ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 10. № 2 (2018). С. 13-29.

УДК 517.958, 517.984, 519.21

О ЛАКУНАХ В СПЕКТРЕ ЛАПЛАСИАНА В ПОЛОСЕ, ВОЗМУЩЕННОГО ОГРАНИЧЕННЫМ ПЕРИОДИЧЕСКИМ ОПЕРАТОРОМ

Д.И. БОРИСОВ

Аннотация. В работе рассматривается Лапласиан с краевым условием Дирихле в бесконечной плоской полосе, возмущённый ограниченным периодическим оператором. Возмущение вводится как произвольный ограниченный симметрический оператор в L_2 на ячейке периодичности, который затем периодически распространяется на всю полосу.

Изучается зонный спектр такого оператора. Основной полученный результат – отсутствие спектральных лакун в нижней части спектра при достаточно малом периоде потенциала. Верхняя оценка на период, гарантирующая данный результат, выписана явно в числовом виде. Она также включает в себя определенную характеристику возмущающего оператора, которую можно нестрого охарактеризовать как "максимальную осцилляцию возмущения". Также явно выписана длина части спектра, в которой гарантировано отсутствие лакун. Подобный результат можно трактовать как частичное доказательство усиленной гипотезы Бете-Зоммерфельда об полном отсутствии внутренних лакун в зонном спектре периодических операторов для достаточно малых периодов.

Mathematics Subject Classification: 35P05; 35B10

1. Введение

Одна из классических гипотез в теории периодических дифференциальных операторов – это гипотеза Бете-Зоммерфельда. Она предполагает, что по крайней мере у широкого класса многомерных периодических операторов в спектре может быть лишь конечное число лакун. Эта гипотеза была доказана для серии операторов в многомерных пространствах. Для оператора Шрёдингера с периодическим потенциалом данная гипотеза в различных размерностях и различных предположениях на потенциал была доказана в работах [1]–[6]. Для магнитного оператора Шредингера эта гипотеза была установлена в статьях [7], [8]. В работах [9]–[11] рассматривался полигармонический оператор с различными возмущениями, самое общее из которых – это псевдодифференциальный оператор меньшего порядка. При определённых условиях на возмущение была доказана гипотеза Бете-Зоммерфельда. Отметим ещё, что цитированный список работ по гипотезе Бете-Зоммерфельда не претендует на полноту; дальнейшие работы можно найти в списках литературы процитированных статей.

Гипотезу Бете-Зоммерфельда можно интерпретировать как отсутствие лакун в верхней части спектра рассматриваемого оператора. Другими словами, правее (выше) некоторой точки спектр представляет собой полуось и потому не содержит спектральных лакун. Независимый интерес представляет вопрос об отсутствии лакун в нижней части спектра. Подобный результат содержится в главе 15 книги [6]. Здесь рассматривался оператор

D.I. Borisov, On spectral gaps of a Laplacian in a strip with a bounded periodic perturbation.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-01-00046.
Поступила 25 января 2018 г.

Лапласа в многомерном пространстве размерности три и больше. Данный оператор возмущался ограниченным самосопряжённым оператором, периодическим относительно некоторой рациональной решетки. Было доказано (Теорема 15.2), что при достаточно малой норме возмущающего оператора в спектре рассматриваемого оператора вовсе нет спектральных лакун. В частности, это означает отсутствие лакун в нижней части спектра, то есть, левее (ниже) некоторой точки. В случае когда возмущение есть оператор умножения на периодический потенциал, в размерности три условие рациональности можно заменить на условие включения периодической решетки кубической подрешетки, см. [6, Гл. IV, §16, Теор. 16.2].

В настоящей работе мы рассматриваем Лапласиан в полосе, возмущённый ограниченным периодическим оператором. Подобный выбор области отличает нашу работу от цитированных выше. Мы рассматриваем случай, когда период возмущающего оператора достаточно мал. Основной полученный результат – отсутствие лакун в нижней части спектра для достаточно малого периода. Одним из достоинств полученного результата является то, что верхние оценки периода и длину числовой области значений возмущающего оператора, гарантирующие отсутствие лакун, выписаны явно в виде конкретных чисел. Также явно определена длина нижней части спектра, в которой гарантировано отсутствие лакун. Основным свойством этой части спектра является то, что её длина степенным образом возрастает с уменьшением периода.

Интерес к случаю малого периода отчасти мотивирован и серией работ по усреднению операторов с быстро осциллирующими коэффициентами и различными возмущениями из теории граничного усреднения в областях типа полос и бесконечных цилиндров [12]–[18]. Во всех этих работах в случае чисто периодического возмущения возмущённые операторы оказываются периодическими с малым периодом. В этих работ была доказана равномерная резольвентная сходимость возмущённых операторов к определённым усреднённым, откуда вытекает, что их спектр сходится к спектрам усреднённых операторов. Вместе с тем из общих результатов о сходимости не вытекает отсутствие лакун, а лишь то, что каждая такая лакуна, если существует, убегает в бесконечность при уменьшении малого параметра. Под убеганием понимается ситуация, когда расстояние от нижнего края спектра до данной лакуны растёт при уменьшении малого параметра. Вопрос о скорости роста такого расстояния рассматривался в работах [16]–[18]. Здесь были построены двупараметрические асимптотики для первых зонных функций, из которых вытекает, что расстояние от края спектра до первой лакуны по меньшей мере есть величина $O(\varepsilon^{-2})$, где ε – малый параметр. В настоящей работе для рассматриваемой модели аналогичный результат значительно лучше – здесь расстояние не меньше $O(\varepsilon^{-6})$, нижняя оценка для этого расстояния выписана явно, без каких-либо неопределённых констант.

После того, как данная статья была направлена в печать, автору стало известно об ещё одной работе – диссертации [19], в которой была доказана гипотеза Бете-Зоммерфельда для оператора с постоянными коэффициентами в полосе с ограниченным периодическим симметричным возмущением. Точнее, в полосе ширины πr, $r > 0$, рассматривался оператор

$$-a^2\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\mathcal{B} \tag{1.1}$$

с краевыми условиями Дирихле, где $\mathcal{B}$ – периодический ограниченный симметричный оператор в пространстве L_2. Основной результат [19] относительно спектральных лакун утверждает: при условии

$$ar > 16$$

в спектре рассматриваемого оператора имеется лишь конечное число лакун. Вопрос о полном отсутствии внутренних спектральных лакун в [19] не обсуждался. Подчеркнём ещё, что применяемая нами методика на уровне ключевых оценок качественно отличается от подхода работы [19], см. соответствующее обсуждение в § 6.

2. Постановка задачи и основные результаты

Пусть $x = (x_1, x_2)$ – декартовы координаты в $\mathbb{R}^2$, $\Pi := \{x : 0 < x_2 < \pi\}$ – горизонтальная полоса ширины π, ε – достаточно малое положительное число. Обозначим: $\square_\varepsilon := \{x : |x_1| < \varepsilon\pi,\ 0 < x_2 < \pi\}$, $\mathcal{L}_\varepsilon$ – симметричный оператор в $L_2(\square_\varepsilon)$, ограниченный для каждого рассматриваемого значения ε. Этот оператор порождает оператор в $L_2(\Pi)$ следующим образом. Так как сужение функций из $L_2(\Pi)$ на $\square_\varepsilon$ есть элемент из $L_2(\square_\varepsilon)$, то в смысле такого сужения оператор $\mathcal{L}_\varepsilon$ применим к функциям из $L_2(\Pi)$. Результат действия оператора $\mathcal{L}_\varepsilon$ продолжим нулём вне $\square_\varepsilon$. После такого продолжения оператор $\mathcal{L}_\varepsilon$ уже действует в $L_2(\Pi)$. Пусть $\mathcal{S}(n)$ – оператор сдвига в $L_2(\Pi)$, действующий по правилу: $(\mathcal{S}(n)u)(x) = u(x_1 - 2\varepsilon\pi n, x_2)$. Через $\mathcal{V}_\varepsilon$ обозначим следующий оператор в $L_2(\Pi)$:

$$\mathcal{V}_\varepsilon := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{S}(-n)\mathcal{L}_\varepsilon\mathcal{S}(n).$$

Оператор $\mathcal{V}_\varepsilon$ симметричен, ограничен и периодичен. Последнее свойство понимается в смысле равенства

$$\mathcal{V}_\varepsilon\mathcal{S}(p) = \mathcal{S}(p)\mathcal{V}_\varepsilon \quad \text{для всех} \quad p\in\mathbb{Z}.$$

В настоящей работе рассматривается периодический оператор в полосе Π

$$\mathcal{H}_\varepsilon := -\Delta + \mathcal{V}_\varepsilon \tag{2.1}$$

с условием Дирихле. Этот оператор рассматривается как неограниченный оператор в $L_2(\Pi)$ на области определения $\mathring{W}_2^2(\Pi)$. Здесь $\mathring{W}_2^j(\Omega) := \mathring{W}_2^j(\Omega, \partial\Omega)$, а $\mathring{W}_2^j(\Omega, S)$ – пространство функций из $W_2^j(\Omega)$, заданных на некоторой области Ω и обращающихся в нуль на кривой S.

