PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH RAPIDLY VARYING KERNELS.

©Бободжанов А.А., Сафонов В.Ф. 2018.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Совета по грантам при Президенте РФ (проект НШ-2081.2014.1).

Поступила 19 мая 2017 г.

В настоящей работе рассматривается интегродифференциальная система

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial y(t, x, \varepsilon)}{\partial t} &= A(t) y(t, x, \varepsilon) + \int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \mu(\theta) d\theta} K(t, x, s) y(s, x, \varepsilon) ds + h(t, x), \\ y(0, x, \varepsilon) &= y^0(x) \quad ((t, x) \in [0, T] \times [0, X]), \end{aligned} \quad (1)$$

с быстро изменяющимся ядром. Ставится задача о построении регуляризованного (по С.А. Ломову; см. [1], стр. 35, 137–144) асимптотического решения задачи (1). Ранее рассматривались в основном системы для обыкновенных дифференциальных уравнений с медленно изменяющимися ядрами ($\mu(t) \equiv 0$; см. подробную библиографию в [2–3]). В работе [4] (стр. 53–61) для случая $\mu(t) \equiv 0$ исследовался лишь предельный переход при $\varepsilon \rightarrow +0$ в интегродифференциальной системе в частных производных, а в работе [5] для указанного случая строилась регуляризованная асимптотика любого порядка по ε .

Переходя к разработке алгоритма построения регуляризованных асимптотических решений для системы типа (1) с быстро изменяющимся ядром, отметим, что зависимость матрицы A от переменной x существенно не влияет на развитие этого алгоритма. Возникают лишь вычислительные трудности; основные же идеи разработки алгоритма остаются неизменными. Поэтому с самого начала будем предполагать, что матрица A не зависит от x . Кроме того, не умаляя общности, можно считать, что $T = X = 1$.

§1. Регуляризация задачи (1)

Будем предполагать выполненными следующие условия:

1) матрица $A(t) \in C^\infty([0, 1], \mathbb{C}^{n \times n})$, функция $h(t, x) \in C^\infty([0, 1] \times [0, 1], \mathbb{C}^n)$, функция $\mu(t) \in C^\infty([0, 1], \mathbb{C}^1)$, ядро $K(t, x, s)$ принадлежит пространству $C^\infty(\{0 \leq x \leq 1, 0 \leq s \leq t \leq 1\}, \mathbb{C}^{n \times n})$;

2) спектр $\{\lambda_j(t)\}$ матрицы $A(t)$ и спектральное значение $\mu(t)$ ядра интегрального оператора удовлетворяют требованиям:

а) $\lambda_i(t) \neq \lambda_j(t)$, $i \neq j$, $\mu(t) \neq \lambda_i(t)$, $i, j = \overline{1, n}$ ($\forall t \in [0, 1]$);

б) $\operatorname{Re} \lambda_j(t) \leq 0$, $\lambda_j(t) \neq 0$, $\operatorname{Re} \mu(t) < 0$ $j = \overline{1, n}$ ($\forall t \in [0, 1]$).

Обозначим $\mu(t) \equiv \lambda_{n+1}(t)$ и, следуя [1], введем регуляризирующие переменные

$$\tau_j = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \lambda_j(s) ds = \frac{\psi_j(t)}{\varepsilon}, \quad j = \overline{1, n+1}. \quad (2)$$

Для функции $\tilde{y}(t, x, \tau, \varepsilon)$ поставим следующую задачу:

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial \tilde{y}}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j(t) \frac{\partial \tilde{y}}{\partial \tau_j} - A(t) \tilde{y} - \int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \mu(\theta) d\theta} K(t, x, s) \tilde{y} \left(s, x, \frac{\psi(s)}{\varepsilon}, \varepsilon \right) ds &= h(t, x), \\ \tilde{y}(t, x, \tau, \varepsilon) |_{t=0, \tau=0} &= y^0(x) \quad (\tau = (\tau_1, \dots, \tau_{n+1}), \psi = (\psi_1, \dots, \psi_{n+1})). \end{aligned} \quad (3)$$

Связь задачи (3) с исходной задачей (1) такова: если $\tilde{y} = \tilde{y}(t, x, \tau, \varepsilon)$ — решение задачи (3), то его сужение $y(t, x, \varepsilon) \equiv \tilde{y} \left(t, x, \frac{\psi(t)}{\varepsilon}, \varepsilon \right)$ на регуляризирующих функциях (2) будет, очевидно, точным решением исходной задачи (1). Однако задачу (3) нельзя считать полностью регуляризованной, так как в ней не произведена регуляризация интегрального оператора

$$J\tilde{y} = \int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \lambda_{n+1}(\theta) d\theta} K(t, x, s) \tilde{y} \left(s, x, \frac{\psi(s)}{\varepsilon}, \varepsilon \right) ds.$$

Для его регуляризации, как известно, надо ввести (см. [1], с. 62), пространство M_ε , асимптотически инвариантное относительно оператора J . Делается это так. Вводится класс U решений итерационных задач (см. ниже):

$$\begin{aligned} U = \left\{ \hat{y}(t, x, \tau) : \hat{y} = \sum_{j=1}^{n+1} y_j(t, x) e^{\tau_j} + \right. \\ \left. + y_0(t, x), \quad y_j(t, x) \in C^\infty([0, 1] \times [0, 1]), \quad j = \overline{0, n+1} \right\}, \end{aligned}$$

а затем берется сужение этого класса при $\tau = \psi(t)/\varepsilon$. Это и будет пространство M_ε . Для обоснования этого факта надо показать, что образ $J\hat{y}(t, x, \tau)$ интегрального оператора J на элементе пространства U представим в виде степенного ряда $\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \left(\sum_{j=1}^{n+1} y_j^{(k)}(t, x) e^{\frac{\psi_j(t)}{\varepsilon}} + y_0^{(k)}(t, x) \right)$, сходящегося асимптотически при $\varepsilon \rightarrow +0$ (равномерно по $(t, x) \in [0, 1] \times [0, 1]$). Займемся этим вопросом.

