

## О ПРИЛОЖЕНИЯХ ФОРМУЛЫ ФАА-ДИ-БРУНО

А.Б. ШАБАТ, М.Х. ЭФЕНДИЕВ

**Аннотация.** В работе построены две новые модификации классической формулы Фаа-ди-Бруно. Рассмотрены приложения этих формул в теории интегрируемости нелинейных уравнений с частными производными. Обсуждается задача об интегрировании по частям в формальном вариационном исчислении Гельфанда-Олвера-Сандерса.

**Ключевые слова:** формула Фаа-ди-Бруно, дифференциальные многочлены, условия интегрируемости.

**Mathematics Subject Classification:** 37K10

## 1. ОБОБЩЕНИЕ ФОРМУЛЫ ФАА-ДИ-БРУНО

Дифференцирование сложной функции  $f[u(x), v(x), \dots, z(x)]$  приводит к красивой формуле, опубликованной Франческо Фаа-ди-Бруно в 1857 г. Правая часть приведённого ниже расширенного варианта этой формулы для производной порядка  $n \geq 1$  по независимой переменной  $x$  от композиции функций:

$$\frac{f^{(n)}}{n!} = \left( \sum_{k_1+2k_2+\dots+nk_n=n} \frac{\hat{B}_1^{k_1} \hat{B}_2^{k_2} \dots \hat{B}_n^{k_n}}{k_1! k_2! \dots k_n!} \right) f(u, v, \dots, z), \quad \hat{B}_j \stackrel{\text{def}}{=} \frac{u_j}{j!} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{v_j}{j!} \frac{\partial}{\partial v} + \dots + \frac{z_j}{j!} \frac{\partial}{\partial z} \quad (1.1)$$

записана нами в виде дифференциального оператора с частными производными, действующего на функцию  $f$  с аргументами  $u, v, \dots, z$ . Коэффициенты указанного выше линейного оператора выражены через переменные  $u, v, \dots, z$  и многочлены от их  $x$ -производных, обозначаемых  $u_j$ . Эти так называемые *дифференциальные переменные*

$$u_j \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d^j u(x)}{dx^j}, \quad v_j \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d^j v(x)}{dx^j}, \quad \dots, \quad z_j \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d^j z(x)}{dx^j}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (1.2)$$

в формуле (1.1) рассматриваются как независимые переменные, перестановочные друг с другом и с операторами дифференцирования  $\partial_u, \partial_v, \dots, \partial_z$ . В частности, в случае двух аргументов  $u, v$  функции  $f$  и  $n \leq 4$  формула (1.1) даёт:

$$\begin{aligned} f^{(1)} &= (\hat{B}_1) f = (u_1 \partial_u + v_1 \partial_v) f(u, v) = \frac{df[u(x), v(x)]}{dx}, \\ f^{(2)} &= [u_2 \partial_u + v_2 \partial_v + u_1^2 \partial_u^2 + 2u_1 v_1 \partial_u \partial_v + v_1^2 \partial_v^2] f(u, v) = [2\hat{B}_2 + \hat{B}_1^2] f \\ f^{(3)} &= (6\hat{B}_3 + 3\hat{B}_2 \hat{B}_1 + \hat{B}_1^3) f, \quad f^{(4)} = (4!\hat{B}_4 + 4!\hat{B}_3 \hat{B}_1 + 12\hat{B}_2^2 + 12\hat{B}_2 \hat{B}_1^2 + \hat{B}_1^4) f. \end{aligned}$$

Число различных мономов в этих многочленах от  $n$  переменных  $\hat{B}_1, \dots, \hat{B}_n$  определяется диофантовым уравнением

$$k_1 + 2k_2 + 3k_3 + \dots + nk_n = n, \quad k_j \geq 0 \quad (1.3)$$

А.Б. ШАБАТ, М.Х. ЭФЕНДИЕВ, ON APPLICATIONS OF FAA DI BRUNO.

© ШАБАТ А.Б., ЭФЕНДИЕВ М.Х. 2017.

Поступила 8 апреля 2017 г.

