

О ХАРАКТЕРИСТИКАХ РОСТА ОПЕРАТОРНОЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ

С.Н. МИШИН

Аннотация. В работе обобщаются теорема Лиувилля и понятия порядка и типа роста целой функции на случай операторнозначных функций со значением в пространстве $\text{Lec}(\mathbf{H}_1, \mathbf{H})$ всех линейных непрерывных операторов, действующих из локально выпуклого пространства \mathbf{H}_1 в локально выпуклое пространство \mathbf{H} , наделенном равностепенно непрерывной борнологией. Найдены формулы, выражающие порядок и тип операторнозначной функции через характеристики последовательности коэффициентов. Установлены некоторые свойства порядка и типа операторнозначной функции.

Ключевые слова: локально выпуклое пространство, порядок и тип последовательности операторов, порядок и тип целой функции, равностепенно непрерывная борнология, борнологическая сходимости, операторнозначная функция.

ВВЕДЕНИЕ

Известно [3, 4], что если целая скалярная функция $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ не многочлен, то ее максимум модуля $M_f(r) = \max_{|z| \leq r} |f(z)|$ растет быстрее любой положительной степени r при $r \rightarrow \infty$ (теорема Лиувилля). Для оценки роста таких функций обычно используются характеристики (порядок и тип):

$$\rho = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln M_f(r)}{\ln r}, \quad \sigma = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln M_f(r)}{r^\rho}. \quad (1)$$

При этом известны формулы, выражающие эти характеристики через коэффициенты:

$$\rho = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln n}{- \ln |a_n|}, \quad (\rho \sigma)^\frac{1}{\rho} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n^\frac{1}{\rho} \sqrt[\rho]{|a_n|}. \quad (2)$$

Данная работа посвящена обобщению этих формул и теоремы Лиувилля на случай целой операторнозначной функции $F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n t^n$ со значениями в пространстве $\text{Lec}(\mathbf{H}_1, \mathbf{H})$ всех линейных непрерывных операторов, действующих из локально выпуклого пространства \mathbf{H}_1 в локально выпуклое пространство \mathbf{H} . Пространства \mathbf{H}_1 и \mathbf{H} , вообще говоря, ненормируемы.

1. ЦЕЛЫЕ ОПЕРАТОРНОЗНАЧНЫЕ ФУНКЦИИ И АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ ЛИУВИЛЛЯ

\mathbf{H}_1 и \mathbf{H} — отделимые локально выпуклые пространства над полем комплексных чисел с топологиями, задаваемыми соответственно мультинормами $\{\|\cdot\|'_q\}$, $q \in \mathcal{Q}$ и $\{\|\cdot\|_p\}$, $p \in \mathcal{P}$. Без ограничения общности можно считать мультинормы в \mathbf{H}_1 и \mathbf{H} мажорантными [2]. Обозначим $\mathcal{A} = \{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ — последовательность линейных непрерывных операторов, действующих из локально выпуклого пространства \mathbf{H}_1 в локально выпуклое пространство \mathbf{H} .

S.N. MISHIN, ON GROWTH CHARACTERISTICS OF OPERATOR-VALUED FUNCTIONS.

© Мишин С.Н. 2013.

Поступила 16 августа 2012 г.

Последовательность \mathcal{A} называется имеющей порядок [1, 5], если найдется последовательность положительных чисел $\{c_n\}_{n=0}^\infty$, такая что

$$\forall p \in \mathcal{P} \exists C_p > 0 \exists q(p) \in \mathcal{Q} \forall x \in \mathbf{H}_1 \forall n \in \mathbb{N} : \|c_n A_n(x)\|_p \leq C_p \|x\|'_q, \quad (3)$$

то есть семейство операторов $\{c_n A_n\}$ будет равномерно непрерывным.

Пусть

$$\theta_{\mathcal{A}}(p, q, n) = \sup_{\|x\|'_q \neq 0} \left\{ \frac{\|A_n(x)\|_p}{\|x\|'_q} \right\}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

(случай $\theta_{\mathcal{A}}(p, q, n) = +\infty$ не исключается). Обозначим

$$\beta_{p,q}(\mathcal{A}) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \theta_{\mathcal{A}}(p, q, n)}{n \ln n}.$$

Определение 1. Число $\beta_p(\mathcal{A}) = \inf_{q \in \mathcal{Q}} \beta_{p,q}(\mathcal{A})$, ($p \in \mathcal{P}$) называется p -порядком последовательности операторов \mathcal{A} , а число $\beta(\mathcal{A}) = \sup_{p \in \mathcal{P}} \{\beta_p(\mathcal{A})\}$ — ее порядком.

Если $\beta(\mathcal{A}) = \pm\infty$ и при этом последовательность \mathcal{A} имеет порядок, то она называется последовательностью бесконечного порядка.

Замечание. Отметим, что между последовательностями, имеющими порядок $\beta(\mathcal{A}) = +\infty$, и последовательностями, не имеющими порядка (несмотря на то, что для них формально также $\beta(\mathcal{A}) = +\infty$), есть существенное отличие. Если $\beta(\mathcal{A}) = +\infty$, но при этом последовательность $\mathcal{A} = \{A_n\}$ имеет порядок, то для нее можно подобрать последовательность положительных чисел $\{c_n\}$, такую что будет выполнено условие (3). Для последовательностей, не имеющих порядка, такой последовательности подобрать нельзя.

Если последовательность операторов \mathcal{A} имеет p -порядок $\beta_p(\mathcal{A}) \neq \pm\infty$, то для нее вводится более тонкая характеристика. Обозначим

$$\alpha_{p,q}(\mathcal{A}) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n^{-\beta_p(\mathcal{A})} \sqrt[n]{\theta_{\mathcal{A}}(p, q, n)}.$$

Определение 2. Число $\alpha_p(\mathcal{A}) = \inf_{q \in \mathcal{Q}} \alpha_{p,q}(\mathcal{A})$, ($p \in \mathcal{P}$) называется p -типом последовательности операторов \mathcal{A} при p -порядке $\beta_p(\mathcal{A})$.

Очевидно $\beta_p(\mathcal{A}) \leq \beta(\mathcal{A})$, $\forall p$. Можно показать [7], что случай, когда равенство $\beta_p(\mathcal{A}) = \beta(\mathcal{A})$ справедливо не для всех p , а лишь для некоторых, сводится к случаю, когда $\beta_p(\mathcal{A}) = \beta(\mathcal{A})$, $\forall p$ заменой мультиномы на эквивалентную. Эта замена не изменяет ни порядка, ни типа последовательности операторов. Поэтому (не ограничивая общности) будем рассматривать два случая: либо $\beta_p(\mathcal{A}) = \beta(\mathcal{A})$, $\forall p$, либо $\beta_p(\mathcal{A}) < \beta(\mathcal{A})$, $\forall p$.