На произвольном элементе $\hat{y}(t, x, \tau)$ пространства U образ интегрального оператора J имеет вид

$$\begin{aligned} J\hat{y}(t, x, \tau) \equiv & \sum_{j=1}^{n+1} \int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \lambda_{n+1}(\theta) d\theta} K(t, x, s) y_j(s, x) e^{\frac{\psi_j(s)}{\varepsilon}} ds + \\ & + \int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \lambda_{n+1}(\theta) d\theta} K(t, x, s) y_0(s, x) ds. \end{aligned} \quad (4)$$

К каждому слагаемому этой суммы применим операцию интегрирования по частям. При $j = \overline{1, n}$ будем иметь

$$\begin{aligned} & \int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \lambda_{n+1}(\theta) d\theta} K(t, x, s) y_j(s, x) e^{\frac{\psi_j(s)}{\varepsilon}} ds = \\ & = e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \lambda_{n+1}(\theta) d\theta} \int_0^t K(t, x, s) y_j(s, x) e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_0^s (\lambda_j(\theta) - \lambda_{n+1}(\theta)) d\theta} ds = \\ & = \varepsilon e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \lambda_{n+1}(\theta) d\theta} \int_0^t \frac{K(t, x, s) y_j(s, x)}{\lambda_j(s) - \lambda_{n+1}(s)} d \left(e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_0^s (\lambda_j(\theta) - \lambda_{n+1}(\theta)) d\theta} \right) = \\ & = \varepsilon e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \lambda_{n+1}(\theta) d\theta} \left(\frac{K(t, x, s) y_j(s, x)}{\lambda_j(s) - \lambda_{n+1}(s)} e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_0^s (\lambda_j(\theta) - \lambda_{n+1}(\theta)) d\theta} \Big|_0^t - \right. \\ & \left. - \int_0^t \left(\frac{\partial}{\partial s} \frac{K(t, x, s) y_j(s, x)}{\lambda_j(s) - \lambda_{n+1}(s)} \right) e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_0^s (\lambda_j(\theta) - \lambda_{n+1}(\theta)) d\theta} ds \right) = \\ & = \varepsilon \left[\frac{K(t, x, t) y_j(t, x)}{\lambda_j(t) - \lambda_{n+1}(t)} e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \lambda_j(\theta) d\theta} - \frac{K(t, x, 0) y_j(0, x)}{\lambda_j(0) - \lambda_{n+1}(0)} e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \lambda_{n+1}(\theta) d\theta} \right] - \\ & - \varepsilon e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \lambda_{n+1}(\theta) d\theta} \int_0^t \left(\frac{\partial}{\partial s} \frac{K(t, x, s) y_j(s, x)}{\lambda_j(s) - \lambda_{n+1}(s)} \right) e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_0^s (\lambda_j(\theta) - \lambda_{n+1}(\theta)) d\theta} ds. \end{aligned}$$

Введем обозначение $I_j^0(K(t, x, s) y_j(s, x)) \equiv \frac{K(t, x, s) y_j(s, x)}{\lambda_j(s) - \lambda_{n+1}(s)}$, $j = \overline{1, n}$. Тогда предыдущий результат преобразований можно записать в виде

$$\begin{aligned} & \int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \lambda_{n+1}(\theta) d\theta} K(t, x, s) y_j(s, x) e^{\frac{\psi_j(s)}{\varepsilon}} ds = \\ & = \varepsilon \left[I_j^0(K(t, x, s) y_j(s, x))_{s=t} e^{\tau_j} - I_j^0(K(t, x, s) y_j(s, x))_{s=0} e^{\tau_{n+1}} \right] - \\ & - \varepsilon e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \lambda_{n+1}(\theta) d\theta} \int_0^t \frac{\partial}{\partial s} (I_j^0(K(t, x, s) y_j(s, x))) e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_0^s (\lambda_j(\theta) - \lambda_{n+1}(\theta)) d\theta} ds, \quad j = \overline{1, n}, \end{aligned}$$

где $\tau_j = \frac{\psi_j(t)}{\varepsilon}$, $j = \overline{1, n}$. Продолжая это процесс далее, получим ряд

$$\begin{aligned} & \int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \lambda_{n+1}(\theta) d\theta} K(t, x, s) y_j(s, x) e^{\frac{\psi_j(s)}{\varepsilon}} ds = \\ & = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \varepsilon^{k+1} \left[\left(I_j^k(K(t, x, s) y_1(s, x)) \right)_{s=t} \cdot e^{\tau_j} - \right. \\ & \left. - \left(I_1^k(K(t, x, s) y_1(s, x)) \right)_{s=0} e^{\tau_{n+1}} \right], \end{aligned} \quad (5)$$