и совпадает с числом  $p(n)$  различных разбиений (partitions) целого числа  $n \geq 1$ . В силу этого (см. [1]):

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} p(n)t^n = \prod_{j=1}^{\infty} (1 - t^j)^{-1} = 1 + t + 2t^2 + 3t^3 + 5t^4 + 7t^5 + 11t^6 + 15t^7 + 22t^8 + \dots$$

Доказательство формулы Фаа-ди-Бруно (1.1) в скалярном случае  $f[u(x)]$  можно извлечь из цитированной выше монографии [1]. По существу дело сводится к доказательству формулы  $f^{(n+1)} = D_x(f^{(n)})$ , где линейный дифференциальный оператор первого порядка:

$$D_x = u_1 \frac{\partial}{\partial u} + \sum_{j=1}^{\infty} u_{j+1} \frac{\partial}{\partial u_j} : u \mapsto u_1 \mapsto u_2 \mapsto \dots \mapsto u_k \mapsto \dots \quad (1.4)$$

применяется к слагаемым правой части формулы (1.1), зависящим не только от  $u$ , но и от дополнительных независимых переменных (1.2).

Для обоснования, указанного в (1.1), обобщения формулы Фаа-ди-Бруно на «векторный случай»  $f[u(x), v(x), \dots, z(x)]$ , заметим, что для экспоненциальных функций  $f = e^{(u(x), v(x), \dots, z(x))}$  вида

$$\log f = w = \alpha u + \beta v + \dots + \gamma z \quad (1.5)$$

скалярная и векторная формы, рассматриваемой формулы (1.1) совпадают. В силу соображений линейности это доказывает справедливость общей формулы для линейной комбинации экспоненциальных функций вида (1.5), а значит и в общем случае (см. формулы прямолинейных вычислений в работе [3]).

## 2. ЦЕПОЧКИ ДАРБУ

Обсудим кратко применимость формулы Фаа-ди-Бруно (1.1) к задаче об интегрировании линейного гиперболического уравнения второго порядка относительно функции  $\psi = \psi(x, y)$ :

$$[D_x D_y + b(x, y) D_y + c(x, y)] \psi = 0, \quad (2.1)$$

при помощи теории преобразований Дарбу.

Лемма. Пусть  $c(n) = c(n; x, y)$ ,  $b(n) = b(n; x, y)$  удовлетворяют нелинейной цепочке связанных друг с другом уравнений:

$$D_x \log c(n) = b(n+1) - b(n), \quad D_y b(n) = c(n) - c(n-1), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (2.2)$$

Тогда

i) выполняются следующие уравнения Дарбу:

$$[\log c(n)]_{xy} = c(n+1) + c(n-1) - 2c(n), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (2.3)$$

ii) формулы

$$(D_x + b(n))\psi(n) + \psi(n-1) = 0, \quad D_y \psi(n) = c(n)\psi(n+1), \quad (2.4)$$

переводят решения уравнений (ср. (2.1)) в решения:

$$[D_x D_y + b(n) D_y + c(n)] \psi(n) = 0, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (2.5)$$

и коммутируют друг с другом операторы из (2.4).

◀ Пусть выполнены уравнения (2.2). Тогда в силу равенства смешанных производных

$$D_x D_y (\log c(n)) = D_y D_x (\log c(n)) = b_y(n+1) - b_y(n) = c(n+1) + c(n-1) - 2c(n),$$

что даёт цепочку уравнений Дарбу. Для доказательства ii) определим операторы «сдвига»  $T^{\pm 1} : \psi(n) \rightarrow \psi(n \pm 1)$ . Тогда, используя формулы  $Tc(n) = c(n+1)T$ ,  $T^{-1}c(n)T = c(n-1)$ ,  $[D_x, D_y] = [D_x, T] = [D_y, T] = 0$ , получаем:

$$[D_x + b(n) + T^{-1}, D_y - c(n)T] = (-c_x(n) + c(n)b(n+1) - b(n)c(n))T + c(n) - c(n-1) - b_y(n) = 0. \quad \blacktriangleright \quad (2.6)$$

Разрешимость линейных уравнений (2.1)), в теории преобразований Дарбу (см. [6]), удаётся связать с условиями замыкания цепочки нелинейных уравнений типа (2.3) для коэффициентов этих линейных уравнений. Для уравнений (2.2) простейшие условия такого рода соответствуют задаче Дирихле и занулению функций  $c(n) = c(n; x, y)$  при  $n \leq 0$  и  $n > N \geq 1$ . В случае  $N = 1$  это даёт скалярное уравнение  $[\log c(1)]_{xy} + 2c(1) = 0$ , эквивалентное уравнению Лиувилля  $\alpha u_{xy} + 2e^{\alpha u} = 0$ , с точностью до замены вида  $c(n) = e^{\alpha u}$ . Характерное свойство, свидетельствующее об интегрируемости уравнения Лиувилля, формулируется при  $\alpha = -2$  в виде следующего уравнения:

$$D_y(u_2 + u_1^2) = 0, \quad u_1 = u_x, \quad u_2 = u_{xx}. \quad (2.7)$$

Здесь  $u(x, y)$  — произвольное решение рассматриваемого уравнения, выполненное с учётом уравнения Лиувилля и его дифференциальных следствий.