Определение 3. Пусть последовательность операторов \mathcal{A} имеет p -порядки $\beta_p(\mathcal{A})$ и порядок $\beta(\mathcal{A}) \neq \pm\infty$. Число

$$\alpha(\mathcal{A}) = \begin{cases} \sup_{p \in \mathcal{P}} \{\alpha_p(\mathcal{A})\} & , \beta_p(\mathcal{A}) = \beta(\mathcal{A}), \forall p \\ 0 & , \beta_p(\mathcal{A}) < \beta(\mathcal{A}), \forall p \end{cases}$$

называется типом последовательности операторов \mathcal{A} при порядке $\beta(\mathcal{A})$.

Последовательность операторов \mathcal{A} называется принадлежащей классу $\mathfrak{L}_{\mathbf{H}_1, \mathbf{H}}[b, a]$, (см. [1, 5]) если ее порядок меньше b , либо равен b , но тогда тип не превосходит a .

Пусть \mathbf{H} — полное пространство. Известно [8], что в этом случае пространство $\text{Лес}(\mathbf{H}_1, \mathbf{H})$ всех линейных непрерывных операторов, действующих из \mathbf{H}_1 в \mathbf{H} , наделенное равномерно непрерывной борнологией, является полным борнологическим векторным выпуклым пространством.

Определение 4. Операторнозначная функция $F : \mathbb{C} \rightarrow \text{Lec}(\mathbf{H}_1, \mathbf{H})$ называется дифференцируемой в точке $t_0 \in \mathbb{C}$, если существует предел (по борнологии пространства $\text{Lec}(\mathbf{H}_1, \mathbf{H})$)

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0}. \quad (4)$$

Этот предел называется производной операторнозначной функции F в точке t_0 и обозначается $F'(t_0)$.

Определение 5. Операторнозначная функция $F : \mathbb{C} \rightarrow \text{Lec}(\mathbf{H}_1, \mathbf{H})$ называется целой, если она определена и дифференцируема в каждой точке $t \in \mathbb{C}$.

Целая операторнозначная функция, очевидно, непрерывна всюду (по борнологии пространства $\text{Lec}(\mathbf{H}_1, \mathbf{H})$).

Пусть

$$\theta_F(p, q, t) = \sup_{\|x\|_q' \neq 0} \left\{ \frac{\|F(t)(x)\|_p}{\|x\|_q'} \right\}, \quad t \in \mathbb{C}$$

(случай $\theta_F(p, q, t) = +\infty$ не исключается).

Теорема 1. Целая операторнозначная функция $F(t)$ ограничена на любом замкнутом круге, то есть семейство операторов $\{F(t)\}_{|t| \leq r}$ равностепенно непрерывно для всякого $r > 0$.

Доказательство.

□ Зафиксируем произвольное $r > 0$. Предположим, что функция $F(t)$ целая, а семейство $\{F(t)\}_{|t| \leq r}$ не является равностепенно непрерывным, то есть найдется $p_0 \in \mathcal{P}$, такое что для всякого $C > 0$ и для всякого $q \in \mathcal{Q}$ найдется $t_C = t_C(q)$, такое что $|t_C| \leq r$ и $\theta_F(p_0, q, t_C) > C$. Зафиксируем произвольное $q \in \mathcal{Q}$ и возьмем $C = n$, $n \in \mathbb{N}$. Получим последовательность комплексных чисел $t_n = t_n(q)$, целиком лежащую в круге $|t| \leq r$. При этом

$$\theta_F(p_0, q, t_n) > n, \quad \forall n. \quad (5)$$

В силу ограниченности последовательности $\{t_n\}$ найдется сходящаяся подпоследовательность $\{t_{n_k}\}$. Из (5) следует $\theta_F(p_0, q, t_{n_k}) > n_k$, $\forall k$, то есть последовательность $\{F(t_{n_k})\}$ не является равностепенно непрерывной, а следовательно расходится. Но в силу непрерывности функции F , она должна сходиться. Получаем противоречие. ■

Если функция $F(t)$ целая, то для всякого фиксированного $x \in \mathbf{H}_1$, $F(t)(x)$ — целая вектор-функция со значениями в \mathbf{H} . Такая функция представляется степенным рядом [9]

$$F(t)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n t^n, \quad x \in \mathbf{H}_1, \quad \{x_n\} \subset \mathbf{H}$$

(для каждого x последовательность $\{x_n\}$ своя). Положим по определению

$$M_F(p, q, r) = \sup_{|t| \leq r} \theta_F(p, q, t).$$

Определим последовательность операторов $A_n : \mathbf{H}_1 \rightarrow \mathbf{H}$ следующим образом: $A_n(x) = x_n$, $\forall x \in \mathbf{H}_1$. Получим разложение функции $F(t)$ в степенной ряд:

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n t^n. \quad (6)$$

При этом ряд (6) сходится всюду к функции $F(t)$ поточечно (при любом фиксированном $x \in \mathbf{H}_1$ ряд $\sum_{n=0}^{\infty} A_n(x) t^n$ сходится всюду к функции $F(t)(x)$). Покажем, что $\{A_n\} \subset \text{Lec}(\mathbf{H}_1, \mathbf{H})$ и ряд (6) сходится всюду по борнологии к функции $F(t)$. Для начала докажем следующую теорему.

Теорема 2 (аналог неравенства Коши). *Справедливо неравенство*

$$\theta_{\mathcal{A}}(p, q, n) \leq \frac{M_F(p, q, r)}{r^n}, \quad \forall p \forall q \forall n \forall r > 0. \quad (7)$$

Доказательство.

□ Пусть $p \in \mathcal{P}$, $q \in \mathcal{Q}$, $r > 0$. Если $M_F(p, q, r) = \infty$, то неравенство (7) выполнено. Пусть $M_F(p, q, r) < \infty$. Так как при любом фиксированном x вектор-функция $F(t)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x)t^n$ целая, то (см., например, [9])

$$A_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=r} \frac{F(\xi)(x)d\xi}{\xi^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Отсюда $\forall p \in \mathcal{P} \forall x \in \mathbf{H}_1 \forall r > 0 \forall n \in \mathbb{N}$ имеем

$$\|A_n(x)\|_p \leq \frac{\sup_{|\xi| \leq r} \|F(\xi)(x)\|_p}{r^n} \leq \frac{\sup_{|\xi| \leq r} \theta_F(p, q, \xi)}{r^n} \|x\|'_q = \frac{M_F(p, q, r)}{r^n} \|x\|'_q,$$

что влечет неравенство (7). ■

Так как функция $F(t)$ целая, то по теореме 1 для всякого $r > 0$ семейство $\{F(t)\}_{|t| \leq r}$ равномерно непрерывно, то есть

$$\forall p \in \mathcal{P} \exists C_p > 0 \exists q_p \in \mathcal{Q} \forall x \in \mathbf{H}_1 \forall t \leq r \Rightarrow \|F(t)(x)\|_p \leq C_p \|x\|'_{q_p}.$$