Так как оператор $\mathcal{V}_\varepsilon$ симметричен и ограничен, по теореме Като-Реллиха оператор $\mathcal{H}_\varepsilon$ самосопряжён.

Оператор $\mathcal{H}_\varepsilon$ имеет зонный спектр, который вводится как объединение образов зонных функций. Зонные функции $E^k_{\mathcal{L}_\varepsilon}(\tau)$, $k \geqslant 1$ – это упорядоченные по возрастанию с учётом кратностей собственные значений соответствующих операторов на ячейке периодичности $\square_\varepsilon$, зависящие от (масштабированного) квазиимпульса $\tau \in \big[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\big)$. Для оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$ соответствующий оператор на ячейке есть

$$\mathcal{H}_\varepsilon(\tau) := \left(\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\tau}{\varepsilon}\right)^2 - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \mathcal{L}_\varepsilon(\tau), \quad \mathcal{L}_\varepsilon(\tau)u := e^{\frac{\mathrm{i}\tau}{\varepsilon}x_1}\mathcal{L}_\varepsilon e^{-\frac{\mathrm{i}\tau}{\varepsilon}\cdot}u,$$

на $\square_\varepsilon$ с краевым условием Дирихле на верхней и нижней границах ячейки $\square_\varepsilon$ и с условием периодичности на боковых сторонах $l_\pm$ ячейки $\square_\varepsilon$, $l_\pm := \{x : x_1 = \pm\varepsilon\pi,\ x_2 \in (0,\pi)\}$. Оператор $\mathcal{H}_\varepsilon(\tau)$ рассматривается как оператор в $L_2(\square)$ на области определения $\mathring{W}^2_{2,per}(\square_\varepsilon, \partial\square_\varepsilon \cap \partial\Pi)$ – пространстве функций из $\mathring{W}_2^j(\square_\varepsilon, \partial\square_\varepsilon \cap \partial\Pi)$, удовлетворяющих периодическим краевым условиям на боковых границах $l_\pm$.

Для оператора $\mathcal{L}_\varepsilon$ обозначим:

$$\omega_{\mathcal{L}_\varepsilon} := \sup_{\substack{u\in L_2(\square_\varepsilon)\\ \|u\|_{L_2(\square_\varepsilon)}=1}} (\mathcal{L}_\varepsilon u, u)_{L_2(\square_\varepsilon)} - \inf_{\substack{u\in L_2(\square_\varepsilon)\\ \|u\|_{L_2(\square_\varepsilon)}=1}} (\mathcal{L}_\varepsilon u, u)_{L_2(\square_\varepsilon)},$$

$$\lambda_\varepsilon := \inf_{\substack{u\in L_2(\square_\varepsilon)\\ \|u\|_{L_2(\square_\varepsilon)}=1}} (\mathcal{L}_\varepsilon u, u)_{L_2(\square_\varepsilon)}.$$

Через $\sigma(\cdot)$ обозначим спектр оператора, через $[\cdot]$ – целую часть числа.

Основная цель работы – доказать отсутствие лакун в определённой части зонного спектра оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$. Основной результат сформулирован в следующей теореме.

Теорема 2.1. *Пусть $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, $\varepsilon^2\omega_{\mathcal{L}_\varepsilon} \leqslant b_0$, где*

$$5\varepsilon_0 + \frac{\pi b_0}{4} \leqslant 2A_0, \quad A_0 := \frac{3\sqrt{2}}{128} - \frac{5\sqrt{7}}{896}. \tag{2.2}$$

Обозначим:

$$K_\varepsilon := \frac{A_0 + \sqrt{A_0^2 - \frac{\pi}{4} b_0 \varepsilon - \varepsilon^2}}{2\varepsilon}. \tag{2.3}$$

Тогда часть спектра

$$\left(-\infty, \frac{([K_\varepsilon^2]+1)^2}{\varepsilon^2} + \lambda_\varepsilon\right] \cap \sigma(\mathcal{H}_\varepsilon) \tag{2.4}$$

оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$ не содержит лакун.

Обсудим основной результат. Сразу отметим, что подкоренное выражение в определении (2.3) величины K_ε в силу (2.2) удовлетворяет оценке:

$$A_0^2 - \frac{\pi b_0 \varepsilon}{4} - \varepsilon^2 \geqslant \left(\frac{5\varepsilon_0}{2} + \frac{\pi b_0}{8}\right)^2 - \frac{\pi b_0 \varepsilon_0}{4} - \varepsilon_0^2 = \frac{21\varepsilon_0^2}{4} + \frac{3\pi b_0 \varepsilon_0}{8} + \frac{\pi b_0^2}{64} \geqslant 0,$$

а потому величина K_ε определена корректно.

Фактически теорема 2.1 утверждает, что при малых периодах оператор $\mathcal{H}_\varepsilon$ не имеет спектральных лакун в нижней части спектра. Кроме того, имеется гарантированная оценка длины части спектра без лакун, см. (2.4). При малых ε величина K_ε ведет себя как $O(\varepsilon^{-1})$. Поэтому в силу (2.4) нижняя часть спектра, свободная от лакун, имеет длину по меньшей мере $O(\varepsilon^{-6})$. Это существенно более сильный результат по сравнению с результатами работ [17], [18] для модели с частой сменой краевых условий, где утверждалось отсутствие лакун на части спектра длиной, не превосходящей $C\varepsilon^{-2}$ с неопределенной константой C. Отметим ещё, что длина обсуждаемой части спектра возрастает с уменьшением ε.

Явные числовые константы в утверждении теоремы 2.1 – неоптимальны и могут быть улучшены. Вместе с тем это требует использования дополнительных громоздких технических деталей, которые серьёзно усложнили бы приведённое далее доказательство теоремы 2.1. Именно поэтому выбор был сделан в пользу неоптимальных констант.

Следует подчеркнуть, что выбор краевого условия Дирихле на границе полосы Π сделан лишь для определённости. Если на границах полосы задается краевое условие Неймана, либо задаётся комбинация краевых условий Дирихле и Неймана на верхней и нижней границах, техника нашей работы применима и в таком случае и приводит к результату, аналогичному теореме 2.1.

Обратим ещё внимание на тот факт, что условие (2.2) накладывается фактически на максимально допустимые значения периода и размер области значений оператора $\mathcal{L}_\varepsilon$. В частности, из определения величины b_0 следует, что для любого оператора $\mathcal{L}_\varepsilon$, ограниченного равномерно по ε, за счёт выбора достаточно малого ε_0 всегда можно добиться выполнения условия (2.2) и как следствие – отсутствия лакун в нижней части спектра.

В заключение сравним наш основной результат с результатом диссертации [19]. Для простоты будем считать, что $\mathcal{B}$ в (2.1) – это оператор умножения на некоторый ограниченный измеримый вещественный потенциал V, который 2π-периодичен по x_1. С помощью замены

$$x_1 \mapsto \frac{x_1}{ar}, \quad x_2 \mapsto \frac{x_2}{r},$$

оператор (1.1) приводится к оператору

$$-\Delta + r^2 V(arx_1, x_2)$$

в полосе Π. После обозначения $\varepsilon := \frac{1}{ar}$ последний оператор превращается в оператор (2.1) с

$$\mathcal{L}_\varepsilon = \frac{1}{a^2\varepsilon^2} V\left(\frac{x_1}{\varepsilon}, x_2\right). \tag{2.5}$$

Для такого оператора результат [19] утверждает наличие лишь конечного числа лакун в спектре, при этом ситуация полного отсутствия лакун либо положение первой возможной лакуны не изучались.

Чтобы применить теперь наш результат, вначале отметим, что для оператора (2.5) величина $\omega_{\mathcal{L}_\varepsilon}$ имеет вид

$$\omega_{\mathcal{L}_\varepsilon} = \frac{\omega_*}{a^2\varepsilon^2}, \quad \omega_* := \sup_{[0,2\pi]\times[0,\pi]} V(x) - \inf_{[0,2\pi]\times[0,\pi]} V(x)$$

и условие (2.2) переписывается в виде

$$6\varepsilon_0 + \frac{\pi\omega_*}{4a^2} \leqslant 2A_0.$$

Из последнего неравенства в силу теоремы 2.1 следует, что при не слишком больших осцилляциях потенциала V нижняя часть спектра (2.4) не содержит внутренних лакун. Для спектра исходного оператора (1.1) это означает, что часть его спектра до точки $([K_\varepsilon^2]+1)^2\varepsilon^{-2}+\lambda_\varepsilon$ свободна от внутренних лакун. Отметим ещё, что последняя величина есть $O(\varepsilon^{-6})$ при $\varepsilon \to +0$.

3. Примеры

В настоящем параграфе мы приводим два основных примера оператора $\mathcal{L}$.

