

УДК 517.54

КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ КРУГОВЫХ ОБЛАСТЕЙ НА КОНЕЧНО-СВЯЗНЫЕ ОБЛАСТИ НЕСМИРНОВСКОГО ТИПА

Ф.Г. АВХАДИЕВ, П.Л. ШАБАЛИН

Аннотация. Рассматриваются каноническая факторизация и интегральные представления для производных конформных отображений круговых областей на конечно-связные области несмирновского типа. С использованием функций класса Зигмунда получены условия глобальной однолистности. Аналогичные результаты ранее были доказаны рядом авторов лишь для случая односвязных областей.

Ключевые слова: Несмирновская область, условие Зигмунда, условие однолистности, оператор Шварца.

Mathematics Subject Classification: 30C45, 30C55, 30C62, 31A20

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим конформные отображения $f : D \rightarrow \Omega$ единичного круга $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ на жордановы области Ω со спрямляемыми границами. Известно ([1] с. 89, 107), что f' принадлежит классу Харди $H^1(D)$ по теореме Рисса и имеет место каноническая факторизация В.И. Смирнова, определяемая формулами: $f' = e^{i\gamma}(f')^{ext}(f')^{int}$,

$$\ln(f')^{ext}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + ze^{-i\theta}}{1 - ze^{-i\theta}} \ln |f'(e^{i\theta})| d\theta, \quad \ln(f')^{int}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + ze^{-i\theta}}{1 - ze^{-i\theta}} d\mu(\theta), \quad (1.1)$$

где $\gamma = \text{const} \in \mathbb{R}$, μ — непрерывная невозрастающая функция с производной, почти всюду равной нулю. В 1928 г. В.И. Смирновым [2] впервые был рассмотрен класс областей Ω , характеризующихся отсутствием сингулярного фактора, т.е. тем, что $(f')^{int}(z) \equiv 1$. М.В. Келдыш и М.А. Лаврентьев [3] геометрически построили пример области Ω , для которой $(f')^{ext}(z) \equiv 1$, доказав тем самым существование несмирновских областей. Более общий, аналитический подход построения несмирновских областей был предложен Дюреном, Шапиро и Шилдсом [4] в 1966 г. с применением ряда интересных фактов из различных областей теории функций. В частности, они пользуются функциями, удовлетворяющими условию Зигмунда [5] $|\nu(\theta + \tau) - 2\nu(\theta) + \nu(\theta - \tau)| = O(\tau)$, для характеристики функций $\nu(\theta) = \mu(\theta) + \int_0^\theta \ln |f'(e^{it})| dt$ и условием Альфорса и Вейля [6]

$$\sup_{z \in D} (1 - |z|^2)^2 \left| (f''(z)/f'(z))' - (1/2) (f''(z)/f'(z))^2 \right| < 2, \quad (1.2)$$

гарантирующим глобальную однолистность конформного отображения $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ и квазиконформную продолжимость отображения f на всю плоскость. Развитие результатов [4] с применениями к теории общих и прикладных обратных краевых задач дано в работах авторов [7] и [8].

F.G. AVKHADIEV, P.L. SHABALIN, CONFORMAL MAPPINGS OF CIRCULAR DOMAINS ON FINITELY-CONNECTED NON-SMIRNOV TYPE DOMAINS.

© АВХАДИЕВ Ф.Г., ШАБАЛИН П.Л. 2017.

Работа выполнена при финансовой поддержке фонда РФФИ (проект N 14-01-00371-а).

Поступила 25 июля 2016 г.

Как отмечает Н.Г. Макаров [9] в 1989 г., вопрос о полной характеристизации областей Смирнова остается открытым. Общего критерия нет до сих пор, хотя в этом направлении имеется ряд интересных результатов. Среди них можно выделить решение трудной задачи, полученное П.В. Джонсом и С.К. Смирновым [10] в 1999 году: несмирновость области Ω не влечет несмирновость ее дополнения $\Omega^- := \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\Omega}$. Отметим, что в [10] существенно используются результаты работ [11] и [12] по локальной характеристизации границы области с помощью гармонических мер. Дальнейшее развитие этих результатов можно найти в статье В.Н. Дубинина [13].