Для каждого p выберем $q_0 = q_0(p)$ такое, что $\|x\|'_{q_0} \geq \|x\|'_{q_p}$, $\forall x \in \mathbf{H}_1$ (это всегда можно сделать, так как мультинорма мажорантная). Тогда

$$\theta_F(p, q_0, t) = \sup_{\|x\|'_{q_0} \neq 0} \left\{ \frac{\|F(t)(x)\|_p}{\|x\|'_{q_0}} \right\} \leq \sup_{\|x\|'_{q_0} \neq 0} \left\{ \frac{C_p \|x\|'_{q_p}}{\|x\|'_{q_0}} \right\} = \tilde{C}_p(q_0), \quad |t| \leq r.$$

Таким образом, для всякого $r > 0$ и для всякого $p \in \mathcal{P}$ найдется $q_0 \in \mathcal{Q}$, такое что $\theta_F(p, q_0, t)$ (как функции t) ограничены в круге $|t| \leq r$. А это значит, что

$$\forall r \forall p \exists q_0(p, r) : M_F(p, q_0, r) < \infty.$$

То есть по теореме 2

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\theta_{\mathcal{A}}(p, q_0, n)} \leq \frac{1}{r}, \quad r > 0. \quad (8)$$

Из (8) следуют либо $\beta_p(\mathcal{A}) < 0$, либо $\beta_p(\mathcal{A}) = 0$, но тогда в силу произвольности r

$$\alpha_p(\mathcal{A}) = \inf_{q \in \mathcal{Q}} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\theta_{\mathcal{A}}(p, q, n)} = 0.$$

Таким образом, последовательность $\{A_n\}$ принадлежит классу $\mathfrak{L}_{\mathbf{H}_1, \mathbf{H}}[0, 0]$ и, следовательно, ряд (6) сходится всюду по борнологии к функции $F(t)$ (см. [1, 5]).

Теорема 3 (аналог теоремы Лиувилля). *Пусть функция (6) целая и удовлетворяет условию:*

$$\exists k \forall p \exists K_p > 0 \exists q(p) \forall r > 0 : M_F(p, q, r) \leq K_p r^k. \quad (9)$$

Тогда F — операторнозначный многочлен, степень которого не превышает k , то есть

$$F(t) = \sum_{n=0}^{[k]} A_n t^n.$$

Доказательство.

□ Из неравенств (7), (9) и определения чисел $\theta_{\mathcal{A}}(p, q, n)$ имеем:

$$\|A_n(x)\|_p \leq \theta_{\mathcal{A}}(p, q, n) \|x\|'_q \leq K_p r^{k-n} \|x\|'_q, \quad \forall p \forall x \in \mathbf{H}_1 \forall r > 0 \forall n, \quad q = q(p).$$

В силу произвольности r ,

$$\|A_n(x)\|_p = 0, \quad \forall n > k \quad \forall p \quad \forall x \in \mathbf{H}_1,$$

следовательно, $A_n = 0, \quad \forall n > k$. ■

Теорема 3 показывает, что если F — целая трансцендентная функция, то величины $M_F(p, q, r)$ растут при $r \rightarrow \infty$ быстрее любой положительной степени.

2. ХАРАКТЕРИСТИКИ РОСТА ЦЕЛОЙ ОПЕРАТОРНОЗНАЧНОЙ ФУНКЦИИ И ФОРМУЛЫ ИХ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Определение 6. Пусть $F : \mathbb{C} \rightarrow \text{Lec}(\mathbf{H}_1, \mathbf{H})$ — целая трансцендентная функция. Число $\rho_p(F) = \inf_{q \in \mathbb{Q}} \rho_{p,q}(F)$, где

$$\rho_{p,q}(F) = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln M_F(p, q, r)}{\ln r}$$

назовем p -порядком функции F , а число $\rho(F) = \sup_{p \in \mathcal{P}} \{\rho_p(F)\}$ — ее порядком.

Если $0 < \rho_p(F) < \infty$, то число $\sigma_p(F) = \inf_{q \in \mathbb{Q}} \sigma_{p,q}(F)$, где

$$\sigma_{p,q}(F) = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln M_F(p, q, r)}{r^{\rho_p(F)}},$$

назовем p -типом функции f при p -порядке $\rho(F)$.

Можно показать, что случай, когда для одних $p, \rho_p(F) < \rho(F)$, а для других $\rho_p(F) = \rho(F)$, сводится к случаю $\rho_p(F) = \rho(F), \quad \forall p$ заменой мультиномы на эквивалентную. Поэтому (не ограничивая общности) будем рассматривать два случая: либо $\rho_p(F) < \rho(F), \quad \forall p$, либо $\rho_p(F) = \rho(F), \quad \forall p$.

Определение 7. Пусть функция $F(t)$ имеет p -порядки $\rho_p(F)$ и порядок $0 < \rho(F) < \infty$. Число

$$\sigma(F) = \begin{cases} 0 & , \quad \rho_p(F) < \rho(F), \quad \forall p \\ \sup_{p \in \mathcal{P}} \{\sigma_p(F)\} & , \quad \rho_p(F) = \rho(F), \quad \forall p \end{cases}$$

назовем типом функции f при порядке $\rho(F)$.

Лемма 1. Пусть

$$\forall p \quad \exists q_p \quad \exists a_p, b_p > 0 \quad \exists r_0(p) \quad \forall r > r_0 : M_F(p, q_p, r) < e^{a_p r^{b_p}}. \quad (10)$$

Тогда

$$\forall p \quad \exists n_0(p) \quad \forall n > n_0 : \sqrt[n]{\theta_{\mathcal{A}}(p, q_p, n)} < \left(\frac{a_p b_p e}{n} \right)^{\frac{1}{b_p}}. \quad (11)$$

Доказательство.

□ Пусть выполнено неравенство (10), тогда в силу (7) имеем

$$\theta_{\mathcal{A}}(p, q_p, n) < \frac{e^{a_p r^{b_p}}}{r^n}; \quad \forall p \quad \forall r > r_0(p) \quad \forall n. \quad (12)$$

Обозначим $\mu_p(r) = e^{a_p r^{b_p}} r^{-n}$. Очевидно,

$$\forall p : \mu_p(0) = \mu_p(+\infty) = +\infty.$$

Найдем $\min_{r>0} \{\mu_p(r)\}$.

$$\begin{aligned} \mu_p'(r) &= \mu_p(r) \ln' \mu_p(r) \\ \mu_p'(r) &= \mu_p(r) (a_p r^{b_p} - n \ln r)' \\ \mu_p'(r) &= \mu_p(r) \left(a_p b_p r^{b_p-1} - \frac{n}{r} \right) \end{aligned}$$

$\mu'_p(r) = 0$ при $r = r_1 = \left(\frac{n}{a_p b_p}\right)^{\frac{1}{b_p}}$. Подставляя r_1 в неравенство (12), получим (11). ■

Лемма 2. Пусть

$$\forall p \exists q_p \exists a_p, b_p > 0 \exists n_0(p) \forall n > n_0 : \sqrt[n]{\theta_{\mathcal{A}}(p, q_p, n)} < \left(\frac{a_p b_p e}{n}\right)^{\frac{1}{b_p}}. \quad (13)$$

Тогда

$$\forall p \forall \varepsilon > 0 \exists r_0(p, \varepsilon) \forall r > r_0 : M_F(p, q_p, r) < e^{(a_p + \varepsilon)r^{b_p}}. \quad (14)$$

Доказательство.