3.1. Потенциал. Первый пример – это оператор умножения на потенциал $V_\varepsilon(x) = V\left(\frac{x_1}{\varepsilon}, x_2, \varepsilon\right)$. Здесь $V = V(\xi, x_2, \varepsilon) \in L_\infty(\square_1)$ – ограниченная измеримая вещественная функция для каждого значения ε. Потенциал V_ε принадлежит $L_\infty(\square_\varepsilon)$. Соответствующий оператор $\mathcal{V}_\varepsilon$ – это умножение на периодический потенциал, полученный $2\pi\varepsilon$-продолжением V_ε по x_1 на всю полосу Π. Такой оператор удовлетворяет всем требуемым условиям, а величина $\omega_{\mathcal{L}_\varepsilon}$ превращается в осцилляцию потенциала:

$$\omega_{\mathcal{L}_\varepsilon} = \omega_V := \operatorname*{ess\,sup}_{[0,2\pi]\times[0,\pi]} V - \operatorname*{ess\,inf}_{[0,2\pi]\times[0,\pi]} V.$$

Более того, теорема 2.1 подходит и для случаев сингулярной зависимости потенциала V от параметра. Например, пусть

$$V(\xi, x_2, \varepsilon) = \varepsilon^{-a(\varepsilon)} W(\xi, x_2),$$

где $W \in L_\infty(\square_1)$ – ограниченная измеримая функция, $a(\varepsilon) \leqslant q \leqslant 2$. Тогда $\omega_V = \varepsilon^{-a}\omega_W$ и условие (2.2) превращается в следующее:

$$5\varepsilon_0 + \frac{\pi\varepsilon_0^{2-q}\omega_W}{4} \leqslant 2A_0.$$

Если $q < 2$, то последнее неравенство выполнено для любого ω_W при достаточно малых ε_0. Если $q = 2$, то требуемое неравенство выполнено при не слишком больших ω_W.

3.2. Интегральный оператор. Наш второй пример – это интегральный оператор вида

$$\big(\mathcal{L}_\varepsilon u\big)(x) = \int\limits_{\square_\varepsilon\times\square_\varepsilon} P\left(\frac{x_1}{\varepsilon}, x_2, \frac{y_1}{\varepsilon}, y_2, \varepsilon\right) u(y)\, dy,$$

где ядро $P(\xi, x_2, \zeta, y_2, \varepsilon)$ – функция из $L_2(\square_1^2)$ для каждого значения ε, удовлетворяющая условию:

$$P(\zeta, y_2, \xi, x_2, \varepsilon) = \overline{P(\xi, x_2, \zeta, y_2, \varepsilon)}.$$

Такой оператор вновь удовлетворяет требуемым условиям. Точно вычислить величину $\omega_{\mathcal{L}_\varepsilon}$ нам не удалось, однако её можно оценить сверху:

$$\omega_{\mathcal{L}_\varepsilon} \leqslant 2\left(\int\limits_{\square_\varepsilon^2} \left|K\left(\frac{x_1}{\varepsilon}, x_2, \frac{y_1}{\varepsilon}, y_2, \varepsilon\right)\right|^2 dx\, dy\right)^{\frac{1}{2}} = 2\varepsilon\|P(\cdot,\varepsilon)\|_{L_2(\square_1^2)}. \tag{3.1}$$

Ядро K также может сингулярно зависеть от ε:

$$P(x, y, \varepsilon) = \varepsilon^{-a(\varepsilon)} Q(x, y),$$

где $a(\varepsilon) \leqslant q \leqslant 3$. В этом случае из оценки (3.1) следует, что

$$\omega_{\mathcal{L}_\varepsilon} \leqslant 2\varepsilon^{3-q}\|Q\|_{L_2(\square_1^2)}$$

и условие (2.2) принимает вид:

$$5\varepsilon_0 + \frac{\pi\varepsilon_0^{3-q}}{2}\|Q\|_{L_2(\square_1^2)} \leqslant 2A_0.$$

Отметим ещё, что в качестве оператора $\mathcal{L}_\varepsilon$ можно взять сумму потенциала и интегрального оператора из описанных выше примеров.

4. Считающие функции

В настоящем параграфе вводится ряд вспомогательных понятий и обсуждаются предварительные утверждения, которые будут использованы далее в доказательстве теоремы 2.1.

Для произвольного $L > 0$ через $N_{\mathcal{L}_\varepsilon}(L,\tau)$ обозначим считающую функцию оператора $\mathcal{H}_\varepsilon(\tau)$ – число собственных значений этого оператора с учётом кратностей, не превосходящих $\frac{L^2}{\varepsilon^2}$:

$$N_{\mathcal{L}_\varepsilon}(L,\tau) := \max\left\{k:\ E^k_{\mathcal{L}_\varepsilon}(\tau) \leqslant \frac{L^2}{\varepsilon^2}\right\}. \tag{4.1}$$

Так как зонные функции $E^k_{\mathcal{L}_\varepsilon}(\tau)$ упорядочены по возрастанию:

$$E^1_{\mathcal{L}_\varepsilon}(\tau) \leqslant E^2_{\mathcal{L}_\varepsilon}(\tau) \leqslant \dots \leqslant E^k_{\mathcal{L}_\varepsilon}(\tau) \leqslant \dots,$$

то при фиксированном L величина $\sup\limits_{\tau\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2})} N_{\mathcal{L}_\varepsilon}(L,\tau)$ есть число зонных функций, чьи минимумы не превосходят $\frac{L^2}{\varepsilon^2}$, а величина $\inf\limits_{\tau\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2})} N_{\mathcal{L}_\varepsilon}(L,\tau)$ – число зонных функций, чьи максимумы не превосходят $\frac{L^2}{\varepsilon^2}$. Всюду далее для упрощения записи вместо $\sup\limits_{\tau\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2})}$ и $\inf\limits_{\tau\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2})}$ мы будем кратко писать $\sup\limits_{\tau}$ и $\inf\limits_{\tau}$.

Пусть две какие-то соседние зоны спектра перекрываются, то есть,

$$\big[\min_\tau E^k_{\mathcal{L}_\varepsilon}(\tau), \max_\tau E^k_{\mathcal{L}_\varepsilon}(\tau)\big] \cap \big[\min_\tau E^{k+1}_{\mathcal{L}_\varepsilon}(\tau), \max_\tau E^{k+1}_{\mathcal{L}_\varepsilon}(\tau)\big] \neq \emptyset$$

или

$$\max_\tau E^k_{\mathcal{L}_\varepsilon}(\tau) \geqslant \min_\tau E^{k+1}_{\mathcal{L}_\varepsilon}(\tau).$$

Это эквивалентно тому, что при

$$\min_\tau E^k_{\mathcal{L}_\varepsilon}(\tau) \leqslant \frac{L^2}{\varepsilon^2} \leqslant \max_\tau E^k_{\mathcal{L}_\varepsilon}(\tau)$$

выполнено неравенство

$$\sup_\tau N_{\mathcal{L}_\varepsilon}(L,\tau) - \inf_\tau N_{\mathcal{L}_\varepsilon}(L,\tau) \geqslant 1. \tag{4.2}$$

Таким образом, некоторая часть зонного спектра между точками λ_- и λ_+ не содержит спектральных лакун, если для всех $\frac{L^2}{\varepsilon^2} \in [\lambda_-,\lambda_+]$ выполнено неравенство (4.2).

Проверять непосредственно неравенство (4.2) – весьма сложная задача. Поэтому наш следующий шаг – оценка левой части неравенства (4.2) через схожую разность, но для считающих функций более простых операторов.

С учётом возможности сдвига спектрального параметра без ограничения общности можно считать, что

$$\inf_{\substack{u\in L_2(\square_\varepsilon)\\ \|u\|_{L_2(\square_\varepsilon)}=1}} (\mathcal{L}_\varepsilon u,u)_{L_2(\square_\varepsilon)} = 0.$$

Тогда

$$\omega_{\mathcal{L}_\varepsilon} = \sup_{\substack{u\in L_2(\square_\varepsilon)\\ \|u\|_{L_2(\square_\varepsilon)}=1}} (\mathcal{L}_\varepsilon u,u)_{L_2(\square_\varepsilon)} \tag{4.3}$$

Квадратичная форма, соответствующая оператору $\mathcal{H}_\varepsilon(\tau)$, имеет вид:

$$\mathfrak{h}^\tau_{\mathcal{L}_\varepsilon}[u] := \left\| \left(\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x_1} + \tau \right) u \right\|^2_{L_2(\square_\varepsilon)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial x_2} \right\|^2_{L_2(\square_\varepsilon)} + \left(\mathcal{L}_\varepsilon e^{-\frac{\mathrm{i}\tau}{\varepsilon} x_1} u, e^{-\frac{\mathrm{i}\tau}{\varepsilon} x_1} u \right)_{L_2(\square_\varepsilon)}$$

на $\mathring{W}^1_{2,per}(\square_\varepsilon, \partial\square_\varepsilon \cap \partial\Pi)$. Учитывая теперь оценку

$$0 \leqslant (\mathcal{L}_\varepsilon u, u)_{L_2(\square_\varepsilon)} \leqslant \omega_{\mathcal{L}_\varepsilon} \|u\|^2_{L_2(\square_\varepsilon)},$$