где $\tau_j = \frac{\psi_j(t)}{\varepsilon}$, $j = \overline{1, n}$, а операторы I_j^k имеют вид:

$$\begin{aligned} I_j^0(K(t, x, s) y_j(s, x)) & \equiv \frac{K(t, x, s) y_j(s, x)}{\lambda_j(s) - \lambda_{n+1}(s)}, \\ I_j^1(K(t, x, s) y_j(s, x)) & = \frac{1}{\lambda_j(s) - \lambda_{n+1}(s)} \frac{\partial}{\partial s} I_1^0(K(t, x, s) y_j(s, x)), \dots, \\ I_1^m(K(t, x, s) y_j(s, x)) & = \frac{1}{\lambda_j(s) - \lambda_{n+1}(s)} I_1^{m-1}(K(t, x, s) y_j(s, x)), \quad m \geq 1, \quad j = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (6)$$

Слагаемое в (4) при $j = n + 1$ преобразуем следующим образом:

$$\begin{aligned}
& \int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \lambda_{n+1}(\theta) d\theta} K(t, x, s) y_{n+1}(s, x) e^{\frac{\psi_{n+1}(s)}{\varepsilon}} ds \equiv \\
& \equiv \int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \lambda_{n+1}(\theta) d\theta} K(t, x, s) y_{n+1}(s, x) e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_0^s \lambda_{n+1}(\theta) d\theta} d\theta ds = \\
& = e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \lambda_{n+1}(\theta) d\theta} \int_0^t K(t, x, s) y_{n+1}(s, x) ds \equiv \\
& \equiv \left(\int_0^t K(t, x, s) y_{n+1}(s, x) ds \right) e^{\tau_{n+1}}, \quad \tau_{n+1} = \frac{\psi_{n+1}(t)}{\varepsilon}.
\end{aligned} \tag{7}$$

И, наконец, для последнего слагаемого в (4) будем иметь

$$\begin{aligned}
& \int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \lambda_{n+1}(\theta) d\theta} K(t, x, s) y_0(s, x) ds = \varepsilon \int_0^t \frac{K(t, x, s) y_0(s, x)}{-\lambda_{n+1}(s)} ds e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \lambda_{n+1}(\theta) d\theta} = \\
& = \varepsilon \frac{K(t, x, s) y_0(s, x)}{-\lambda_{n+1}(s)} e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \lambda_{n+1}(\theta) d\theta} \Big|_{s=0} - \varepsilon \int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \lambda_{n+1}(\theta) d\theta} \left(\frac{\partial}{\partial s} \frac{K(t, x, s) y_0(s, x)}{-\lambda_{n+1}(s)} \right) ds = \\
& = \varepsilon \left[\frac{K(t, x, t) y_0(t, x)}{-\lambda_{n+1}(t)} - \frac{K(t, x, 0) y_0(0, x)}{-\lambda_{n+1}(0)} e^{\tau_{n+1}} \right] + \varepsilon \int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \lambda_{n+1}(\theta) d\theta} \left(\frac{\partial}{\partial s} \frac{K(t, x, s) y_0(s, x)}{\lambda_{n+1}(s)} \right) ds = \\
& = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k+1} \left[(I_{n+1}^k (K(t, x, s) y_0(s, x)))_{s=0} \right] e^{\tau_{n+1}} - I_{n+1}^k (K(t, x, s) y_0(s, x))_{s=t},
\end{aligned} \tag{8}$$

где введены операторы

$$\begin{aligned}
I_{n+1}^0 (K(t, x, s) y_0(s, x)) &= \frac{K(t, x, s) y_0(s, x)}{\lambda_{n+1}(s)}, \\
I_{n+1}^m (K(t, x, s) y_0(s, x)) &= \frac{1}{\lambda_{n+1}(s)} \frac{\partial}{\partial s} I_{n+1}^{m-1} (K(t, x, s) y_0(s, x)), \quad m \geq 1.
\end{aligned} \tag{9}$$

Асимптотическая сходимость рядов (5) и (8) доказывается так же, как и аналогичное утверждение в [2] (гл.8). Пусть теперь $\tilde{y}(t, x, \tau, \varepsilon)$ — произвольная функция, непрерывная по $(t, x, \tau) \in [0, 1] \times [0, 1] \times \times \{Re \tau_j \leq 0, j = \overline{1, n+1}\}$ и имеющая асимптотическое разложение

$$\tilde{y}(t, x, \tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k y_k(t, x, \tau), \quad y_k(t, x, \tau) \in U, \tag{10}$$