□ В силу условия (13) $\mathcal{A} \in \mathfrak{L}_{\mathbf{H}_1, \mathbf{H}}[0, 0]$, следовательно, F — целая операторнозначная функция. Зафиксируем произвольное p (тем самым зафиксируем зависящие от него q_p, a_p, b_p) и рассмотрим неравенство:

$$\theta_{\mathcal{A}}(p, q_p, n)r^n < \left(\left(\frac{a_p b_p e}{n}\right)^{\frac{1}{b_p}} r\right)^n.$$

Для достаточно больших n

$$\left(\frac{a_p b_p e}{n}\right)^{\frac{1}{b_p}} r < \frac{1}{2}. \quad (15)$$

Обозначим $N_p(r)$ — наименьшее из натуральных n , при которых выполняется неравенство (15).

Найдем зависимость $N_p(r)$ от r . Имеем:

$$2r \left(\frac{a_p b_p e}{n}\right)^{\frac{1}{b_p}} < 1, \text{ при } n > (2r)^{b_p} (a_p b_p e).$$

Следовательно, можно положить $N_p(r) = [(2r)^{b_p} (a_p b_p e)] + 1$.

Далее, для любых фиксированных $p \in \mathcal{P}$, $t \in \mathbb{C}$ и $x \in \mathbf{H}_1$ имеем:

$$\|F(t)(x)\|_p \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|A_n(x)\|_p |t|^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} \theta_{\mathcal{A}}(p, q_p, n) |t|^n \|x\|'_{q_p},$$

следовательно,

$$\theta_F(p, q_p, t) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \theta_{\mathcal{A}}(p, q_p, n) |t|^n,$$

то есть

$$\forall p \forall r > 0 : M_F(p, q_p, r) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \theta_{\mathcal{A}}(p, q_p, n) r^n = \sum_{n=0}^{N_p(r)-1} \theta_{\mathcal{A}}(p, q_p, n) r^n + \sum_{n=N_p(r)}^{\infty} \theta_{\mathcal{A}}(p, q_p, n) r^n.$$

Для $n \geq N_p(r)$ выполняется неравенство: $\theta_{\mathcal{A}}(p, q_p, n)r^n < \left(\frac{1}{2}\right)^n$, поэтому

$$\sum_{n=N_p(r)}^{\infty} \theta_{\mathcal{A}}(p, q_p, n)r^n < \sum_{n=N_p(r)}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n < \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2.$$

Так как при любых фиксированных p и r

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_{\mathcal{A}}(p, q_p, n)r^n = 0,$$

то последовательность $\{\theta_{\mathcal{A}}(p, q_p, n)r^n\}$ имеет максимальный член. Пусть

$$m_p(r) = \max_{n \geq 0} \{\theta_{\mathcal{A}}(p, q_p, n)r^n\},$$

тогда

$$\sum_{n=0}^{N_p(r)-1} \theta_{\mathcal{A}}(p, q_p, n) r^n \leq m_p(r) N_p(r).$$

Оценим $m_p(r)$. Пусть $\theta_{\mathcal{A}}(p, q_p, s) r^s$ — максимальный член. При неограниченном увеличении r номер s максимального члена также начнет неограниченно увеличиваться, то есть $s \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow \infty$. Если r — достаточно большое, то $s > n_0$, где n_0 — число из (13).

Поэтому

$$m_p(r) = \theta_{\mathcal{A}}(p, q_p, s) r^s < \left(\frac{a_p b_p e}{s} \right)^{\frac{s}{b_p}} r^s \leq \max_{\xi \geq 0} \left\{ \left(\frac{a_p b_p e}{\xi} \right)^{\frac{\xi}{b_p}} r^\xi \right\}.$$

Обозначим

$$\nu_p(\xi) = \left(\frac{a_p b_p e}{\xi} \right)^{\frac{\xi}{b_p}} r^\xi.$$

Очевидно,

$$\forall p : \nu_p(0) = 1, \nu_p(+\infty) = 0.$$

Найдем $\max_{\xi \geq 0} \{\nu_p(\xi)\}$. Имеем:

$$\nu_p'(\xi) = \nu_p(\xi) \left(\frac{\ln(a_p b_p e)}{b_p} - \frac{\ln \xi}{b_p} - \frac{1}{b_p} + \ln r \right).$$

$$\nu_p'(\xi) = 0 \text{ при } \xi = \xi_1 = (a_p b_p) r^{b_p}.$$

$$\nu_p(\xi_1) = e^{a_p r^{b_p}}.$$

Следовательно (при достаточно больших r), $m_p(r) < e^{a_p r^{b_p}}$.

Итак

$$M_F(p, q_p, r) \leq N_p(r) m_p(r) + 2 \leq ((2r)^{b_p} (a_p b_p e) + 1) e^{a_p r^{b_p}} + 2 < e^{(a_p + \varepsilon) r^{b_p}}.$$

■

Теорема 4. Характеристики роста функции (6) вычисляются по формулам

$$\rho_p(F) = -\frac{1}{\beta_p(\mathcal{A})}, \quad \forall p, \quad (16)$$

$$\sigma_p(F) = -\frac{\beta_p(\mathcal{A})}{e} (\alpha_p(\mathcal{A}))^{-\frac{1}{\beta_p(\mathcal{A})}}, \quad \forall p, \quad (17)$$

$$\rho(F) = -\frac{1}{\beta(\mathcal{A})}, \quad (18)$$

$$\sigma(F) = \begin{cases} 0 & , \quad \beta_p(\mathcal{A}) < \beta(\mathcal{A}), \quad \forall p \\ -\frac{\beta(\mathcal{A})}{e} (\alpha(\mathcal{A}))^{-\frac{1}{\beta(\mathcal{A})}} & , \quad \beta_p(\mathcal{A}) = \beta(\mathcal{A}), \quad \forall p. \end{cases} \quad (19)$$

Доказательство.