в силу принципа минимакса легко видеть, что для зонных функций $E^K_{\mathcal{L}_\varepsilon}$ верны оценки:

$$E^k_0(\tau) \leqslant E^k_{\mathcal{L}_\varepsilon}(\tau) \leqslant E^k_{\omega_{\mathcal{L}_\varepsilon}}(\tau). \tag{4.4}$$

Следовательно,

$$N_0(\sqrt{L^2 - \varepsilon^2 \omega_{\mathcal{L}_\varepsilon}}, \tau) = N_{\omega_{\mathcal{L}_\varepsilon}}(L, \tau) \leqslant N_{\mathcal{L}_\varepsilon}(L, \tau) \leqslant N_0(L, \tau).$$

Тогда

$$\sup_\tau N_{\mathcal{L}_\varepsilon}(L, \tau) - \inf_\tau N_{\mathcal{L}_\varepsilon}(L, \tau) \geqslant \sup_\tau N_0(\sqrt{L^2 - \varepsilon^2 \omega_{\mathcal{L}_\varepsilon}}, \tau) - \inf_\tau N_0(L, \tau),$$

и для проверки неравенства (4.2) достаточно доказать, что

$$\sup_\tau N_0(\sqrt{L^2 - \varepsilon^2 \omega_{\mathcal{L}_\varepsilon}}, \tau) - \inf_\tau N_0(L, \tau) \geqslant 1.$$

И так как функция N_0 целочисленная, то для проверки последнего неравенства достаточно убедиться, что

$$\sup_\tau N_0(\sqrt{L^2 - \varepsilon^2 \omega_{\mathcal{L}_\varepsilon}}, \tau) - \inf_\tau N_0(L, \tau) > 0. \tag{4.5}$$

Именно последнее неравенство мы и будем проверять в доказательстве теоремы 2.1.

Выпишем теперь явную формулу для функции N_0. Собственные значения оператора $\mathcal{H}_0(\tau)$ и соответствующие собственные функции легко находятся разделением переменных:

$$\Lambda^0_{n,m}(\tau) = \frac{(n+\tau)^2}{\varepsilon^2} + m^2, \quad \Psi^0_{n,m}(x) = e^{\frac{\mathrm{i}nx_1}{\varepsilon}} \sin m x_2, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{4.6}$$

Поэтому зонные функции $E^k_0(\tau)$ есть числа $\Lambda^0_{n,m}(\tau)$, упорядоченные по возрастанию с учётом кратностей. Возвращаясь к определению (4.1) для считающих функций, видим, что $N_0(L, \tau)$ есть число целых точек (n, m) на плоскости, удовлетворяющих неравенству $(n+\tau)^2 + \varepsilon^2 m^2 \leqslant L^2$, то есть,

$$\begin{aligned} N_0(L, \tau) &= \#\big\{(n, m) : \, (n+\tau)^2 + \varepsilon^2 m^2 \leqslant L^2, \; n \in \mathbb{Z}, \; m \in \mathbb{N}\big\} \\ &= \sum_{n: |n+\tau| \leqslant L} \left[\frac{\sqrt{L^2 - (n+\tau)^2}}{\varepsilon} \right] = \sum_{n=-[L+\tau]}^{[L-\tau]} \left[\frac{\sqrt{L^2 - (n+\tau)^2}}{\varepsilon} \right]. \end{aligned} \tag{4.7}$$

5. Доказательство основного результата

В настоящем параграфе мы доказываем теорему 2.1. Доказательство удобно разбить на несколько этапов.

5.1. Пересечение первых двух зон. Вначале отметим, что из (2.2) немедленно вытекают априорные оценки для ε_0 и b_0:

$$\varepsilon_0 \leqslant \frac{2A_0}{5}, \quad b_0 \leqslant \frac{8A_0}{\pi}, \quad \frac{\pi\varepsilon\omega_{\mathcal{L}_\varepsilon}}{4} \leqslant \frac{2A_0}{\varepsilon}. \tag{5.1}$$

Основная идея состоит в том, чтобы определить интервал значений L, для которых выполнено неравенство (4.5). Отсутствие лакун следует проверить для положительных L, удовлетворяющих оценке

$$L^2 \geqslant \varepsilon^2 \inf \sigma(\mathcal{H}_\varepsilon).$$

Вместе с тем в силу неотрицательности оператора $\mathcal{L}$ и равенства (4.3) для величины $\omega_{\mathcal{L}_\varepsilon}$ нижняя граница существенного спектра оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$ удовлетворяет оценке

$$1 \leqslant \inf \sigma(\mathcal{H}_\varepsilon) \leqslant 1 + \omega_{\mathcal{L}_\varepsilon}$$

и при

$$\varepsilon^2 \inf \sigma(\mathcal{H}_\varepsilon) \leqslant L^2 < \varepsilon^2 \omega_{\mathcal{L}_\varepsilon}$$

неравенство (4.5) теряет смысл, так как в первом слагаемом в левой части корень оказывается чисто мнимым. Поэтому в начале спектра отсутствие лакун мы докажем на основе оценки положения первых зон спектра.

Из формул (4.6) и оценки для ε_0 в (5.1) следует, что первые две зонные функции $E_0^1(\tau)$ и $E_0^2(\tau)$ – чётные по τ функции, имеющие вид:

$$E_0^1(\tau) = \frac{\tau^2}{\varepsilon^2} + 1, \quad E_0^2(\tau) = \min\left\{\frac{(1-\tau)^2}{\varepsilon^2} + 1, \frac{\tau^2}{\varepsilon^2} + 4\right\}, \quad \tau \in \left[0, \tfrac{1}{2}\right].$$

Отсюда вытекает, что

$$\max_\tau E_0^1(\tau) = \frac{1}{4\varepsilon^2} + 1, \quad \min_\tau E_0^2(\tau) = 4, \quad \max_\tau E_0^2(\tau) = \frac{(1-3\varepsilon^2)^2}{4\varepsilon^2} + 4,$$

где в последнем равенстве правая часть возникает как значение функций $\tau \mapsto \frac{(1-\tau)^2}{\varepsilon^2} + 1$, $\tau \mapsto \frac{\tau^2}{\varepsilon^2} + 4$ в точке пересечения графиков. В силу оценок (4.4) и (5.1) отсюда следует, что

$$\max_\tau E_{\mathcal{L}_\varepsilon}^1 \geqslant \frac{1}{4\varepsilon^2} + 1, \quad \min_\tau E_{\mathcal{L}_\varepsilon}^2 \leqslant 4 + \omega_{\mathcal{L}_\varepsilon}, \quad \max_\tau E_{\mathcal{L}_\varepsilon}^2 \geqslant \frac{(1-3\varepsilon^2)^2}{4\varepsilon^2} + 4.$$

Так как в силу (5.1) и положительности $\omega_{\mathcal{L}_\varepsilon}$

$$\frac{1}{4\varepsilon^2} - \omega_{\mathcal{L}_\varepsilon} \geqslant \frac{1}{\varepsilon^2}\left(\frac{1}{4} - b_0\right) > 3 \quad \Rightarrow \quad 4 + \omega_{\mathcal{L}_\varepsilon} \leqslant \frac{1}{4\varepsilon^2} + 1,$$

то первые две зоны спектра пересекаются и интервал

$$\left[\inf \sigma(\mathcal{H}_\varepsilon), \frac{(1-3\varepsilon^2)^2}{4\varepsilon^2} + 4\right]$$

не содержит спектральных лакун. Таким образом, неравенство (4.5) достаточно проверить для

$$L^2 \geqslant \frac{(1-3\varepsilon^2)^2}{4} + 4\varepsilon^2 = \frac{1 + 10\varepsilon^2 + 9\varepsilon^4}{4} > \frac{1}{4}.$$

Далее считаем, что выполнено последнее неравенство для L.