сходящееся при $\varepsilon \rightarrow +0$ (равномерно по $(t, x, \tau) \in [0, 1] \times [0, 1] \times \{Re \tau_j \leq 0, j = \overline{1, n+1}\}$). Введём операторы $R_m : U \rightarrow U$, действующие на каждый элемент $\hat{y}(t, x, \tau)$ пространства U по закону:

$$\begin{aligned}
R_0 \hat{y}(t, x, \tau) &\equiv R_0 \left(\sum_{j=1}^{n+1} y_j(t, x) e^{\tau_j} + y_0(t, x) \right) = \\
&= e^{\tau_{n+1}} \int_0^t K(t, x, s) y_{n+1}(s, x) ds, \\
R_{k+1} \hat{y}(t, x, \tau) &= (-1)^k \left[\sum_{j=1}^n (I_j^k (K(t, x, s) y_j(s, x)))_{s=t} \cdot e^{\tau_j} - \right. \\
&- (I_j^k (K(t, x, s) y_j(s, x)))_{s=0} e^{\tau_{n+1}} \left. + \right. \\
&+ (I_{n+1}^k (K(t, x, s) y_0(s, x)))_{s=0} e^{\tau_{n+1}} - (I_{n+1}^k (K(t, x, s) y_0(s, x)))_{s=t},
\end{aligned} \tag{11}$$

где операторы I_j^k имеют вид (6), а операторы I_{n+1}^k — вид (9), $k \geq 0$. Операторы R_m называются *операторами порядка* (по ε), так как при применении их к функции $\hat{y}(t, x, \tau)$ они выделяют члены порядка ε^m . Расширенный оператор для интегрального оператора J естественно определить следующим образом.

Определение 1. *Формальным расширением оператора J называется оператор \tilde{J} , действующий на каждую функцию $\tilde{y}(t, x, \tau, \varepsilon)$ вида (10) по закону¹*

$$\tilde{J} \tilde{y} \equiv \tilde{J} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k y_k(t, x, \tau) \right) \triangleq \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \left(\sum_{k=0}^r R_{r-k} y_k(t, x, \tau) \right). \tag{12}$$

¹Значок \triangleq означает “равно по определению”.

Теперь можно записать задачу, полностью регуляризованную (по отношению к исходной (1)):

$$\mathcal{L}_\varepsilon \tilde{y}(t, x, \tau, \varepsilon) \equiv \varepsilon \frac{\partial \tilde{y}}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j(t) \frac{\partial \tilde{y}}{\partial \tau_j} - A(t) \tilde{y} - \tilde{J} \tilde{y} = h(t, x), \quad \tilde{y}(0, x, 0, \varepsilon) = y^0(x), \quad (13)$$

где $\tilde{y}(t, x, \tau, \varepsilon)$ — ряд (10).

§2. Разрешимость итерационных задач

Подставляя ряд (10) в (13) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим следующие итерационные задачи:

$$\mathcal{L} y_0(t, x, \tau) \equiv \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j(t) \frac{\partial y_0}{\partial \tau_j} - A(t) y_0 - R_0 y_0 = h(t, x), \quad y_0(0, x, 0) = y^0(x); \quad (14_0)$$

$$\mathcal{L} y_1(t, x, \tau) = -\frac{\partial y_0}{\partial t} + R_1 y_0, \quad y_1(0, x, 0) = 0; \quad (14_1)$$

.....

$$\mathcal{L} y_k(t, x, \tau) = -\frac{\partial y_{k-1}}{\partial t} + R_1 y_{k-1} + \dots + R_k y_0, \quad y_k(0, x, 0) = 0, \quad k \geq 1. \quad (14_k)$$

Каждая из итерационных задач (14_k) имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \hat{y}(t, x, \tau) &\equiv \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j(t) \frac{\partial \hat{y}}{\partial \tau_j} + \mu(t) \frac{\partial \hat{y}}{\partial \tau_2} - A(t) \hat{y} - R_0 \hat{y} = H(t, x, \tau), \\ \hat{y}(0, x, 0) &= y_*(x), \end{aligned} \quad (15)$$

где $H(t, x, \tau) = \sum_{j=1}^{n+1} H_j(t, x) e^{\tau_j} + H_0(t, x) \in U$, $y_*(x) \in C^\infty[0, 1]$ — известные функции, а $R_0 y$ — оператор

$$R_0 \hat{y}(x, t, \tau) \equiv R_0 \left(\sum_{j=1}^{n+1} y_j(t, x) e^{\tau_j} + y_0(t, x) \right) = e^{\tau_{n+1}} \int_0^t K(t, x, s) y_{n+1}(s, x) ds.$$

Попробуем решить задачу (15). Подставляя элемент $\hat{y}(t, x, \tau) = \sum_{j=1}^{n+1} y_j(t, x) e^{\tau_j} + y_0(t, x)$ пространства U в (15), будем иметь

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j(t) y_j(t, x) e^{\tau_j} - \sum_{j=1}^{n+1} A(t) y_j(t, x) e^{\tau_j} - \\ - A(t) y_0(t, x) - e^{\tau_{n+1}} \int_0^t K(t, x, s) y_{n+1}(s, x) ds = \sum_{j=1}^{n+1} H_j(t, x) e^{\tau_j} + H_0(t, x). \end{aligned}$$

Приравнивая здесь отдельно свободные члены и коэффициенты при одинаковых экспонентах, получим уравнения

$$\begin{aligned} -A(t) y_0(t, x) &= H_0(t, x), \\ (\lambda_j(t) I - A(t)) y_j(t, x) &= H_j(t, x), \quad j = \overline{1, n}, \\ (\lambda_{n+1}(t) I - A(t)) y_{n+1}(t, x) - \int_0^t K(t, x, s) y_{n+1}(s, x) ds &= H_{n+1}(t, x). \end{aligned} \quad (16)$$