□ Зафиксируем произвольное p . Пусть p -порядок функции F равен $\rho_p(F)$. Тогда

$$\forall p \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists q_p(\varepsilon) \quad \exists r_0(p, \varepsilon) \quad \forall r > r_0 : M_F(p, q_p, r) \leq \exp \{r^{\rho_p(F) + \varepsilon}\}.$$

По лемме 1 ($b_p = \rho_p(F) + \varepsilon$, $a_p = 1$)

$$\sqrt[n]{\theta_{\mathcal{A}}(p, q_p, n)} < \left(\frac{(\rho_p(F) + \varepsilon) e}{n} \right)^{\frac{1}{\rho_p(F) + \varepsilon}}, \quad \forall n > n_0.$$

Отсюда последовательно находим:

$$\frac{1}{n} \ln \theta_{\mathcal{A}}(p, q_p, n) < \left(\frac{1}{\rho_p(F) + \varepsilon} \right) \ln \left((\rho_p(F) + \varepsilon) e \right) - \frac{\ln n}{\rho_p(F) + \varepsilon} = C_p(\varepsilon) - \frac{\ln n}{\rho_p(F) + \varepsilon},$$

$$\ln \theta_{\mathcal{A}}(p, q_p, n) < C_p(\varepsilon)n - \frac{n \ln n}{\rho_p(F) + \varepsilon},$$

$$\ln \frac{1}{\theta_{\mathcal{A}}(p, q_p, n)} > \frac{n \ln n}{\rho_p(F) + \varepsilon} - C_p(\varepsilon)n = n \ln n \left(\frac{1}{\rho_p(F) + \varepsilon} - \frac{C_p(\varepsilon)}{\ln n} \right), \quad \forall n > n_0. \quad (20)$$

При $n \rightarrow \infty$ выражение в скобках в (20) стремится к $\frac{1}{\rho_p(F) + \varepsilon}$, поэтому при больших n

$$\ln \frac{1}{\theta_{\mathcal{A}}(p, q_p, n)} > \frac{n \ln n}{\rho_p(F) + 2\varepsilon},$$

то есть

$$\rho_p(F) + 2\varepsilon > \frac{n \ln n}{-\ln \theta_{\mathcal{A}}(p, q_p, n)}.$$

В силу произвольности ε ,

$$-\frac{1}{\beta_{p, q_p}(\mathcal{A})} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln n}{-\ln \theta_{\mathcal{A}}(p, q_p, n)} \leq \rho_p(F).$$

Так как $\beta_p(\mathcal{A}) = \inf_q \{\beta_{p, q}(\mathcal{A})\}$, то

$$-\frac{1}{\beta_p(\mathcal{A})} \leq -\frac{1}{\beta_{p, q_p}(\mathcal{A})} \leq \rho_p(F).$$

Таким образом, $\rho_p(F) \geq -\frac{1}{\beta_p(\mathcal{A})}$, $\forall p$.

Обратно, поскольку

$$-\frac{1}{\beta_{p, q}(\mathcal{A})} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln n}{-\ln \theta_{\mathcal{A}}(p, q, n)},$$

то

$$\frac{n \ln n}{-\ln \theta_{\mathcal{A}}(p, q, n)} < -\frac{1}{\beta_{p, q}(\mathcal{A})} + \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall p \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \forall q \quad \forall n > n_0(p, q, \varepsilon).$$

Так как $\beta_p(\mathcal{A}) = \inf_q \{\beta_{p, q}(\mathcal{A})\}$, то

$$\forall p \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists q_p(\varepsilon) : -\frac{1}{\beta_{p, q_p}(\mathcal{A})} \leq -\frac{1}{\beta_p(\mathcal{A})} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Таким образом,

$$\forall p \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists q_p(\varepsilon) \quad \exists n_0(p, \varepsilon) \quad \forall n > n_0 : \frac{n \ln n}{-\ln \theta_{\mathcal{A}}(p, q_p, n)} < -\frac{1}{\beta_p(\mathcal{A})} + \varepsilon,$$

следовательно,

$$\forall p \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists q_p(\varepsilon) \quad \exists n_0(p, \varepsilon) \quad \forall n > n_0 : \sqrt[n]{\theta_{\mathcal{A}}(p, q_p, n)} < n^{-\frac{1}{-\frac{1}{\beta_p(\mathcal{A})} + \varepsilon}}.$$

По лемме 2 $\left(b_p = -\frac{1}{\beta_p(\mathcal{A})} + \varepsilon, \quad a_p = \frac{1}{\varepsilon(-\frac{1}{\beta_p(\mathcal{A})} + \varepsilon)} \right)$

$$\forall p \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists q_p(\varepsilon) \quad \exists r_0(p, \varepsilon) \quad \forall r > r_0 : M_F(p, q_p, r) \leq \exp \left\{ (a_p + \varepsilon) r^{-\frac{1}{-\frac{1}{\beta_p(\mathcal{A})} + \varepsilon}} \right\}.$$

А это означает, что $\rho_p(F) \leq -\frac{1}{\beta_p(\mathcal{A})}$, $\forall p$.

Таким образом равенство (16) доказано. Равенство (18) непосредственно следует из (16).

Докажем равенство (17).

Пусть функция F имеет p -порядок $0 < \rho_p(F) < \infty$ и p -тип $\sigma_p(F)$. Тогда

$$\forall p \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists q_p(\varepsilon) \quad \exists r_0(p, \varepsilon) \quad \forall r > r_0 : M_F(p, q_p, r) < \exp \left\{ (\sigma_p(F) + \varepsilon) r^{\rho_p(F)} \right\}.$$

По лемме 1 ($a_p = \sigma_p(F) + \varepsilon$, $b_p = \rho_p(F)$) имеем:

$$\sqrt[n]{\theta_{\mathcal{A}}(p, q_p, n)} < \left(\frac{(\sigma_p(F) + \varepsilon) \rho_p(F) e}{n} \right)^{\frac{1}{\rho_p(F)}}, \quad \forall n > n_0,$$

$$n^{\frac{1}{\rho_p(F)}} \sqrt[n]{\theta_{\mathcal{A}}(p, q_p, n)} < ((\sigma_p(F) + \varepsilon) \rho_p(F) e)^{\frac{1}{\rho_p(F)}}, \quad \forall n > n_0.$$

В силу произвольности ε

$$\begin{aligned} \alpha_{p, q_p}(\mathcal{A}) &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n^{-\beta_p(\mathcal{A})} \sqrt[n]{\theta_{\mathcal{A}}(p, q_p, n)} = \\ &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{\rho_p(F)}} \sqrt[n]{\theta_{\mathcal{A}}(p, q_p, n)} \leq (\sigma_p(F) \rho_p(F) e)^{\frac{1}{\rho_p(F)}} \end{aligned}$$

Так как $\alpha_p(\mathcal{A}) = \inf_q \{\alpha_{p, q}(\mathcal{A})\}$, то

$$\alpha_p(\mathcal{A}) \leq \alpha_{p, q_p}(\mathcal{A}) \leq (\sigma_p(F) \rho_p(F) e)^{\frac{1}{\rho_p(F)}}, \quad \forall p.$$

Обратно, поскольку

$$\alpha_{p, q}(\mathcal{A}) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n^{-\beta_p(\mathcal{A})} \sqrt[n]{\theta_{\mathcal{A}}(p, q, n)} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{\rho_p(F)}} \sqrt[n]{\theta_{\mathcal{A}}(p, q, n)}, \quad \forall p, \quad \forall q,$$

то

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall p \quad \exists q(p, \varepsilon) \quad \exists n_0(p, \varepsilon) \quad \forall n > n_0,$$

$$\sqrt[n]{\theta_{\mathcal{A}}(p, q, n)} < \left(\frac{(\alpha_{p, q}(\mathcal{A}) + \varepsilon)^{\rho_p(F)}}{n} \right)^{\frac{1}{\rho_p(F)}} < \left(\frac{(\alpha_p(\mathcal{A}) + 2\varepsilon)^{\rho_p(F)}}{n} \right)^{\frac{1}{\rho_p(F)}}.$$