5.2. Случай $\frac{1}{2} \leqslant L < 1$. Здесь мы считаем, что

$$\frac{1}{2} < \frac{\sqrt{1+10\varepsilon^2+9\varepsilon^4}}{2} \leqslant L < 1.$$

В силу (5.1) при таких значениях L имеем:

$$\frac{\sqrt{3}}{4} < \sqrt{L^2 - \varepsilon^2\omega_{\mathcal{L}_\varepsilon}} < 1.$$

Следовательно,

$$N_0(\sqrt{L^2 - \varepsilon^2\omega_{\mathcal{L}_\varepsilon}}, 0) = \left[\frac{\sqrt{L^2 - \varepsilon^2\omega_{\mathcal{L}_\varepsilon}}}{\varepsilon}\right],$$

$$N_0(L, 1-L) = \left[\frac{\sqrt{2L-1}}{\varepsilon}\right], \tag{5.2}$$

и при дополнительном условии

$$L^2 \geqslant \frac{1}{4} + \varepsilon^2\omega_{\mathcal{L}_\varepsilon} \tag{5.3}$$

верно

$$N_0\left(\sqrt{L^2 - \varepsilon^2\omega_{\mathcal{L}_\varepsilon}}, \frac{1}{2}\right) = 2\left[\frac{\sqrt{L^2 - \varepsilon^2\omega_{\mathcal{L}_\varepsilon} - \frac{1}{4}}}{\varepsilon}\right]. \tag{5.4}$$

Пусть $L_* \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ – такое число, что

$$2\frac{\sqrt{L_*^2 - \varepsilon^2\omega_{\mathcal{L}_\varepsilon} - \frac{1}{4}}}{\varepsilon} - 1 = \frac{\sqrt{L_*^2 - \varepsilon^2\omega_{\mathcal{L}_\varepsilon}}}{\varepsilon},$$

$$L_* = \sqrt{\frac{(\sqrt{3+4\varepsilon^2}+\varepsilon)^2}{9} + \varepsilon^2\omega_{\mathcal{L}_\varepsilon}}.$$

Тогда при

$$\frac{1}{2} \leqslant L \leqslant L_*$$

в силу (5.1) имеем:

$$\begin{aligned}
\sup_\tau N_0(\sqrt{L^2 - \varepsilon^2\omega_{\mathcal{L}_\varepsilon}}, \tau) - \inf_\tau N_0(L, \tau) &\geqslant N_0(\sqrt{L^2 - \varepsilon^2\omega_{\mathcal{L}_\varepsilon}}, 0) - N_0(L, 1-L) \\
&\geqslant \frac{\sqrt{L^2 - \varepsilon^2\omega_{\mathcal{L}_\varepsilon}} - \sqrt{2L-1}}{\varepsilon} - 1 \\
&= \frac{(L-1)^2 - \varepsilon^2\omega_{\mathcal{L}_\varepsilon}}{\varepsilon(\sqrt{L^2 - \varepsilon^2\omega_{\mathcal{L}_\varepsilon}} + \sqrt{2L-1})} - 1 \\
&\geqslant \left.\frac{(L_*-1)^2 - \varepsilon^2\omega_{\mathcal{L}_\varepsilon}}{\varepsilon_0(\sqrt{L_*^2 - \varepsilon^2\omega_{\mathcal{L}_\varepsilon}} + \sqrt{2L_*-1})}\right|_{\substack{\varepsilon = \frac{2A_0}{5} \\ \varepsilon^2\omega_{\mathcal{L}_\varepsilon} = \frac{8A_0}{\pi}}} - 1 > 0.
\end{aligned}$$

При

$$L_* \leqslant L < 1$$

условие (5.3) выполнено и с учётом (5.2), (5.4) получаем:

$$\begin{aligned}\sup_\tau N_0(\sqrt{L^2-\varepsilon^2\omega_{\mathcal{L}_\varepsilon}},\tau)-\inf_\tau N_0(L,\tau)&\\ \geqslant N_0\left(\sqrt{L^2-\varepsilon^2\omega_{\mathcal{L}_\varepsilon}},\frac{1}{2}\right)-N_0(L,1-L)&\\ \geqslant \frac{\sqrt{L^2-\varepsilon^2\omega_{\mathcal{L}_\varepsilon}-\frac{1}{4}}-\sqrt{2L-1}}{\varepsilon}\Bigg|_{\substack{\varepsilon=\frac{2A_0}{5}\\ \varepsilon^2\omega_{\mathcal{L}_\varepsilon}=\frac{8A_0}{\pi}}}-2>0.&\end{aligned}\tag{5.5}$$

5.3. Общий случай: вспомогательные оценки. Далее считаем, что $L\geqslant 1$. Обозначим $K:=[L]$, $\alpha:=\{L\}$, где $\{\cdot\}$ – дробная часть числа. Начнём с очевидных соотношений:

$$0\leqslant L-\sqrt{L^2-\varepsilon^2\omega_{\mathcal{L}_\varepsilon}}=\frac{\varepsilon^2\omega_{\mathcal{L}_\varepsilon}}{L+\sqrt{L^2-\varepsilon^2\omega_{\mathcal{L}_\varepsilon}}}\leqslant\frac{\varepsilon^2\omega_{\mathcal{L}_\varepsilon}}{L}\leqslant\frac{8A_0}{\pi},\tag{5.6}$$

справедливых в силу оценок (5.1) и $L\geqslant 1$.

Обозначим:

$$\begin{aligned}&F_1(L,X,B):=\sqrt{L^2-B-X^2},\quad F_2(L,X,A):=\sqrt{L^2-(X+A)^2},\\ &F_0(L,X,A,B):=2F_1(L,X,B)-F_2(L,X,A)-F_2(L,X,-A).\end{aligned}$$

Прямыми вычислениями несложно проверить, что

$$\begin{aligned}F_0(L,X,A,B)=(A^2-B)\bigg(&\frac{1}{F_1(L,X,B)+F_2(L,X,A)}+\frac{1}{F_1(L,X,B)+F_2(L,X,-A)}\bigg)\\ &+\frac{8A^2X^2}{F_1(L,X,B)+F_2(L,X,A)}\frac{1}{F_1(L,X,B)+F_2(L,X,-A)}\frac{1}{F_2(L,X,A)+F_2(L,X,-A)}.\end{aligned}$$

Из этого представления следует, что при положительных подкоренных выражениях функция $F_0(L,X,A,B)$ положительна для $B\leqslant A^2$, $A>0$ и монотонно возрастает при $X\geqslant A\geqslant 0$. Кроме того, для таких X верна оценка:

$$F_0(L,X,A,0)\geqslant A^2\bigg(\frac{1}{F_2(L,X,-A)}+\frac{X^2}{F_2^3(L,X,-A)}\bigg)\geqslant A^2\frac{L^2+2A(X-A)}{\big(L^2-(X-A)^2\big)^{\frac{3}{2}}}.\tag{5.7}$$

Отметим ещё одно очевидное неравенство для $F_0(L,X,A,B)$:

$$\begin{aligned}0\geqslant&\int\limits_0^{\sqrt{L^2-B}}\big(F_0(L,X,A,B)-F_0(L,X,A,0)\big)\,dx\\ =&-\int\limits_0^{\sqrt{L^2-B}}\frac{B\,dx}{F_1(L,X,B)+F_1(L,X,0)}\geqslant-\int\limits_0^{\sqrt{L^2-B}}\frac{B\,dx}{2F_1(L,X,B)}\\ =&-\frac{B}{2}\arcsin\frac{X}{\sqrt{L^2-B}}\bigg|_0^{\sqrt{L^2-B}}=-\frac{\pi B}{4}.\end{aligned}\tag{5.8}$$

5.4. Общий случай: $\alpha \leqslant \frac{1}{4}$**.** С учётом (4.7) имеем:

$$
\begin{aligned}
&\sup_\tau N_0(\sqrt{L^2-\varepsilon^2\omega_{\mathcal{L}_\varepsilon}},\tau)-\inf_\tau N_0(L,\tau)\geqslant N_0\left(\sqrt{L^2-\varepsilon^2\omega_{\mathcal{L}_\varepsilon}},\frac{1}{2}\right)-N_0(L,\alpha)\\
&=\sum_{n=-\left[\sqrt{L^2-\varepsilon^2\omega_{\mathcal{L}_\varepsilon}}+\frac12\right]}^{\left[\sqrt{L^2-\varepsilon^2\omega_{\mathcal{L}_\varepsilon}}-\frac12\right]}\left[\frac{\sqrt{L^2-\varepsilon^2\omega_{\mathcal{L}_\varepsilon}-\left(n+\frac12\right)^2}}{\varepsilon}\right]-\sum_{n=-[L+\alpha]}^{[L-\alpha]}\left[\frac{\sqrt{L^2-(n+\alpha)^2}}{\varepsilon}\right]\\
&=\sum_{n=0}^{\left[\sqrt{L^2-\varepsilon^2\omega_{\mathcal{L}_\varepsilon}}-\frac12\right]}2\left[\frac{\sqrt{L^2-\varepsilon^2\omega_{\mathcal{L}_\varepsilon}-\left(n+\frac12\right)^2}}{\varepsilon}\right]-\sum_{n=-K}^{K-1}\left[\frac{\sqrt{L^2-(n+\alpha)^2}}{\varepsilon}\right].
\end{aligned}
\tag{5.9}
$$

Отсюда в силу (5.6) выводим:

$$
\begin{aligned}
\sup_\tau N_0(\sqrt{L^2-\varepsilon^2\omega_{\mathcal{L}_\varepsilon}},\tau)-\inf_\tau N_0(L,\tau)\geqslant \sum_{n=0}^{K-1}2\left[\frac{\sqrt{L^2-\varepsilon^2\omega_{\mathcal{L}_\varepsilon}-\left(n+\frac12\right)^2}}{\varepsilon}\right]\\
-\sum_{n=0}^{K-1}\left(\left[\frac{\sqrt{L^2-(n+\alpha)^2}}{\varepsilon}\right]+\left[\frac{\sqrt{L^2-(n+1-\alpha)^2}}{\varepsilon}\right]\right)\geqslant\frac{S_1(L)}{\varepsilon}-2K,
\end{aligned}
\tag{5.10}
$$

где для краткости обозначено:

$$
S_1(L):=\sum_{n=0}^{K-1}f_1(n,L),\qquad f_1(x,L):=F_0\left(L,x+\frac12,\frac12-\alpha,\varepsilon^2\omega_{\mathcal{L}_\varepsilon}\right).
$$

Из описанных выше свойств функции F_0 вытекает монотонное возрастание по $x\geqslant 0$ функции $f_1(x,L)$ и положительность $f_1(0,L)$:

$$
S_1(L)\geqslant f_1(0,L)+\int_0^{K-1}f_1(x,L)\,dx,\quad f_1(0,L)>0. \tag{5.11}
$$

Хотя интеграл в левой части этого неравенства можно вычислить явно, нам удобнее оценить его перед непосредственным интегрированием.