В общем случае экспоненциальных систем вида<sup>1</sup>

$$[\log c(n)]_{xy} = \sum_{j=1}^N \alpha_{n,j} c(j), \quad n \in [N], \quad \det(\alpha_{n,j}) \neq 0, \quad (2.8)$$

задача об условиях существования «лиувиллевских многочленов», аналогичных (2.7), была решена в препринте 1981 г. [9]. Точнее, в работе было доказано, что наличие достаточного набора дифференциальных соотношений вида (2.7), с необходимостью приводит нас к матрицам Картана  $(\alpha_{n,j})$ , соответствующим полупростым алгебрам Ли. Представляется интересным, в дополнение к [9] и работе А.Н. Лезнова [10], связать лиувиллевские многочлены<sup>2</sup> для экспоненциальных систем (2.8) с формулой Фаа-ди-Бруно (1.1) и рассмотреть возможность их некоммутативного обобщения. Ограничимся здесь двумя простыми примерами.

Скалярное уравнение  $u_{xy} = F$  с произвольной функцией  $F = F(u)$  позволяет определить оператор  $D_y$ , действующий на множестве многочленов от дифференциальных переменных (1.2):

$$D_y = F \frac{\partial}{\partial u_1} + D_x(F) \frac{\partial}{\partial u_2} + \sum_{j>2} F^{(j-1)} \frac{\partial}{\partial u_j}, \quad F^{(n)} = D_x^n(F \circ u). \quad (2.9)$$

Коэффициенты (ср. (1.1)) этого оператора, рассматриваемого на решениях уравнения  $u_{xy} = F(u)$ , однозначно определяются условием коммутирования  $D_x \circ D_y = D_y \circ D_x$  векторных полей (1.4) и (2.9), соответствующих  $x$  и  $y$  дифференцированиям, соответственно. Легко видеть, что условие  $D_y(u_2 + u_1^2) = 0$  даёт  $F' + 2F = 0$ , т.е. приводит нас к уравнению Лиувилля. Можно проверить (см. [8]), что последнее условие на функцию  $F(u)$  остаётся в силе во всех случаях разрешимости уравнения

$$D_y W(u_1, \dots, u_m) = 0, \quad (2.10)$$

и что общее полиномиальное решение уравнения (2.10) в скалярном случае  $u_{xy} = F(u)$  порождается многочленом минимального порядка  $W_2 = u_2 + u_1^2$  и выражается через многочлены Белла (см. [1]).

Уравнение Лиувилля, как уже говорилось, соответствует задаче Дирихле с  $N = 1$  для цепочки Дарбу (2.3). При  $N = 2$  мы находим:

$$[\log c(1)]_{xy} = c(2) - 2c(1), \quad [\log c(2)]_{xy} = c(1) - 2c(2), \quad (2.11)$$

<sup>1</sup> «проинтегрированных» в известных работах А.Н. Лезнова и М.В. Савельева

<sup>2</sup> постоянные при изменяющемся  $y$

что соответствует простейшей из матриц Картана с  $\alpha_{ii} = -2$  на главной диагонали. Указанная в Лемме факторизация (2.2) этих уравнений приводит к дополнительным уравнениям для  $b(1)$ ,  $b(2)$ ,  $b(3)$ :

$$\begin{cases} D_y(b(1)) = c(1), & D_y(b(2)) = c(2) - c(1), & D_y(b(3)) = -c(2); \\ D_x \log c(1) = b(2) - b(1), & D_x \log c(2) = b(3) - b(2); \\ D_y(W_0) = 0, & W_0 = b(1) + b(2) + b(3). \end{cases} \quad (2.12)$$

Из этих уравнений, которые выполняются для задачи Дирихле (2.11) и при  $N \geq 2$ , видно, что в качестве дифференциальных переменных  $u_j$  при построении лиувиллевских многочленов  $W_m$  из формулы (2.10) можно выбирать

$$b_j(n) = D_x^j b(n), \quad j = 1, 2, \dots, \quad n \in [N + 1]. \quad (2.13)$$