Обозначим через $\varphi_j(t)$ — $\lambda_j(t)$ -собственный вектор матрицы $A(t)$, а через $\chi_j(t)$ — $\bar{\lambda}_j(t)$ -собственный вектор матрицы $A^*(t)$, причем системы векторов $\{\varphi_j(t)\}$ и $\{\chi_k(t)\}$ возьмем биортонормированными:

$$A(t) \varphi_j(t) \equiv \lambda_j(t) \varphi_j(t), \quad A^*(t) \chi_k(t) \equiv \bar{\lambda}_k(t) \chi_k(t), \quad (\varphi_j(t), \chi_k(t)) = \delta_{jk},$$

где δ_{jk} — символ Кронекера $j, k = \overline{1, n}$. Перейдем теперь к системам (16). Первое уравнение (16) имеет единственное решение $y_0(t, x) = -A^{-1}(t) H_0(t, x)$. Для разрешимости второй

системы (16) при фиксированном $j \in \{1, \dots, n\}$ в пространстве $C^\infty([0, 1] \times [0, 1], \mathbb{C}^n)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$(H_j(t, x), \chi_j(t)) \equiv 0 \quad (\forall (t, x) \in [0, 1] \times [0, 1]).$$

Последнее уравнение (16) является уравнением Вольтерра второго рода с гладким ядром $G(t, x, s) = (\lambda_{n+1}(t) - A(t))^{-1} K(t, x, s)$ (в нем переменная x играет роль параметра), поэтому оно имеет единственное решение в пространстве $C^\infty([0, 1] \times [0, 1])$. Если ввести в пространстве U скалярное (при каждом $(t, x) \in [0, 1] \times [0, 1]$) произведение

$$\begin{aligned} &< \hat{y}(t, x, \tau), z(t, x, \tau) > \equiv \\ &\equiv < \sum_{j=1}^{n+1} y_j(t, x) e^{\tau_j} + y_0(t, x), \sum_{j=1}^{n+1} z_j(t, x) e^{\tau_j} + z_0(t, x) > \triangleq \\ &\triangleq \sum_{j=0}^{n+1} (y_j(t, x), z_j(t, x)), \end{aligned}$$

где через $(,)$ обозначено обычное скалярное произведение в комплексном пространстве \mathbb{C}^n , то предыдущие рассуждения можно подытожить в виде следующего утверждения.

Теорема 1. Пусть в уравнении (15) правая часть

$$H(t, x, \tau) \equiv \sum_{j=1}^{n+1} H_j(t, x) e^{\tau_j} + H_0(t, x) \in U$$

и выполнены условия 1) и 2). Тогда для разрешимости уравнения (15) в пространстве U необходимо и достаточно, чтобы

$$< H(t, x, \tau), \chi_j(t) e^{\tau_j} > \equiv 0 \quad j = \overline{1, n} \quad (\forall (t, x) \in [0, 1] \times [0, 1]). \quad (17)$$

При ограничении (17) уравнение (15) имеет следующее решение в пространстве U :

$$\begin{aligned} \hat{y}(t, x, \tau) &= \sum_{j=1}^n \alpha_j(t, x) \varphi_j(t) e^{\tau_j} + \\ &+ \left(\int_0^t R(t, x, s) (\lambda_{n+1}(s) I - A(s))^{-1} H_{n+1}(s, x) ds + \right. \\ &\left. + (\lambda_{n+1}(t) I - A(t))^{-1} H_{n+1}(t, x) \right) e^{\tau_{n+1}} - \\ &- A^{-1}(t) H_0(t, x), \end{aligned} \quad (18)$$

где $\mathcal{R}(t, x, s)$ — резольвента ядра $G(t, x, s) = (\lambda_{n+1}(t) - A(t))^{-1} K(t, x, s)$ $\alpha_j(t, x) \in C^\infty([0, 1] \times [0, 1], \mathbb{C}^1)$ — произвольные функции, $j = \overline{1, n}$.

Подчиним решение (18) начальному условию $y(0, x, 0) = y_*(x)$. Будем иметь

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \alpha_j(0, x) \varphi_j(0) - A^{-1}(0) H_0(0, x) &= y_*(x) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \alpha_j(0, x) &= (y_*(x) + A^{-1}(0) H_0(0, x), \chi_j(0)), \quad j = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (19)$$

Однако функции $\alpha_j(t, x)$ не найдены полностью. Необходимо дополнительное требование на решение задачи (15). Такое требование диктуют итерационные задачи (14_k), из которых видно, что естественным дополнительным ограничением является условие

$$< -\frac{\partial \hat{y}}{\partial t} + R_1 \hat{y} + P(t, x, \tau), \chi_j(t) e^{\tau_j} > \equiv 0 \quad j = \overline{1, n} \quad (\forall (t, x) \in [0, 1] \times [0, 1]), \quad (20)$$

где $P(t, x, \tau) \equiv \sum_{j=1}^{n+1} P_j(t, x) e^{\tau_j} + P_0(t, x) \in U$ — известная вектор-функция. Покажем, что при выполнении требования (20) задача (15) имеет единственное решение в пространстве U .

Теорема 2. Пусть выполнены условия 1)-2) и правая часть $H(t, x, \tau) \equiv \sum_{j=1}^{n+1} H_j(t, x) e^{\tau_j} + H_0(t, x) \in U$ удовлетворяет условию ортогональности (17). Тогда задача (15) при дополнительном условии (20) однозначно разрешима в пространстве U .