При $K=1$ интеграл в (5.11) обращается в нуль и в силу (5.1)

$$
f_1(0,1+\alpha)\geqslant\left(2\sqrt{(1+\alpha)^2-\frac14-b_0}-\sqrt{4\alpha}-\sqrt{1+2\alpha}\right)\Bigg|_{\alpha=\frac14}>2\varepsilon_0. \tag{5.12}
$$

Далее рассматриваем случай $K\geqslant 2$. Из (5.8) немедленно вытекает:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{K-1}\left(f_1(x,L)-F_0\left(L,x+\frac12,\frac12-\alpha,0\right)\right)dx\\
&\geqslant\int_0^{\sqrt{L^2-\varepsilon^2\omega_{\mathcal{L}_\varepsilon}}}\left(F_0\left(L,x,\frac12-\alpha,\varepsilon^2\omega_{\mathcal{L}_\varepsilon}\right)-F_0\left(L,x,\frac12-\alpha,0\right)\right)dx\geqslant-\frac{\pi\varepsilon^2\omega_{\mathcal{L}_\varepsilon}}{4}.
\end{aligned}
\tag{5.13}
$$

В силу (5.7) имеем:

$$
\begin{aligned}
\int\limits_0^{K-1} F_0\left(L,x,\frac{1}{2}-\alpha,0\right)\,dx &\geqslant \int\limits_0^{K-1}\frac{L^2+(1-2\alpha)(x+\alpha)}{16\big((K+\alpha)^2-(x+\alpha)^2\big)^{\frac{3}{2}}}\,dx\\
&=\int\limits_{\alpha}^{K-1+\alpha}\frac{(K+\alpha)^2+(1-2\alpha)x}{16\big((K+\alpha)^2-x^2\big)^{\frac{3}{2}}}\,dx\\
&=\frac{x+(1-2\alpha)}{16\sqrt{(K+a)^2-x^2}}\bigg|_{\alpha}^{K-1+\alpha}=\frac{F_3(\alpha)}{16},\\
F_3(\alpha):=\frac{K-\alpha}{\sqrt{2(K+\alpha)-1}}-\frac{1-\alpha}{\sqrt{K^2+2\alpha K}}.&
\end{aligned}
\tag{5.14}
$$

Функция $f_*(\alpha)$ монотонно убывает по $\alpha\in\left[0,\frac{1}{4}\right]$ так как

$$
\begin{aligned}
F_3'(\alpha)=&-\frac{1}{\big(2(K+a)-1\big)^{\frac{1}{2}}}-\frac{K-\alpha}{\big(2(K+\alpha)-1\big)^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{(K^2+2\alpha K)^{1/2}}+\frac{(1-\alpha)K}{(K^2+2\alpha K)^{\frac{3}{2}}}\\
\leqslant&-\frac{1}{\left(2K-\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}-\frac{K-\frac{1}{4}}{\left(2K-\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{K}+\frac{1}{K^2}\\
=&-\frac{3}{2^{\frac{3}{2}}\left(K-\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{K}+\frac{1}{K^2}\leqslant-\frac{3}{\sqrt{14}}+\frac{3}{4}<0.
\end{aligned}
$$

Поэтому в силу (5.14)

$$
\begin{aligned}
\int\limits_0^{K-1} F_0\left(L,x,\frac{1}{2}-\alpha,0\right)\,dx &\geqslant \frac{1}{16}F_3\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{\sqrt{K-\frac{1}{4}}}{16\sqrt{2}}-\frac{3}{64\sqrt{K^2+\frac{1}{2}K}}\\
&\geqslant\left(\frac{\sqrt{K-\frac{1}{4}}}{16\sqrt{2}\sqrt{K}}-\frac{3}{64\sqrt{K^2+\frac{1}{2}K}\sqrt{K}}\right)\Bigg|_{K=2}\sqrt{K}\geqslant\frac{13}{500}\sqrt{K}.
\end{aligned}
\tag{5.15}
$$

Отсюда и из (5.10), (5.12), (5.13), (5.14) окончательно получаем:

$$
\sup_{\tau} N_0(\sqrt{L^2-\varepsilon^2\omega_{\mathcal{L}_\varepsilon}},\tau)-\inf_{\tau} N_0(L,\tau)\geqslant\frac{2\varepsilon_0}{\varepsilon}-2>0
$$

при $L=1+\alpha$ и

$$
\sup_{\tau} N_0(\sqrt{L^2-\varepsilon^2\omega_{\mathcal{L}_\varepsilon}},\tau)-\inf_{\tau} N_0(L,\tau)\geqslant\frac{13}{500}\frac{\sqrt{K}}{\varepsilon}-\frac{\pi\varepsilon\omega_{\mathcal{L}_\varepsilon}}{4}-2K
\tag{5.16}
$$

при $L=K+\alpha$, $K\geqslant 2$.

Остальные случаи $\frac{1}{4}<\alpha<\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}\leqslant\alpha<\frac{3}{4}$, $\frac{3}{4}\leqslant\alpha<1$ рассматриваются в целом аналогично. Поэтому далее эти случаи мы описываем достаточно кратко, останавливаясь лишь на основных формулах.

5.5. Общий случай: $\frac{1}{4} < \alpha < \frac{1}{2}$**.** Аналогично (5.9), (5.10) имеем:

$$\begin{aligned}\sup_{\tau} N_0(\sqrt{L^2-\varepsilon^2\omega_{\mathcal{L}_\varepsilon}},\tau) - \inf_{\tau} N_0(L,\tau) \geqslant N_0\left(\sqrt{L^2-\varepsilon^2\omega_{\mathcal{L}_\varepsilon}},0\right) - N_0(L,\alpha)\\ =\sum_{n=1}^{K} 2\left[\frac{\sqrt{L^2-\varepsilon^2\omega_{\mathcal{L}_\varepsilon}-n^2}}{\varepsilon}\right]\\ -\sum_{n=1}^{K}\left(\left[\frac{\sqrt{L^2-(n+\alpha)^2}}{\varepsilon}\right]+\left[\frac{\sqrt{L^2-(n-\alpha)^2}}{\varepsilon}\right]\right)\\ +\left[\frac{\sqrt{L^2-\varepsilon^2\omega_{\mathcal{L}_\varepsilon}}}{\varepsilon}\right]-\left[\frac{\sqrt{L^2-\alpha^2}}{\varepsilon}\right] \geqslant \frac{S_2(L)}{\varepsilon}-2K-1,\end{aligned} \tag{5.17}$$

где

$$\begin{aligned}S_2(L) &:= \sum_{n=0}^{K-1} f_2(n,L) + F_1(L,0,\varepsilon^2\omega_{\mathcal{L}_\varepsilon}) - F_2(L,0,\alpha),\\ f_2(x,L) &:= F_0(L,x+1,\alpha,\varepsilon^2\omega_{\mathcal{L}_\varepsilon}).\end{aligned}$$

Аналогично (5.11) получаем:

$$\begin{aligned}S_2(L) \geqslant f_2(0,L) + F_1(L,0,\varepsilon^2\omega_{\mathcal{L}_\varepsilon}) - F_2(L,0,\alpha) + \int\limits_0^{K-1} f_2(x,L)\,dx,\\ f_2(0,L) + F_1(L,0,\varepsilon^2\omega_{\mathcal{L}_\varepsilon}) - F_2(L,0,\alpha) > 0.\end{aligned} \tag{5.18}$$

При $K=1$ интеграл в правой части последнего неравенства обращается в нуль и

$$S_2(1+\alpha) \geqslant \left(2\sqrt{(1+\alpha)^2-\frac{1}{4}-b_0}+\sqrt{(1+\alpha)^2-b_0}-\sqrt{1+2\alpha}-\sqrt{4\alpha}\right)\Bigg|_{\alpha=\frac{1}{4}} > 3\varepsilon_0. \tag{5.19}$$

При $K \geqslant 2$ в силу (5.8) и совершенно аналогично (5.13)

$$\int\limits_0^{K-1}\big(f_2(x,L) - F_0(L,x+1,\alpha,0)\big)\,dx \geqslant -\frac{\pi\varepsilon^2\omega_{\mathcal{L}_\varepsilon}}{4}. \tag{5.20}$$