В частности, при  $N = 2$ , определив при помощи уравнений из верхней строчки формулы (2.12) оператор  $D_y$ , действующий на множестве многочленов от дифференциальных переменных (2.13), мы находим решения  $W_m$  уравнения (2.10) при  $m = 0, 1$ :

$$W_0 = b(3) + b(2) + b(1), \quad W_1 = b^2(1) + b^2(2) + b^2(3) + 2b_1(2) + 4b_1(1),$$

и при  $W_0 = 0$  находим следующий лиувиллевский многочлен  $W_2$ :

$$\begin{aligned} D_y b_2(1) &= c(1) [b_1(2) - b_1(1) + (b(2) - b(1))^2], \\ D_y [b_2(1) + b_1(1)b(1) - b_1(2)b(1)] &= c(1) [b^2(2) - b^2(1)] - c(2) [b(1)b(3) - b(1)b(2)], \\ W_2 &= b_2(1) + b_1(1)b(1) - b_1(2)b(1) + \frac{1}{3}[b^3(1) + b^3(2) + b^3(3)]. \end{aligned}$$

Отметим, что указанное выше дополнительное условие  $W_0 = 0$  позволяет избавиться от «лишней» переменной  $b(3)$  и уравнивать тем самым число неизвестных  $b(j)$  и  $c(j)$ . При  $N = 3$  аналогично строятся (при  $W_0 = 0$ ) три независимых решения (2.10) порядков  $m = 1, 2, 3$  и т.д.

### 3. УСЛОВИЯ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ И ЗАДАЧА ГЕЛЬФАНДА-САНДЕРСА

Пусть  $n' = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  — наименьшее целое  $\geq n/2$ . Собирая в скалярной формуле Фаа-ди-Бруно члены с  $u_j, j \in [n']$ , мы получаем

$$\begin{aligned} f^{(n)} &= u_n f_u + \binom{n}{1} u_{n-1} f_u f^{(1)} + \binom{n}{2} u_{n-2} f_u f^{(2)} \dots + \binom{n}{n'} u_{n'} f_u [f^{(n')} - \varepsilon(n) u_{n'} f_u] + \dots, \varepsilon(n) = \\ &= \frac{1}{2} \begin{cases} 0, & n - \text{нечетный} \\ 1, & n - \text{четный} \end{cases}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где многоточие в конце формулы (3.1) обозначает слагаемые формулы (1.1), которые соответствуют урезанному диофантовому уравнению (1.3):

$$k_1 + 2k_2 + \dots + n'' k_{n''} = n, \quad n'' = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq \frac{n}{2}$$

и содержат только дифференциальные переменные (1.2) с номерами  $j \in [n'']$ . Например, при  $n = 5$  мы имеем  $n' = 3, n'' = 2$ , и формула (3.1) записывается в виде

$$f^{(5)} = \left( u_5 + \binom{5}{1} u_4 f^{(1)} + \binom{5}{2} u_3 f^{(2)} \right) f_u + 5! \left( \sum_{k_1+2k_2=5} \frac{\hat{B}_1^{k_1} \hat{B}_2^{k_2}}{k_1! k_2!} \right) f(u).$$

Мы не останавливаемся на обобщении формулы (3.1) на векторный случай, но отметим очевидную аналогию с биномиальными коэффициентами формулы Лейбница:

$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + \binom{n}{1}u^{(n-1)}v^{(1)} + \binom{n}{2}u^{(n-2)}v^{(2)} + \dots + uv^{(n)}$  для дифференцирования произведения двух функций  $u$  и  $v$ .

Ниже речь идёт о применимости формул типа (3.1) к задаче об интегрировании по частям произвольных функций  $f[u]$ , где  $[u]$  обозначает конечный набор дифференциальных переменных (1.2). Для этого выделяется линейная по старшим производным часть функции  $f[u]$  и сравнивается с приведённой выше формулой (3.1). Теоретический вопрос о представимости функции  $f[u]$  в виде производной  $f[u] = D_x g[u]$  эквивалентно равенству нулю «вариационной производной»:

$$\frac{\delta f}{\delta u} = \frac{\partial f}{\partial u} - D_x \left( \frac{\partial f}{\partial u_1} \right) + D_x^2 \left( \frac{\partial f}{\partial u_2} \right) - D_x^3 \left( \frac{\partial f}{\partial u_3} \right) + \dots = 0. \quad (3.2)$$