Доказательство. Чтобы воспользоваться условием (20), вычислим выражение $-\frac{\partial \hat{y}}{\partial t} + R_1 \hat{y}$. Так как

$$\begin{aligned} R_1 \hat{y}(x, t, \tau) = & - \left[\sum_{j=1}^n (I_j^0 (K(t, x, s) y_j(s, x)))_{s=t} \cdot e^{\tau_j} - \right. \\ & \left. - (I_1^0 (K(t, x, s) y_j(s, x)))_{s=0} e^{\tau_{n+1}} \right] - \\ & - \left[(I_{n+1}^0 (K(t, x, s) y_0(s, x)))_{s=t} - I_{n+1}^0 (K(t, x, s) y_0(s, x))_{s=0} \right] e^{\tau_{n+1}}, \\ y_j(s, x) = & \alpha_j(s, x) \varphi_j(s), \quad y_0(s, x) = -A^{-1}(s) H_0(s, x), \end{aligned}$$

$$I_j^0 (K(t, x, s) y_j(s, x)) \equiv \frac{K(t, x, s) y_j(s, x)}{\lambda_j(s) - \lambda_{n+1}(s)},$$

то

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \hat{y}}{\partial t} + R_1 \hat{y} + P(t, x, \tau) = & \\ = & - \sum_{j=1}^n \frac{\partial(\alpha_j(t, x) \varphi_j(t))}{\partial t} e^{\tau_j} - \\ & - \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_0^t R(t, x, s) (\lambda_{n+1}(s) I - A(s))^{-1} H_{n+1}(s, x) ds + \right. \\ & \left. + (\lambda_{n+1}(t) I - A(t))^{-1} H_{n+1}(t, x) \right] e^{\tau_{n+1}} + \frac{\partial}{\partial t} A^{-1}(t) H_0(t, x) - \\ & - \sum_{j=1}^n \left[(I_j^0 (K(t, x, s) \alpha_j(s, x) \varphi_j(s)))_{s=t} \cdot e^{\tau_j} - \right. \\ & \left. - (I_j^0 (K(t, x, s) \alpha_j(s, x) \varphi_j(s)))_{s=0} e^{\tau_{n+1}} \right] + \\ & - \left[(I_{n+1}^0 (K(t, x, s) y_0(s, x)))_{s=t} - I_{n+1}^0 (K(t, x, s) y_0(s, x))_{s=0} \right] e^{\tau_{n+1}} + \\ & + \sum_{j=1}^{n+1} P_j(t, x) e^{\tau_j} + P_0(t, x), \end{aligned}$$

поэтому условие (20) принимает вид

$$\begin{aligned} -\frac{\partial(\alpha_j(t, x))}{\partial t} + \left(\frac{K(t, x, t) \varphi_j(t)}{\lambda_j(t) - \lambda_{n+1}(t)} - \dot{\varphi}_j(t), \chi_j(t) \right) \alpha_j(t, x) + \\ + (P_j(t, x), \chi_j(t)) \equiv 0, \quad j = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

С учётом начального условия (19) это уравнение имеет единственное решение

$$\alpha_j(t, x) = e^{q_j(t, x)} \left[\alpha_j(0, x) + \int_0^t (P_j(s, x), \chi_j(s)) e^{-q(s, x)} ds \right], \quad (21)$$

где $q_j(t, x) = \int_0^t \left(\frac{K(s, x, s) \varphi_j(s)}{\lambda_j(s) - \lambda_{n+1}(s)} - \dot{\varphi}_j(s), \chi_j(s) \right) ds$, $j = \overline{1, n}$. Значит решение (14) в пространстве U в условиях нашей теоремы находится однозначно. Теорема доказана.

Применяя теоремы 1 и 2 к итерационным задачам (14_k), построим ряд (10) с коэффициентами из класса U . Пусть $y_{\varepsilon N}(t, x) = \sum_{k=0}^N \varepsilon^k y_k \left(t, x, \frac{\psi(t)}{\varepsilon} \right)$ – сужение N -й частичной суммы этого ряда при $\tau = \frac{\psi(t)}{\varepsilon}$. Так же, как и в [2] (глава 8), нетрудно доказать следующий результат.

Теорема 3. Пусть выполнены условия 1)–2). Тогда при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, где $\varepsilon_0 > 0$ – достаточно мало, задача (1) имеет единственное решение $y(t, x, \varepsilon) \in C^1([0, 1] \times [0, 1])$ и имеет место оценка

$$\|y(t, x, \varepsilon) - y_{\varepsilon N}(t, x)\|_{C([0,1] \times [0,1])} \leq C_N \varepsilon^{N+1} \quad (N = 0, 1, 2, \dots),$$

где постоянная $C_N > 0$ не зависит от $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

§3. Решение первой итерационной задачи. Исследование проблемы инициализации

Поскольку в системе (14₀) вектор-функция $H(t, x, \tau) \equiv h(t, x)$ не зависит от τ , то условия (17) для нее выполнены автоматически, поэтому система (14₀) имеет в пространстве U решение, которое можно записать в форме (см. (18))

$$y_0(t, x, \tau) = \sum_{j=1}^n \alpha_j^{(0)}(t, x) \varphi_j(t) e^{\tau_j} - A^{-1}(t) h(t, x), \quad (22)$$