Аналогично (5.14), (5.15) получаем:

$$\begin{aligned}\int\limits_0^{K-1} F_0(L,x+1,\alpha,0)\,dx \geqslant \int\limits_{1-\alpha}^{K-\alpha}\frac{(K+\alpha)^2+2\alpha x}{16\big((K+\alpha)^2-x^2\big)^{\frac{3}{2}}}\,dx = \frac{x+2\alpha}{16\sqrt{(K+a)^2-x^2}}\Bigg|_{1-\alpha}^{K-\alpha}\\ \geqslant \frac{1}{16}\left(\frac{K+\alpha}{2\sqrt{\alpha K}}-\frac{1+\alpha}{\sqrt{K^2+2\alpha K+2\alpha-1}}\right)\Bigg|_{\alpha=\frac{1}{2}}\\ =\frac{1}{16}\left(\frac{K+\frac{1}{2}}{\sqrt{2K}}-\frac{3}{2\sqrt{K^2+K}}\right) \geqslant \frac{9\sqrt{K}}{320}.\end{aligned}$$

Отсюда и из (5.17), (5.18), (5.19), (5.20) выводим:

$$\sup_{\tau} N_0(\sqrt{L^2-\varepsilon^2\omega_{\mathcal{L}_\varepsilon}},\tau) - \inf_{\tau} N_0(L,\tau) \geqslant \frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon} - 3 > 0$$

при $K=1$ и

$$\sup_{\tau} N_0(\sqrt{L^2-\varepsilon^2\omega_{\mathcal{L}_\varepsilon}},\tau) - \inf_{\tau} N_0(L,\tau) \geqslant \frac{9\sqrt{K}}{320\varepsilon} - 2K - \frac{\pi\varepsilon\omega_{\mathcal{L}_\varepsilon}}{4} - 1 \tag{5.21}$$

при $K\geqslant 2$.

5.6. Общий случай: $\frac{1}{2}\leqslant\alpha<\frac{3}{4}$. Здесь

$$\begin{aligned}
&\sup_\tau N_0(\sqrt{L^2-\varepsilon^2\omega_{\mathcal{L}_\varepsilon}},\tau)-\inf_\tau N_0(L,\tau)\geqslant N_0\left(\sqrt{L^2-\varepsilon^2\omega_{\mathcal{L}_\varepsilon}},0\right)-N_0(L,1-\alpha)\\
&\quad=\sum_{n=1}^{K}2\left[\frac{\sqrt{L^2-\varepsilon^2\omega_{\mathcal{L}_\varepsilon}-n^2}}{\varepsilon}\right]\\
&\qquad-\sum_{n=1}^{K}\left(\left[\frac{\sqrt{L^2-(n+1-\alpha)^2}}{\varepsilon}\right]+\left[\frac{\sqrt{L^2-(n-1+\alpha)^2}}{\varepsilon}\right]\right)\\
&\qquad+\left[\frac{\sqrt{L^2-\varepsilon^2\omega_{\mathcal{L}_\varepsilon}}}{\varepsilon}\right]-\left[\frac{\sqrt{L^2-(1-\alpha)^2}}{\varepsilon}\right]\geqslant\frac{S_3(L)}{\varepsilon}-2K-1,
\end{aligned}\tag{5.22}$$

где

$$\begin{aligned}
&S_3(L):=\sum_{n=0}^{K-1}f_3(n,L)+F_1(L,0,\varepsilon^2\omega_{\mathcal{L}_\varepsilon})-F_2(L,0,1-\alpha),\\
&f_3(x,L):=F_0(L,x+1,1-\alpha,\varepsilon^2\omega_{\mathcal{L}_\varepsilon})
\end{aligned}$$

При $K=1$ аналогично (5.19) имеем:

$$\begin{aligned}
S_3(1+\alpha)\geqslant&\Big(2\sqrt{(1+\alpha)^2-1-b_0}+\sqrt{(1+\alpha)^2-b_0}\\
&-\sqrt{1+2\alpha}-\sqrt{4\alpha}-\sqrt{6\alpha-3}\Big)\Big|_{\alpha=\frac{3}{4}}>\quad 3\varepsilon_0.
\end{aligned}$$

При $K\geqslant 2$ аналогично (5.13), (5.14) получаем:

$$\int_0^{K-1}\big(f_3(x,L)-F_0(L,x+1,1-\alpha,0)\big)\,dx\geqslant-\frac{\pi\varepsilon^2\omega_{\mathcal{L}_\varepsilon}}{4}$$

и

$$\begin{aligned}
\int_0^{K-1}F_0(L,x+1,1-\alpha,0)\,dx\geqslant&\frac{1}{16}\left(\frac{K+1-\alpha}{\sqrt{2(K+\alpha)-1}}-\frac{2-\alpha}{\sqrt{K^2+2\alpha K}}\right)\\
\geqslant&\frac{\sqrt{K+\frac{1}{4}}}{16\sqrt{2}}-\frac{5}{32\sqrt{4K^2+6K}}\geqslant\sqrt{2}A_0\sqrt{K}.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\sup_\tau N_0(\sqrt{L^2-\varepsilon^2\omega_{\mathcal{L}_\varepsilon}},\tau)-\inf_\tau N_0(L,\tau)\geqslant\frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon}-3>0$$

при $K=1$ и

$$\sup_\tau N_0(\sqrt{L^2-\varepsilon^2\omega_{\mathcal{L}_\varepsilon}},\tau)-\inf_\tau N_0(L,\tau)\geqslant\frac{2A_0\sqrt{K}}{\varepsilon}-2K-\frac{\pi\varepsilon\omega_{\mathcal{L}_\varepsilon}}{4}-1\tag{5.23}$$

при $K\geqslant 2$.

5.7. Общий случай: $\frac{3}{4} < \alpha < 1$**.** В этом случае первая оценка аналогична (5.9), (5.10):

$$\begin{aligned}\sup_\tau N_0(\sqrt{L^2-\varepsilon^2\omega_{\mathcal{L}_\varepsilon}},\tau)-\inf_\tau N_0(L,\tau)\geqslant N_0\left(\sqrt{L^2-\varepsilon^2\omega_{\mathcal{L}_\varepsilon}},\frac{1}{2}\right)-N_0(L,1-\alpha)\\ =\sum_{n=0}^{K}2\left[\frac{\sqrt{L^2-\varepsilon^2\omega_{\mathcal{L}_\varepsilon}-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}}{\varepsilon}\right]\\ -\sum_{n=0}^{K}\left(\left[\frac{\sqrt{L^2-(n+\alpha)^2}}{\varepsilon}\right]+\left[\frac{\sqrt{L^2-(n+1-\alpha)^2}}{\varepsilon}\right]\right)\\ \geqslant\frac{S_4(L)}{\varepsilon}-2K-2,\end{aligned}\tag{5.24}$$

где

$$S_4(L):=\sum_{n=0}^{K}f_4(n,L),\quad f_4(x,L):=F_0\left(L,x+\frac{1}{2},\alpha-\frac{1}{2},\varepsilon^2\omega_{\mathcal{L}_\varepsilon}\right).$$

Аналог неравенства (5.11) здесь выглядит следующим образом:

$$S_4(L)\geqslant f_4(0,L)+\int_0^K f_4(x,L)\,dx\tag{5.25}$$

и потому нет необходимости отдельно рассматривать случай $K=1$. Аналогично (5.13) оцениваем:

$$\int_0^K\left(f_4(x,L)-F_0\left(L,x+\frac{1}{2},\alpha-\frac{1}{2},0\right)\right)dx\geqslant-\frac{\pi\varepsilon^2\omega_{\mathcal{L}_\varepsilon}}{4}$$

и аналогично (5.14) интегрируем:

$$\begin{aligned}&\int_0^K F_0\left(L,x+\frac{1}{2},\frac{1}{2}-\alpha,0\right)dx\geqslant\int_{1-\alpha}^{K+1-\alpha}\frac{L^2+(2\alpha-1)x}{16\big((K+\alpha)^2-x\big)^{\frac{3}{2}}}\,dx=\frac{x+(2\alpha-1)}{16\sqrt{(K+a)^2-x^2}}\bigg|_{1-\alpha}^{K+1-\alpha}\\ &\geqslant\frac{1}{16}\left(\frac{K+\alpha}{\sqrt{2\alpha-1}\sqrt{2K+1}}-\frac{\alpha}{\sqrt{K^2+2\alpha K+2\alpha-1}}\right)\bigg|_{\alpha=1}>\frac{11\sqrt{K}}{250}.\end{aligned}$$

Поэтому в силу (5.24), (5.25)

$$\sup_\tau N_0(\sqrt{L^2-\varepsilon^2\omega_{\mathcal{L}_\varepsilon}},\tau)-\inf_\tau N_0(L,\tau)\geqslant\frac{\sqrt{K}}{25\varepsilon}-2K-\frac{\pi\varepsilon\omega_{\mathcal{L}_\varepsilon}}{4}-2\tag{5.26}$$

для $K\geqslant 1$. При $K=1$ последнее неравенство очевидно выполнено в силу условия (2.2).