Хорошо известны естественные обобщения классов Харди и теоремы факторизации В.И. Смирнова на случай конечно-связных областей. История проблем, оригинальные определения и результаты по факторизации и интегральным представлениям для случая многосвязных областей описаны в статьях Г.Ц. Тумаркина и С.Я. Хавинсона [14], [15], Г.Ц. Тумаркина [16] и Д. Хавинсона [17].

Целью этой работы является обобщение результатов Дюрена, Шапиро и Шилдса [4] на случай конечно-связных областей и распространение наших результатов из [7] и [8] на двусвязные области. Отметим попутно, что переход от односвязных к конечно-связным областям не представляет затруднений, если речь идет о локальных свойствах граничных кривых без явных оценок. Но нас будут интересовать критерии глобальной однолистности по граничным данным, и придется иметь дело с усложненными интегральными представлениями и связанными с ними оценками. И, кроме того, необходимы подходящие обобщения приведенного выше условия Альфорса-Вейля (1.2) для глобальной однолистности. Для вывода условий однолистности мы будем существенно опираться на методы и результаты работ [18]–[23].

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ.

Введем некоторые обозначения и определения. Пусть D_n — круговая (т.е. каждая связная граничная компонента является окружностью) n –связная область с невырожденными граничными компонентами $\gamma_k = \{z : |z - a_k| = R_k\}$, $k = \overline{1, n}$, причем $a_n = 0$, $R_n = 1$ и окружность $\gamma_n = \{z : |z| = 1\}$ охватывает остальные.

Определение 1 (см. [14]). Класс Харди $H_1(D_n)$ — множество голоморфных в D_n функций g таких, что для заданных g и γ_k ($k = \overline{1, n}$) найдется последовательность окружностей $\gamma_k^j \subset D_n$ ($j = 1, 2, \dots$), удовлетворяющая условиям: $\gamma_k^j \rightarrow \gamma_k$ и

$$\sup_j \int_{\gamma_k^j} |g(z)dz| < \infty. \quad (2.1)$$

Пусть f осуществляет однолистное отображение D_n на некоторую область Ω_n . Предполагается, что в D_n функция f голоморфна и непрерывно продолжима на границу $\partial D_n = \bigcup_{k=1}^n \gamma_k$, и это отображение продолжается до гомеоморфизма границ. Для случая $n > 1$ существует два различных определения класса В.И. Смирнова, эквивалентность которых доказана в [14].

Определение 2 [14]. Область Ω_n с жордановой спрямляемой границей называется областью класса В.И. Смирнова, если выполнено одно из следующих требований:

а) функция $\ln f'$ представима оператором Шварца от предельных значений $\ln f'(\zeta_k)$, $\zeta_k = a_k + R_k e^{i\theta}$, $k = \overline{1, n}$;

б) области Ω_{nk} принадлежат классу В.И. Смирнова, $k = \overline{1, n}$, где Ω_{nk} — односвязная область с границей $\Gamma_k = f(\gamma_k)$, причем $\Omega_{nk} \supset \Omega_n$, $\bigcap_{k=1}^n \Omega_{nk} = \Omega_n$.

Представление (1.1) характеризует лишь то, что $f'(z) \neq 0$ и $f' \in H_1(D_1)$, поэтому функция f может быть неоднолистной в $D_1 \equiv D$ и в случае $\mu(\theta) \equiv 0$. Имеются многочисленные исследования, указывающие различные дополнительные ограничения на $\ln |f'(e^{i\theta})|$ при $\mu(\theta) \equiv 0$, гарантирующие однолистность f в D_1 . Для случая $\mu(\theta) \not\equiv 0$ в статьях [4], [7] и [8] устанавливается связь глобальной однолистности f с принадлежностью ν классу Зигмунда $\Lambda(K)$ (т.е. $|\nu(\theta + h) - 2\nu(\theta) + \nu(\theta - h)| \leq Kh$) в виде ограничений константы $K > 0$.