где¹ $\alpha_j^{(0)}(t, x) \in C^\infty([0, 1] \times [0, 1], \mathbb{C}^1)$ — пока произвольные функции. Для вычисления этих функций найдем сначала ее значение в точке $t = 0$. Так как $y_0(0, x, 0) = y^0(x)$, то

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \alpha_j^{(0)}(0, x) \varphi_j(0) - A^{-1}(0) h(0, x) &= y^0(x) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \alpha_j^{(0)}(0, x) &= (A^{-1}(0) h(0, x) + y^0(x), \chi_j(0)), \quad j = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (23)$$

Для полного вычисления функций $\alpha_j^{(0)}(t, x)$ надо перейти к следующей задаче (14₁) и подчинить ее правую часть условию ортогональности (17). В результате получим уравнения

$$-\frac{\partial \left(\alpha_j^{(0)}(t, x) \right)}{\partial t} + \left(\frac{K(t, x, t) \varphi_j(t)}{\lambda_j(t) - \lambda_{n+1}(t)} - \dot{\varphi}_j(t), \chi_j(t) \right) \alpha_j^{(0)}(t, x) \equiv 0, \quad j = \overline{1, n},$$

и с учетом равенства (23) найдем, что

$$\alpha_j^{(0)}(t, x) = e^{q_j(t, x)} (A^{-1}(0) h(0, x) + y^0(x), \chi_j(0)), \quad j = \overline{1, n}, \quad (24)$$

где $q_j(t, x) \equiv \int_0^t \left(\frac{K(s, x, s) \varphi_j(s)}{\lambda_j(s) - \lambda_{n+1}(s)} - \dot{\varphi}_j(s), \chi_j(s) \right) ds$, $j = \overline{1, n}$. Тем самым, однозначно найдем решение (22) первой итерационной задачи (14₀).

Перейдем теперь к рассмотрению проблемы инициализации. Пусть $Re \lambda_j(t) < 0 \forall t \in [0, 1]$, $j = \overline{1, n}$. Тогда по теореме 3 имеем

$$\begin{aligned} \|y(t, x, \varepsilon) - y_{\varepsilon 0}(t, x)\|_{C([0, 1] \times [0, 1])} &\leq c_0 \varepsilon \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \|y(t, \varepsilon) - \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j^{(0)}(t, x) \varphi_j(t) e^{\tau_j} - A^{-1}(t) h(t, x) \right)\|_{C([0, 1] \times [0, 1])} &\leq c_0 \varepsilon. \end{aligned}$$

Отсюда при любом $\delta \in (0, 1]$ получаем, что

$$\begin{aligned} c_0 \varepsilon &\geq \|y(t, x, \varepsilon) - \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j^{(0)}(t, x) \varphi_j(t) e^{\frac{\psi_j(t)}{\varepsilon}} - A^{-1}(t) h(t, x) \right)\|_{C([\delta, 1] \times [0, 1])} \geq \\ &\geq \|y(t, x, \varepsilon) - \sum_{j=1}^n \alpha_j^{(0)}(t, x) \varphi_j(t) e^{\frac{\psi_j(t)}{\varepsilon}} + A^{-1}(t) h(t, x)\|_{C([\delta, 1] \times [0, 1])} \geq \\ &\geq \|y(t, x, \varepsilon) + A^{-1}(t) h(t, x)\|_{C([\delta, 1] \times [0, 1])} - \\ &- \left\| \sum_{j=1}^n \alpha_j^{(0)}(t, x) \varphi_j(t) e^{\frac{\psi_j(t)}{\varepsilon}} \right\|_{C([\delta, 1] \times [0, 1])}, \end{aligned}$$

откуда выводим, что

$$\begin{aligned} \|y(t, x, \varepsilon) + A^{-1}(t) h(t, x)\|_{C([\delta, 1] \times [0, 1])} &\leq c_0 \varepsilon + \\ + \left\| \sum_{j=1}^n \alpha_j^{(0)}(t, x) \varphi_j(t) e^{\frac{\psi_j(t)}{\varepsilon}} \right\|_{C([\delta, 1] \times [0, 1])} &\leq \\ \leq c_0 \varepsilon + \left\| \sum_{j=1}^n \alpha_j^{(0)}(t, x) \varphi_j(t) \right\|_{C([\delta, 1] \times [0, 1])} &e^{-\frac{\varkappa \delta}{\varepsilon}}, \end{aligned}$$

где $\varkappa = \min_{i=\overline{1, n}, t \in [0, 1]} (-Re \lambda_i(t)) > 0$. Следовательно,

$$\|y(t, x, \varepsilon) + A^{-1}(t) h(t, x)\|_{C([\delta, 1] \times [0, 1])} \rightarrow 0 \quad (\varepsilon \rightarrow +0). \quad (25)$$

Получен следующий результат.

¹ В выражениях типа $y_j^{(k)}$ верхний индекс (k) означает номер итерации; не путать с k -й производной.

Теорема 4. Если выполнены условия 1) и 2), причем $\operatorname{Re} \lambda_j(t) < 0 \forall t \in [0, 1], j = \overline{1, n}$, то имеет место предельный переход (25), где $y = y(t, x, \varepsilon)$ — точное решение задачи (1), а функция $\bar{y}(t, x) = -A^{-1}(t)h(t, x)$ является решением вырожденного (по отношению к (1)) уравнения $A(t)\bar{y}(t, x) + h(t, x) = 0$.