Однако в приложениях требуется находить первообразную  $g[u]$  от  $f[u] = D_x g[u]$  и определять препятствия к интегрированию. Задача о препятствиях для интегрирования по частям, основанная на обобщённой формуле Лейбница (3.1), лежит в основе развитого в 80-е гг. в Уфе [7], [11] симметричного подхода к проблеме интегрируемости нелинейных уравнений с двумя независимыми переменными. Простейшим из них является уравнение Лиувилля из предыдущего раздела, к которому следует добавить, как было указано в пионерской работе [8], ещё два уравнения:

$$u_{x,y} = F(u), \quad F(u) = e^u + \beta e^{\gamma u}, \quad \gamma = -1, \quad \gamma = -2. \quad (3.3)$$

Задача об эволюционных уравнениях третьего порядка  $u_t = F(u, u_1, u_2, u_3)$ , интегрируемых в том же смысле, что и известное уравнение Кортевега—де Фриза, относится к задачам, для которых препятствия к интегрируемости, о которых говорилось выше, выделены в явном виде. Некоторое представление о многообразии этих обобщённых уравнений Кортевега—де Фриза даёт приведённый ниже список:

#### УРАВНЕНИЯ ТИПА КОРТЕВЕГА—ДЕ ФРИЗА

$$u_t = u_3 + P(u)u_1, \quad P''' = 0, \quad (3.4)$$

$$u_t = u_3 - \frac{1}{2}u_1^3 + (\alpha e^{2u} + \beta e^{-2u})u_1. \quad (3.5)$$

$$u_t = u_3 - \frac{3}{2} \frac{u_2^2}{u_1} + \frac{r(u)}{u_1}, \quad \frac{d^5 r(u)}{du^5} = 0. \quad (3.6)$$

Общая задача о полиномиальных уравнениях  $u_t = F([u])$  произвольного порядка, обладающих высшими симметриями, была исследована в работе [5], в которой для интегрирования по частям использовался альтернативный подход, предложенный И.М. Гельфандом. Существенную роль при этом играли свойства однородности рассматриваемых многочленов  $F([u])$  и теоремы о делимости, связанные с теорией чисел.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. L.Comtet *Advanced Combinatorics* // Dordrecht. 1974.
2. Faà di Bruno *Note sur un nouvelle formulae de calcul differentiel* // Quart.J.M. 1857. 1. P. 359–360.
3. Rumien Mishkov *Generalization of the formula of Faà di Bruno for a composite function with vector argument* // Internat. J.Math. 2000. 24(7). P. 481–491.
4. Жибер А.В., Муртазина Р.Д., Хабибуллин И.Т., Шабат А.Б. *Характеристические кольца Ли и нелинейные интегрируемые уравнения*. Москва-Ижевск. 2012.
5. J.Sanders, J.P.Wang *On the integrability of homogeneous scalar evolution equations* // Journal of Diff. Eq-s. 1998. 147. P. 410–34.

6. Веселов А.П., Шабат А.Б. *Одевающая цепочка и спектральная теория оператора Шредингера* // Функц. Анализ и его прилож. 1993. **27**(2). С. 1–21.
7. A.B. Shabat, V.V. Sokolov *Classification of integrable evolution equations* // Soviet Scientific Reviews, Section C. N.Y. Harwood Academic Publishers. 1984. V. 4. P. 221–280.
8. Жибер А.В., Шабат А.Б. *Ур. Клейна-Гордона с нетривиальной группой* // ДАН СССР. 1979. **247**(5).
9. Шабат А., Ямилов Р. *Экспоненц. системы типа I и матрицы Кармана*. Preprint. Ufa. 1981. С. 1–22.
10. Лезнов А.Н. *О полной интегрируемости одной нелинейной системы дифференциальных уравнений в частных производных в двумерном пространстве* // ТМФ. 1980. **42**(3). С. 343–349.
11. Ибрагимов Н.Х., Шабат А.Б. *О бесконечных алгебрах Ли-Беклунда* // Функц. Анализ и его прилож. 1980. **14**(4). С. 79–80.

Алексей Борисович Шабат,  
ИТФ РАН им. Л.Д. Ландау,  
просп. Академика Семенова, д. 1-А,  
142432, г. Черноголовка, Россия  
КЧГУ им. У.Д. Алиева,  
ул. Ленина, 23,  
369200, г. Карачаевск, Россия  
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,  
ул. Чернышевского, 112,  
450077, г. Уфа, Россия  
E-mail: shabatab@mail.ru

Магомед Хочалаевич Эфендиев,  
КЧГУ им. У.Д. Алиева,  
ул. Ленина, 23,  
369200, г. Карачаевск, Россия  
E-mail: kchr1927@gmail.ru