Следуя Г.Ц. Тумаркину [16] и Д. Хавинсону [17], получим удобную для нас формулу, восстанавливающую значения функции $g = f'$ класса $H_1(D_n)$ по известному с точностью до множества меры нуль модулю граничных значений $\Phi_k(\theta) = |g(\zeta_k(\theta))|$, $\zeta_k(\theta) = a_k + R_k e^{i\theta}$, $k = \overline{1, n}$. Отметим, что доказательство структурной формулы класса H_1 в односвязном случае $n = 1$ предложено В.И. Смирновым и связано с построением наилучшей аналитической мажоранты некоторого семейства аналитических функций. Этот результат по построению мажорант обобщен Г.Ц. Тумаркиным [16]. Опишем вкратце основной результат. Пусть H — семейство функций g , аналитических в конечно-связной области Ω_n , Ω_n^j — последовательность областей, сходящаяся при $j \rightarrow \infty$ к Ω , и такая, что

$$\int_{\Gamma^j} \sup_{g \in H} \ln^+ |g(z)| \frac{\partial G_j(z, z_0)}{\partial n} ds \leq C < \infty, \quad j = 1, 2, \dots \quad (2.2)$$

Здесь Γ^j — граница области Ω_n^j , $G_j(z, z_0)$ — функция Грина области Ω_n^j с полюсом в точке $z_0 \in \Omega_n^j$, $j = 1, 2, \dots$. Обозначим через u наилучшую гармоническую мажоранту субгармонической функции $\sup_{g \in H} \ln |g(z)|$. Пусть v — сопряженная гармоническая функция. Тогда, если

$\tilde{g}(z) = \exp\{u(z) + iv(z)\}$ будет однозначной в Ω_n , она и будет наилучшей аналитической мажорантой семейства H . Если же построенная функция $\tilde{g}$ окажется неоднозначной, то наилучшей аналитической мажоранты не существует. Обратимся с этих позиций к классу $H_1(D_n)$. Условие (2.1) обеспечивает выполнение неравенства (2.2). Следовательно, существует наилучшая гармоническая мажоранта u , однако при этом построенная функция $\tilde{g}$ может оказаться неоднозначной. Рассмотрим неотрицательные функции $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$, удовлетворяющие условиям

$$\Phi_k \in L^1[-\pi, \pi], \quad \ln \Phi_k \in L^1[-\pi, \pi],$$

$$\sum_{j \neq k} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_j(\theta) P_j(z_k, z_j(\theta)) d\theta = A, \quad k = \overline{1, n}, \quad A = \text{const}, \quad (2.3)$$

где $P_j(z, z_j) = \text{Re } S_j(z, z_j)$, $\{S_j(z, z_j)\}_{j=1}^n$ — ядро Шварца для круговой области D_n , предложенное В.А. Зморевичем (см., например, [17]). Через $\Phi(D_n)$ обозначим подкласс $H_1(D_n)$ функций g с однозначным логарифмом, таких что почти всюду на γ выполняется неравенство $|g_k(z_k(\theta))| \leq \Phi_k(\theta)$, $k = \overline{1, n}$. Наилучшей гармонической мажорантой для $\sup_{g \in \Phi(D_n)} \{\ln |g(z)|\}$ будет

$$u(z) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_k(\theta) P_k(z, z_k(\theta)) d\theta - A, \quad z \in D_n.$$

В силу соотношения (2.3) будет однозначной в D_n аналитическая функция $\tilde{g}$, определяемая равенством

$$\tilde{g}(z) = \exp \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_k(\theta) S_k(z, z_k(\theta)) d\theta - A \right\}. \quad (2.4)$$