Однако в нашем случае допускаются чисто мнимые собственные значения $\lambda_j(t)$. Пусть, например,

$$\lambda_j(t) = \pm i\omega_j(t), \omega_j(t) > 0 \quad (j = \overline{1, m}), \operatorname{Re} \lambda_k(t) < 0 \quad (\forall t \in [0, 1], k = \overline{2m+1, n}). \quad (26)$$

В этом случае предельный переход (25) в метрике пространства $C([0, 1] \times [0, 1])$ становится невозможным. В связи с этим возникает следующая *проблема инициализации*: какими должны быть исходные данные задачи (1), чтобы равномерный предельный переход $y(t, x, \varepsilon) \rightarrow \bar{y}(t, x)$ (при $\varepsilon \rightarrow +0$) был возможен на множестве $[0, 1] \times [0, 1]$, включая и зону пограничного слоя по t ? Исходные данные задачи (1), удовлетворяющие этому требованию, называют классом инициализации Σ . Так как

$$y(t, x, \varepsilon) = \sum_{j=1}^m \alpha_j^{(0)}(t, x) \varphi_j(t) e^{\frac{-i}{\varepsilon} \int_0^t \omega_j(\theta) d\theta} + \sum_{j=1}^m \beta_j^{(0)}(t, x) \varphi_{m+j}(t) e^{\frac{+i}{\varepsilon} \int_0^t \omega_j(\theta) d\theta} + \sum_{k=2m+1}^n \alpha_k^{(0)}(t, x) \varphi_k(t) e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \lambda_k(\theta) d\theta} - A^{-1}(t)h(t, x) + O(\varepsilon),$$

то первые $2m$ слагаемых быстро осциллируют и препятствуют существованию предельного перехода $y(t, x, \varepsilon) \rightarrow y_0^{(0)}(t, x)$ на множестве $[0, 1] \times [0, 1]$, поэтому их надо удалить, т.е. положить

$$\alpha_j^{(0)}(t, x) \equiv 0, \beta_j^{(0)}(t, x) \equiv 0 \quad (\forall (t, x) \in [0, 1] \times [0, 1], j = \overline{1, m}).$$

Из формулы (25) следует, что это имеет место тогда и только тогда, когда

$$(y^0(x) + A^{-1}(0)h(0, x), \chi_j(0)) = 0, \quad j = \overline{1, 2m}, \quad \forall x \in [0, 1]. \quad (*)$$

Доказан следующий результат.

Теорема 5. Пусть для задачи (1) выполнены условия 1), 2) и (26). Тогда для того чтобы имел место предельный переход

$$\|y(t, x, \varepsilon) + A^{-1}(t)h(t, x)\|_{C([0,1] \times [0,1])} \rightarrow 0 (\varepsilon \rightarrow +0),$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (*).

Однако условие (*) не описывает класс инициализации, так как экспоненты $\exp\left\{\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \lambda_k(\theta) d\theta\right\}$ ($k = \overline{2m+1, n}$) не стремятся равномерно к нулю в окрестности точки $t = 0$, поэтому в описании класса Σ их тоже нужно убрать. В итоге получим следующий результат.

Теорема 6. Пусть для задачи (1) выполнены условия 1), 2) и (26). Тогда для того чтобы имел место предельный переход

$$\|y(t, x, \varepsilon) + A^{-1}(t)h(t, x)\|_{C([0,1] \times [0,1])} \rightarrow 0 (\varepsilon \rightarrow +0),$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$(y^0(x) + A^{-1}(0)h(0, x), \chi_j(0)) = 0, \quad j = \overline{1, n},$$

значит класс инициализации не зависит от ядра и описывается следующим образом:

$$\Sigma = \{(y^0, h, K, A) : (y^0(x) + A^{-1}(0)h(0, x), \chi_j(0)) = 0, \quad j = \overline{1, n}, \}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ломов С.А. *Введение в общую теорию сингулярных возмущений*. М.: Наука, 1981. 400 с.
2. Сафонов В.Ф., Бободжанов А.А. *Курс высшей математики. Сингулярно возмущенные уравнения и метод регуляризации: учебное пособие*. М.: Издательский дом МЭИ, 2012. 414 с.
3. Ломов С.А., Ломов И.С. *Основы математической теории пограничного слоя*. М.: Издательство Московского университета, 2011. 456 с.
4. Иманалиев М.И. *Методы решения обратных задач и их приложение*. Фрунзе: ИЛИМ, 1977. 348 с.
5. Бободжанов А.А., Сафонов В.Ф. *Регуляризованные асимптотические решения начальной задачи для системы интегродифференциальных уравнений в частных производных // Математ. заметки*. 2017. Т. 102, вып. 1. С. 28–38.

Абдухафиз Абдурасулович Бободжанов,
Национальный исследовательский университет
«Московский энергетический институт»,
ул. Красноказарменная, 14,
111250, г. Москва, Россия
E-mail: bobojanova@mpei.ru

Валерий Федорович Сафонов,
Национальный исследовательский университет
«Московский энергетический институт»,
ул. Красноказарменная, 14,
111250, г. Москва, Россия
E-mail: SafonovVF@mpei.ru