По лемме 2 ($b_p = \rho_p(F)$, $a_p = \frac{(\alpha_p(\mathcal{A}) + 2\varepsilon)^{\rho_p(F)}}{\rho_p(F)e}$) получаем:

$$\forall p \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists q_p(\varepsilon) \quad \exists r_0(p, \varepsilon) \quad \forall r > r_0 : M_F(p, q_p, r) < \exp \{ (a_p + \varepsilon) r^{\rho_p(F)} \}.$$

Отсюда следует, что

$$\sigma_p(F) \leq a_p = \frac{(\alpha_p(\mathcal{A}) + 2\varepsilon)^{\rho_p(F)}}{\rho_p(F)e}.$$

В силу произвольности ε

$$\sigma_p(F) \rho_p(F) e \leq (\alpha_p(\mathcal{A}))^{\rho_p(F)},$$

следовательно,

$$\alpha_p(\mathcal{A}) \geq (\sigma_p(F) \rho_p(F) e)^{\frac{1}{\rho_p(F)}},$$

то есть

$$\sigma_p(F) = -\frac{\beta_p(\mathcal{A})}{e} (\alpha_p(\mathcal{A}))^{-\frac{1}{\beta_p(\mathcal{A})}}, \quad \forall p.$$

Таким образом равенство (17) доказано.

Докажем равенство (19).

Если $\beta_p(\mathcal{A}) < \beta(\mathcal{A})$, $\forall p$, то из равенства (16) следует $\rho_p(F) < \rho(F)$, $\forall p$ и по определению $\sigma(F) = 0$.

Если же $\beta_p(\mathcal{A}) = \beta(\mathcal{A})$, $\forall p$, то из равенства (16) следует $\rho_p(F) = \rho(F)$, $\forall p$ и по определению

$$\sigma(F) = \sup_p \{ \sigma_p(F) \} = -\frac{\beta(\mathcal{A})}{e} \sup_p \{ (\alpha_p(\mathcal{A}))^{-\frac{1}{\beta(\mathcal{A})}} \} = -\frac{\beta(\mathcal{A})}{e} (\alpha(\mathcal{A}))^{-\frac{1}{\beta(\mathcal{A})}}.$$

■

Замечание. Отметим, что соотношение (16) верно и для $\rho_p(F) = \infty$. Так как, если предположить, что $\rho_p(F) = \infty$ и $\beta_p(\mathcal{A}) < 0$, то должно быть (по доказанному) $\rho_p(F) < \infty$, что не так. Аналогично равенство (17) верно и для $\sigma_p(F) = \infty$.

Замечание. Формулы (16) и (17) показывают, что p -порядки и p -типы целой операторнозначной функции полностью определяются характеристиками последовательности ее коэффициентов.

Примеры.

1. Пусть $\mathbf{H}_1 = \mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbb{C})$ — пространство всех целых функций с топологией равномерной сходимости на компактах:

$$\|x(z)\|_p = \max_{|z| \leq p} |x(z)|, \quad p > 0.$$

Найдем характеристики функции

$$F(t) = e^{t \frac{d}{dz}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \frac{d^n}{dz^n} : \mathbb{C} \rightarrow \text{Lec}(\mathbf{H}(\mathbb{C})).$$

Последовательность $\mathcal{A} = \left\{ \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dz^n} \right\}$ имеет следующие характеристики [1]:

$$\beta_p(\mathcal{A}) = \alpha_p(\mathcal{A}) = 0, \quad \forall p.$$

Следовательно, $\rho_p(F) = \infty, \forall p$.

2. Пусть $\mathbf{H}_1 = [\rho, \sigma], \mathbf{H} = [\rho, \theta], \theta \geq \sigma$. Топологии на этих пространствах определяются мультиномрами

$$\|x(z)\|_\varepsilon = \sup_{p>0} \left\{ \max_{|z| \leq p} |x(z)| e^{-(\sigma+\varepsilon)p^\rho} \right\}, \quad \varepsilon > 0, \quad x \in [\rho, \sigma].$$

$$\|y(z)\|_\varepsilon = \sup_{p>0} \left\{ \max_{|z| \leq p} |y(z)| e^{-(\theta+\varepsilon)p^\rho} \right\}, \quad \varepsilon > 0, \quad y \in [\rho, \theta].$$

Найдем характеристики функции

$$F(t) = e^{t \frac{d}{dz}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \frac{d^n}{dz^n} : \mathbb{C} \rightarrow \text{Lec}([\rho, \sigma], [\rho, \theta]).$$

Последовательность $\mathcal{A} = \left\{ \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dz^n} \right\}$ имеет следующие характеристики [1]:

$$\beta_\varepsilon(\mathcal{A}) = -\frac{1}{\rho}, \quad \alpha_\varepsilon(\mathcal{A}) = (\rho e \sigma \Omega_\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}}, \quad \forall \varepsilon,$$

где

$$\Omega_\varepsilon = \begin{cases} \left(1 - \left(\frac{\sigma}{\theta+\varepsilon} \right)^{\frac{1}{\rho-1}} \right)^{1-\rho}, & \rho > 1 \\ 1, & \rho \leq 1 \end{cases}$$

Следовательно,

$$\rho_\varepsilon(F) = \rho, \quad \sigma_\varepsilon(F) = \sigma \Omega_\varepsilon, \quad \forall \varepsilon.$$

3. Пусть $\mathbf{H}_1 = \mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbb{C})$ — пространство всех целых функций с топологией равномерной сходимости на компактах:

$$\|x(z)\|_p = \max_{|z| \leq p} |x(z)|, \quad p > 0.$$

Найдем характеристики функции

$$\begin{aligned} F(t)(x) &= x(z) + t \int_0^z e^{(z-\xi)t} x(\xi) d\xi = \\ &= x(z) + t \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^z \frac{(z-\xi)^n t^n}{n!} x(\xi) d\xi, \end{aligned}$$

$$F(t) : \mathbb{C} \rightarrow \text{Lec}(\mathbf{H}(\mathbb{C})).$$

Здесь

$$A_n(x) = \int_0^z \frac{(z - \xi)^{n-1}}{(n-1)!} x(\xi) d\xi, \quad n = 1, 2, \dots, \quad A_0 = E.$$

Последовательность $\mathcal{A} = \{A_n\}$ имеет следующие характеристики [1]:

$$\beta_p(\mathcal{A}) = -1, \quad \alpha_p(\mathcal{A}) = p, \quad \forall p.$$

Следовательно, $\rho_p(F) = 1, \quad \sigma_p(F) = \frac{p}{e}, \quad \forall p.$

3. СВОЙСТВА ХАРАКТЕРИСТИК РОСТА ОПЕРАТОРНОЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ

Отметим некоторые свойства характеристик роста операторнозначных функций, следующие из теоремы 4.

1⁰. Целая функция F и ее k -я производная $F^{(k)}$ имеют одинаковые p -порядки и p -типы роста.