Однозначным является и ее логарифм $\ln \tilde{g}(\zeta)$. Пусть теперь $g \in H_1(D_n)$. Известно, что почти всюду на γ_k существуют угловые граничные значения $\Phi_k(\theta) = |g_k(z_k(\theta))|$, причем Φ_k и $\ln \Phi_k$ — суммируемые функции. Для приведения аналитической функции $\ln g$ к однозначному виду рассмотрим функцию, определяемую равенством

$$\Theta(z) = \prod_{k=1}^n [\Theta_k(z)]^{-\alpha_k}.$$

Здесь Θ_k конформно (но не однолистно) отображает D_n на область $q_k < |w| < 1$, причем окружности $|w| = q_k$ соответствуют взаимно-однозначно окружности γ_k . Как доказано в работе [15], имеется единственная возможность такого выбора чисел δ, α_k , что $\ln F$, $F(z) = z^{-\delta} g(z) \Theta(z)$, будет однозначной аналитической функцией. Функция F обладает почти везде на γ_k угловыми граничными значениями $|F(z_k(\theta))| = |z_k(\theta)|^{-\delta} \Phi_k(\theta) q_k^{-\alpha_k}$, удовлетворяющими условиям (2.3). Следовательно, F можно представить в виде $F(z) = e^{i\beta} \tilde{g}(z) \sigma(z)$, где $\tilde{g}$ — функция максимального модуля (2.4), голоморфная в D_n функция $\ln \sigma$ принадлежит классу Каратеодори и, следовательно, может быть представлена формулой

$$\sigma(z) = \exp \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_k(z, z_k(\theta)) d\nu_k(\theta) - B \right\}, \quad B = \sum_{j \neq k} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_j(z_k, z_j(\theta)) d\nu_j(\theta), \quad (2.5)$$

$k = \overline{1, n}$, $\nu_j(\theta)$ — невозрастающая сингулярная функция. Итак, справедливо утверждение: *каждую функцию $g = f'$ класса $H_1(D_n)$ можно представить в виде*

$$g(z) = e^{i\beta} z^{\delta} \Theta^{-1}(z) \tilde{g}(z) \sigma(z), \quad (2.6)$$

где σ — голоморфная в D_n функция вида (2.5), $\tilde{g}$ — функция с представлением (2.4), максимальная для набора $|z_k(\theta)|^{-\delta} \Phi_k(\theta) q_k^{-\alpha_k}$, $k = \overline{1, n}$, $z^{\delta} \Theta^{-1}(z)$ выделяет неоднозначную часть $\ln g(z)$.

3. Условия однолиственности для отображения кольца

Пусть функция f голоморфна в кольце $D_2 \equiv E(q, 1) = \{z \in \mathbb{C} : q < |z| < 1\}$ и непрерывно продолжима на окружность $|\zeta| = q \in (0, 1)$. Предположим, что $f' \in H_1(E(q, 1))$, $f'(z) \neq 0$ для любой точки $z \in E(q, 1)$. Тогда для любой точки $z \in E(q, 1)$

$$f(z) = \int \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(\theta) S_q(qz^{-1} e^{i\theta}) d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_q(ze^{-i\theta}) d\mu(\theta) - A \right\} dz. \quad (3.1)$$

Здесь S_q — ядро Вилля, т.е.

$$S_q(z) = \frac{1+z}{1-z} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1+q^{2\nu}z}{1-q^{2\nu}z} - \frac{1+q^{2\nu}z^{-1}}{1-q^{2\nu}z^{-1}},$$

считаем, что выполняется соотношение

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(\theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\mu(\theta) = A = \text{const},$$

где μ — невозрастающая сингулярная функция с производной, почти всюду равной нулю, а P — непрерывная 2π -периодическая функция, сингулярная функция μ продолжена на всю числовую прямую равенством: $\mu(\theta + 2\pi) = \mu(\theta) - 2\pi\beta$, $\forall \theta \in \mathbb{R}$, где $\beta = -(2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} d\mu(\theta) \geq 0$.