5.8. Завершение доказательства. Сравним правые части неравенств (5.16), (5.21), (5.23), (5.26) при $K\geqslant 2$. Так как в силу (5.1)

$$\left(\frac{11}{250}-2A_0\right)\frac{\sqrt{K}}{\varepsilon}>1,$$

то минимальная из сравниваемых правых частей – это правая часть неравенства (5.23). Поэтому правые части неравенств (5.16), (5.21), (5.23), (5.26) будут положительны при $K\geqslant 2$, если

$$\frac{2A_0\sqrt{K}}{\varepsilon}-2K-\frac{\pi\varepsilon\omega_{\mathcal{L}_\varepsilon}}{4}-1\geqslant 0.$$

При $K=2$ данное неравенство выполнено в силу условия (2.2). Решая затем его при относительно K, получаем, что оно выполнено при $\sqrt{K}\leqslant K_\varepsilon$. Тем самым для таких значений K_ε выполнено неравенство (4.5), что с учётом замкнутости спектра завершает доказательство теоремы.

6. Некоторые особенности доказательства

В настоящем параграфе мы обсуждаем определенные особенности доказательства основного результата, приведённого выше.

В оценках (5.9), (5.17), (5.22), (5.24) на первом шаге требуемая разность

$$\sup_\tau N_0(\sqrt{L^2-\varepsilon^2\omega_{\mathcal{L}_\varepsilon}},\tau)-\inf_\tau N_0(L,\tau)$$

оценивается разностью значений функций

$$N_0(\sqrt{L^2-\varepsilon^2\omega_{\mathcal{L}_\varepsilon}},\tau_1)-N_0(L,\tau_2)$$

в определенных точках τ_1, τ_2. Ясно, что выбор этих точек произволен. Чтобы добиться наилучшего результата, точку τ_1 для функции $N_0(\sqrt{L^2-\varepsilon^2\omega_{\mathcal{L}_\varepsilon}},\tau)$ следует выбирать так, чтобы её значение в этой точке было как можно ближе к максимальному. Для функции $N_0(L,\tau)$ выбор точки τ_2 нужно осуществлять так, чтобы минимизировать это значение. Вопрос о точном нахождении точек глобальных минимума и максимума для функции N_0 является весьма сложным. Вместе с тем предварительно проведённые многочисленные численные эксперименты показали, что значение функции $N_0(L,\tau)$ весьма близко к максимальному при $\tau=0$ либо при $\tau=\frac{1}{2}$, причём конкретный выбор зависит от дробной части α числа L. Если дробная часть $\alpha<\alpha_0\approx\frac{1}{10}$ либо $\alpha>\alpha_0+\frac{1}{2}$, то следует выбирать $\tau=\frac{1}{2}$, а при $\alpha_0<\alpha<\alpha_0+\frac{1}{2}$ следует выбирать $\tau=0$. Полученные таким образом значения функции $N_0(L,\tau)$ мало отличаются от максимальных. В работе мы несколько ухудшаем данное наблюдение, фактически заменяя α_0 на $\frac{1}{4}$. Аналогичные приближения для минимума функции $N_0(L,\tau)$ вновь получаются при подходящем выборе числа τ_2 в зависимости от дробной части числа L. А именно, здесь τ_2 следует выбирать равным расстоянию от α до ближайшего целого: $\tau_2=\min\{\alpha,1-\alpha\}$. Значения функции $N_0(L,\tau)$ в таких точках мало отличаются от минимальных. Во всех известных нам предыдущих работах, посвящённых доказательству гипотезы Бете-Зоммерфельда аналогичная разность

$$\sup_\tau N_0(\sqrt{L^2-\varepsilon^2\omega_{\mathcal{L}_\varepsilon}},\tau)-\inf_\tau N_0(L,\tau)$$

оценивалась различными иными методами, позволявшими обойти вопрос о положении точек экстремума считающих функций. Поэтому представленное в настоящей работе доказательство предлагает способ примерного нахождения точек экстремума для считающих функций. Одновременно следует подчеркнуть, что предлагаемый выбор чисел τ_1, τ_2 не обязательно даёт точные значения экстремумов функции N_0. В частности, при $L=39.623$, $\varepsilon=0.0035$ выполнено

$$N_0(L,0)=704646,\quad N_0(L,0.499088)=704816,\quad N_0(L,0.5)=704808,$$

а при $L=39.635$, $\varepsilon=0.0035$ имеем:

$$N_0(L,0.365)=704704,\quad N_0(L,0.3636)=704701.$$

Отметим ещё, что в оценках (5.9), (5.17), (5.22), (5.24) мы оцениваем целые части различных величин следующим образом: $[z]\geqslant z-1$. Разумеется, это весьма грубо и величина $-2K$ в неравенствах (5.9), (5.17), (5.22), (5.24) возникает именно из-за такой грубой оценки. Попытки применить известные нам подходящие методы теории чисел из [20] не привели к более тонким оценкам, которые существенно изменили бы величину K_ε.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Скриганов М.М., Соболев А.В. *Асимптотические оценки для спектральных зон периодических операторов Шрёдингера* // Алг. ан. **17**:1, 276–288 (2005).
2. L. Parnovski. *Bethe-Sommerfeld conjecture* // Ann. H. Poincaré. **9**:3, 457–508 (2008).
3. B.E.J. Dahlberg, E. Trubowitz. *A remark on two dimensional periodic potentials* // Comment. Math. Helvetici. **57**:1, 130–134 (1982).
4. B. Helffer, A. Mohamed. *Asymptotics of the density of states for the Schrödinger operator with periodic electric potential* // Duke Math. J. **92**:1, 1–60 (1998).
5. M.M. Skriganov, A.V. Sobolev A. V. *Variation of the number of lattice points in large balls* // Acta Arithm. **120**:3, 245–267 (2005).
6. Скриганов М.М. *Геометрические и арифметические методы в спектральной теории многомерных периодических операторов* // Тр. МИАН СССР. **171**, 3–122 (1985).
7. Y. Karpeshina. *Spectral properties of the periodic magnetic Schrödinger operator in the high-energy region. Two-dimensional case* // Comm. Math. Phys. **251**:3, 473–514 (2004).
8. A. Mohamed. *Asymptotic of the density of states for the Schrödinger operator with periodic electromagnetic potential* // J. Math. Phys. **38**:8, 4023–4051 (1997).
9. L. Parnovski, A. Sobolev. *On the Bethe-Sommerfeld conjecture for the polyharmonic operator* // Duke Math. J. **107**:2, 209–238 (2001).
10. G. Barbatis, L. Parnovski. *Bethe-Sommerfeld conjecture for pseudo-differential perturbation* // Comm. Part. Diff. Equat. **34**:4, 383–418 (2009).
11. L. Parnovski, A.V. Sobolev. *Bethe-Sommerfeld conjecture for periodic operators with strong perturbations* // Invent. Math. **181**:3, 467–540 (2010).
12. Суслина Т.А. *Об усреднении периодического эллиптического оператора в полосе* // Алг. ан. **16**:1, 269–292 (2004).
13. Сеник Н.Н. *Усреднение периодического эллиптического оператора в полосе при различных граничных условиях* // Алг. ан. **25**:4, 182–259 (2013).
14. D. Borisov, G. Cardone, T. Durante. *Homogenization and uniform resolvent convergence for elliptic operators in a strip perforated along a curve* // Proc. Royal Soc. Edin. Sec. A Math. **146**:6, 1115–1158 (2016).
15. D. Borisov, G. Cardone, L. Faella, C. Perugia. *Uniform resolvent convergence for a strip with fast oscillating boundary* // J. Diff. Equat. **255**:12, 4378–4402 (2013).
16. D. Borisov, R. Bunoiu, G. Cardone. *Waveguide with non-periodically alternating Dirichlet and Robin conditions: homogenization and asymptotics* // Zeit. Angew. Math. Phys. **64**:3, 439–472 (2013).
17. D. Borisov, R. Bunoiu, G. Cardone. *On a waveguide with frequently alternating boundary conditions: homogenized Neumann condition* // Ann. H. Poincaré. **11**:8, 1591–1627 (2010).
18. D. Borisov, and G. Cardone. *Homogenization of the planar waveguide with frequently alternating boundary conditions* // J. Phys. A. Math. Gen. **42**:36, id 365205 (2009).
19. C.B.E. Beeken. *Periodic Schrödinger operators in dimension two: constant magnetic fields and boundary value problems.* PhD thesis, University of Sussex, Brighton (2002).
20. E. Krätzel. *Lattice Points.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1988).

Денис Иванович Борисов,
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия

Башкирский государственный
педагогический университет им. М. Акмуллы,
ул. Октябрьской революции, 3а,
450000, г. Уфа, Россия

University of Hradec Králové,
Rokitanskeho, 62
50003, Hradec Králové, Czech Republic
E-mail: `BorisovDI@yandex.ru`