Справедливость следует из того, что последовательности $\{A_n\}$ и $\left\{\frac{(n+k)!}{n!} A_{n+k}\right\}$ имеют одинаковые характеристики при любом фиксированном k .

2⁰. Если функция F_1 имеет p -порядки $\rho_p(F_1)$ и p -типы $\sigma_p(F_1)$, а функция F_2 имеет p -порядки $\rho_p(F_2) > \rho_p(F_1)$, $\forall p$ и p -типы $\sigma_p(F_2)$, то функция $F = F_1 + F_2$ имеет p -порядки $\rho_p(F) = \rho_p(F_2)$, $\forall p$ и p -типы $\sigma_p(F) = \sigma_p(F_2)$, $\forall p$.

Справедливость следует из того, что характеристики суммы последовательностей операторов равны характеристикам того слагаемого, у которого порядок больше.

3⁰. Если функция F_1 имеет p -порядки $\rho_p(F_1)$ и p -типы $\sigma_p(F_1)$, а функция F_2 имеет p -порядки $\rho_p(F_2) = \rho_p(F_1)$, $\forall p$ и p -типы $\sigma_p(F_2) > \sigma_p(F_1)$, $\forall p$, то функция $F = F_1 + F_2$ имеет p -порядки $\rho_p(F) = \rho_p(F_2)$, $\forall p$ и p -типы $\sigma_p(F) = \sigma_p(F_2)$, $\forall p$.

Справедливость следует из того, что характеристики суммы последовательностей операторов с одинаковыми порядками равны характеристикам того слагаемого, у которого тип больше.

4⁰. (Для случая $\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}$.) Пусть функция F_1 имеет порядок $\rho(F_1)$ и тип $\sigma(F_1)$, а функция F_2 имеет порядок $\rho(F_2) > \rho(F_1)$ и тип $\sigma(F_2)$. Тогда функция $F = F_1 F_2$ имеет порядок $\rho(F) \leq \rho(F_2)$ и тип $\sigma(F)$. Если $\rho(F) = \rho(F_2)$, то $\sigma(F) \leq \sigma(F_2)$. Аналогично для функции $\tilde{F} = F_2 F_1$.

Доказательство основано на следующей лемме.

Лемма 3. Пусть последовательность операторов $\mathcal{A} = \{A_n\}$ имеет порядок $\beta(\mathcal{A})$ и тип $\alpha(\mathcal{A})$, а последовательность операторов $\mathcal{B} = \{B_n\}$ — порядок $\beta(\mathcal{B}) > \beta(\mathcal{A})$ и тип $\alpha(\mathcal{B})$. Тогда последовательность операторов $\mathcal{C} = \{C_n\}$, где $C_n = \sum_{k=0}^n A_k B_{n-k}$ имеет порядок $\beta(\mathcal{C}) \leq \beta(\mathcal{B})$ и тип $\alpha(\mathcal{C})$. Если $\beta(\mathcal{C}) = \beta(\mathcal{B})$, то $\alpha(\mathcal{C}) \leq \alpha(\mathcal{B})$.

Доказательство.

□ Обозначим $a = \alpha(\mathcal{A})e^{\beta(\mathcal{A})}$, $b = \alpha(\mathcal{B})e^{\beta(\mathcal{B})}$.

Из определения порядка и типа последовательности операторов имеем [1]

$\forall \varepsilon, \varepsilon_1 > 0, \forall p, \exists M_p, \exists q, \forall n, \forall x \in \mathbf{H} :$

$$\begin{aligned} \|C_n(x)\|_p &\leq M_p \left((b + \varepsilon)^n n!^{\beta(\mathcal{B})} + (a + \varepsilon_1)(b + \varepsilon)^{n-1} 1!^{\beta(\mathcal{A})} (n-1)!^{\beta(\mathcal{B})} + \dots + \right. \\ &\quad \left. + (a + \varepsilon_1)^{n-1} (b + \varepsilon) (n-1)!^{\beta(\mathcal{A})} 1!^{\beta(\mathcal{B})} + (a + \varepsilon_1)^n n!^{\beta(\mathcal{A})} \right) \|x\|_q \leq \\ &\leq M_p (b + \varepsilon)^n n!^{\beta(\mathcal{B})} \left[1 + \binom{n}{1}^{-\beta(\mathcal{B})} \left(\frac{a + \varepsilon_1}{b + \varepsilon} \right) 1!^\nu + \binom{n}{2}^{-\beta(\mathcal{B})} \left(\frac{a + \varepsilon_1}{b + \varepsilon} \right)^2 2!^\nu + \dots + \right. \\ &\quad \left. + \binom{n}{n}^{-\beta(\mathcal{B})} \left(\frac{a + \varepsilon_1}{b + \varepsilon} \right)^n n!^\nu \right] \|x\|_q, \quad (21) \end{aligned}$$

где $\nu = \beta(\mathcal{A}) - \beta(\mathcal{B})$.

Если $\beta(\mathcal{B}) > \beta(\mathcal{A})$ ($\nu < 0$), то при больших n выражение в квадратных скобках в (21) не превосходит $(1 + \varepsilon_2)^n$, $\forall \varepsilon_2 > 0$ и следовательно $\beta(\mathcal{C}) \leq \beta(\mathcal{B})$, причем, если $\beta(\mathcal{C}) = \beta(\mathcal{B})$, то $\alpha(\mathcal{C}) \leq \alpha(\mathcal{B})$. ■

5⁰. (Для случая $\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}$.) Пусть функция F_1 имеет порядок $\rho(F_1)$ и тип $\sigma(F_1)$, а функция F_2 имеет порядок $\rho(F_2) = \rho(F_1)$ и тип $\sigma(F_2) \geq \sigma(F_1)$. Тогда функция $F = F_1 F_2$ имеет порядок $\rho(F) \leq \rho(F_2)$ и тип $\sigma(F)$. Если $\rho(F) = \rho(F_2)$, то $\sigma(F) \leq 2\sigma(F_2)$. Аналогично для функции $\tilde{F} = F_2 F_1$.

Доказательство основано на следующей лемме.

Лемма 4. Пусть последовательность операторов $\mathcal{A} = \{A_n\}$ имеет порядок $\beta(\mathcal{A})$ и тип $\alpha(\mathcal{A})$, а последовательность операторов $\mathcal{B} = \{B_n\}$ — порядок $\beta(\mathcal{B}) = \beta(\mathcal{A})$ и тип $\alpha(\mathcal{B}) \geq \alpha(\mathcal{A})$. Тогда последовательность операторов $\mathcal{C} = \{C_n\}$, где $C_n = \sum_{k=0}^n A_k B_{n-k}$ имеет порядок $\beta(\mathcal{C}) \leq \beta(\mathcal{B})$ и тип $\alpha(\mathcal{C})$. Если $\beta(\mathcal{C}) = \beta(\mathcal{B})$, то $\alpha(\mathcal{C}) \leq 2^{-\beta(\mathcal{B})} \alpha(\mathcal{B})$.

Доказательство.

□ В условиях леммы выражение в квадратных скобках в (21) не превосходит $2^{-\beta(\mathcal{B})n} n$ и следовательно $\beta(\mathcal{C}) \leq \beta(\mathcal{B})$, причем если $\beta(\mathcal{C}) = \beta(\mathcal{B})$, то $\alpha(\mathcal{C}) \leq 2^{-\beta(\mathcal{B})} \alpha(\mathcal{B})$. ■

Замечание. Как известно, для скалярного случая справедлива теорема о категориях [3, Теорема 12]. В случае операторнозначных функций этот вопрос пока открыт.

6⁰. (Инвариантность). Пусть $\mathbf{H}_1, \tilde{\mathbf{H}}_1, \mathbf{H}$ и $\tilde{\mathbf{H}}$ — четыре л.в.п. с топологиями, задаваемыми соответственно мультинормами $\|\cdot\|'_q, q \in \mathcal{Q}, \|\cdot\|'_\tilde{q}, \tilde{q} \in \tilde{\mathcal{Q}}, \|\cdot\|_p, p \in \mathcal{P}, \|\cdot\|_{\tilde{p}}, \tilde{p} \in \tilde{\mathcal{P}}$ и пусть $T_1 : \mathbf{H}_1 \rightarrow \tilde{\mathbf{H}}_1, T : \mathbf{H} \rightarrow \tilde{\mathbf{H}}$ — два топологических изоморфизма. Тогда:

1) для всякой операторнозначной функции

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n t^n : \mathbb{C} \rightarrow \text{Lec}(\mathbf{H}_1, \mathbf{H})$$

ее порядок и тип совпадает с порядком и типом функции

$$\tilde{F}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} T A_n T_1^{-1} t^n : \mathbb{C} \rightarrow \text{Lec}(\tilde{\mathbf{H}}_1, \tilde{\mathbf{H}});$$

2) если все p -порядки функции F строго меньше ее порядка, то все \tilde{p} -порядки функции \tilde{F} строго меньше ее порядка;

3) если хотя бы один p -порядок функции F равен ее порядку, то хотя бы один \tilde{p} -порядок функции \tilde{F} равен ее порядку;

4) если функция F имеет p -порядки $\rho_p(F)$, порядок $\rho(F)$, p -типы $\sigma_p(F)$ и тип $\sigma(F)$, причем множество

$$\mathcal{P}_F = \{p \in \mathcal{P} : \rho_p(F) = \rho(F)\}$$

не пусто и $\forall p \in \mathcal{P}_F : \sigma_p(F) < \sigma(F)$, то функция \tilde{F} имеет \tilde{p} -порядки $\rho_{\tilde{p}}(\tilde{F})$, порядок $\rho(\tilde{F})$, \tilde{p} -типы $\sigma_{\tilde{p}}(\tilde{F})$ и тип $\sigma(\tilde{F})$, причем множество

$$\tilde{\mathcal{P}}_{\tilde{F}} = \{\tilde{p} \in \tilde{\mathcal{P}} : \rho_{\tilde{p}}(\tilde{F}) = \rho(\tilde{F})\}$$

не пусто и $\forall \tilde{p} \in \tilde{\mathcal{P}}_{\tilde{F}} : \sigma_{\tilde{p}}(\tilde{F}) < \sigma(\tilde{F})$;

5) если в условиях п. 4) $\exists p \in \mathcal{P}_F : \sigma_p(F) = \sigma(F)$, то $\exists \tilde{p} \in \tilde{\mathcal{P}}_{\tilde{F}} : \sigma_{\tilde{p}}(\tilde{F}) = \sigma(\tilde{F})$.

Справедливость свойства 6⁰ следует из аналогичных свойств для характеристик последовательности операторов [1, 6].

Из свойства инвариантности следует, что при любых заменах мультином в \mathbf{H}_1 и \mathbf{H} на эквивалентные (T_1 и T — тождественные операторы):

1) порядок и тип операторнозначной функции F не меняются;

2) если все p -порядки функции F были строго меньше ее порядка до замены мультином, то после замены мультином все ее \tilde{p} -порядки будут также строго меньше порядка;

3) если хотя бы один p -порядок функции F был равен ее порядку до замены мультином, то после замены мультином хотя бы один ее \tilde{p} -порядок (не обязательно тот же самый) также будет равен ее порядку;

4) если функция F до замены мультином имела p -порядки $\rho_p(F)$, порядок $\rho(F)$, p -типы $\sigma_p(F)$ и тип $\sigma(F)$, причем множество

$$\mathcal{P}_F = \{p \in \mathcal{P} : \rho_p(F) = \rho(F)\}$$

было не пусто и $\forall p \in \mathcal{P}_F : \sigma_p(F) < \sigma(F)$, то после замены мультином эта функция будет иметь \tilde{p} -порядки $\rho_{\tilde{p}}(F)$, порядок $\rho(F)$, \tilde{p} -типы $\sigma_{\tilde{p}}(F)$ и тип $\sigma(F)$, причем множество

$$\tilde{\mathcal{P}}_F = \{\tilde{p} \in \tilde{\mathcal{P}} : \rho_{\tilde{p}}(F) = \rho(F)\}$$

будет не пусто и $\forall \tilde{p} \in \tilde{\mathcal{P}}_F : \sigma_{\tilde{p}}(F) < \sigma(F)$;

5) если в условиях п. 4) $\exists p \in \mathcal{P}_F : \sigma_p(F) = \sigma(F)$, то $\exists \tilde{p} \in \tilde{\mathcal{P}}_F : \sigma_{\tilde{p}}(F) = \sigma(F)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Громов В.П., Мишин С.Н., Панюшкин С.В. *Операторы конечного порядка и дифференциально-операторные уравнения*. Орел: ОГУ, 2009.
2. Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ в нормированных пространствах*. М., Физматгиз, 1959.
3. Левин Б.Я. *Распределение корней целых функций*. М.: ГИТТЛ, 1956.
4. Леонтьев А.Ф. *Целые функции. Ряды экспонент*. М.: Наука, 1983.
5. Мишин С.Н. *Связь характеристик последовательности операторов с борнологической сходимостью* // Вестник РУДН. Серия: Математика, информатика, физика. 2010. №4. С. 26–34.
6. Мишин С.Н. *Инвариантность характеристик последовательности операторов и операторных характеристик вектора* // Ученые записки ОГУ (лаб. ТФФА). №7. Орел. 2010. С. 32–35.
7. Мишин С.Н. *Операторы конечного порядка в локально выпуклых пространствах и их применение*: Дисс. ... к. ф.-м. н. Орел, 2002.
8. Радыно Я.В. *Линейные уравнения и борнология*. Мн.: Изд-во БГУ, 1982.
9. Garrett P. *Holomorphic vector-valued functions*. [Электронный ресурс] URL: http://www.math.umn.edu/~garrett/m/fun/Notes/09_vv_holo.pdf

Сергей Николаевич Мишин,
 ГОУ ВПО "Орловский государственный университет",
 ул. Комсомольская, 95,
 302026, г. Орел, Россия
 E-mail: sergymishin@rambler.ru