Пусть $\alpha \in (0, 1)$, K — положительная постоянная. Рассмотрим следующие три класса вещественнозначных функций:

а) $\lambda(K)$ — класс всех 2π -периодических функций P , удовлетворяющих условию Липшица $|P(\theta + h) - P(\theta)| \leq K$, где $\theta, h \in \mathbb{R}$;

б) $\Lambda_{1+\alpha}(K)$ — класс всех 2π -периодических функций P , удовлетворяющих условию Зигмунда порядка $1 + \alpha \in (1, 2)$:

$$|P(\theta + h) - 2P(\theta) + P(\theta - h)| \leq K h^{1+\alpha} \quad \forall \theta, h \in \mathbb{R};$$

с) $\Lambda(K)$ — класс всех сингулярных функций μ , удовлетворяющих условию Зигмунда порядка 1:

$$|\mu(\theta + h) - 2\mu(\theta) + \mu(\theta - h)| \leq K h \quad \forall \theta, h \in \mathbb{R}.$$

Получим условия на положительные числа q, β и K , гарантирующие однолиственность отображения (3.1). Нам потребуются неравенства

$$\frac{4q\beta}{(1-q)^2} + \frac{K}{1-q^2} \left[\left(\frac{\pi}{2} \right)^\alpha 2q + (1+2q)B(\alpha) \right] < 1, \quad (3.2)$$

$$\frac{4q\beta}{(1-q)^2} + K \left[1 + \frac{(3-q^2)}{(1-q)^2} \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^\alpha q + B(\alpha) \right) + \left(6,6 + \frac{17,3q}{1-q^2} \right) \frac{1+1,8q}{1-q^2} \right] < 1, \quad (3.3)$$

где

$$B(\alpha) = \frac{1+\alpha}{\pi} \int_0^\pi \frac{t^\alpha}{\sin t} dt.$$

Теорема 3.1. Пусть α, q — числа, лежащие в интервале $(0, 1)$. Пусть, далее, f — гомоморфная функция, определенная в кольце $E(q, 1)$ интегральным представлением (3.1), в котором $P \in \Lambda_{1+\alpha}(K)$ и $\mu \in \Lambda(K)$ для некоторого $K > 0$. Функция f будет осуществлять однолистное конформное отображение $E(q, 1)$, если числа $K > 0$ и $q\beta > 0$ достаточно малы, а именно, удовлетворяют неравенствам (3.2) и (3.3).

Для доказательства основного результата этого раздела нам понадобится ряд вспомогательных оценок. Пусть

$$g_1(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi P(\theta) S_q(qz^{-1}e^{i\theta}) d\theta, \quad g_2(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi S_q(ze^{-i\theta}) d\mu(\theta), \quad z \in E(q, 1).$$

Лемма 3.1. Пусть $z = re^{i\varphi} \in E(q, 1)$. Если $P \in \lambda(K)$, то справедливо неравенство

$$\left| \operatorname{Re} \frac{\partial}{\partial \varphi} g_1(re^{i\varphi}) \right| \leq K,$$

если $P \in \Lambda_{1+\alpha}(K)$, то

$$\left| \operatorname{Im} \frac{\partial}{\partial \varphi} g_1(re^{i\varphi}) \right| \leq \frac{K(3-q^2)}{1-q^2} \left[\left(\frac{\pi}{2} \right)^\alpha q + B(\alpha) \right], \quad B(\alpha) = \frac{1+\alpha}{\pi} \int_0^\pi \frac{t^\alpha}{\sin t} dt.$$

Доказательство. Полагая $S_q(re^{it}) = P_q(r, t) + iQ_q(r, t)$,

$$P_q(r, t) = P(r, t) + P_q^0(r, t), \quad P(r, t) = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r \cos t}, \quad P_q^0(r, t) = \sum_{j=1}^\infty [P(q^{2j}r, t) - P(q^{2j}/r, t)],$$

для гармонической в $E(q, 1)$ функции $\frac{\partial}{\partial \varphi} \operatorname{Re} g_1(z)$, $z = re^{i\varphi}$, получим представление

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \operatorname{Re} g_1(z) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi P(\varphi + t) \frac{\partial}{\partial t} P_q(q/r, t) dt,$$

в котором обозначено $t = \theta - \varphi$. Заменяя t на $-t$, с учетом нечетности функции $\frac{\partial}{\partial t}P_q(q/r, t)$ получим

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \operatorname{Re} g_1(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(\varphi - t) \frac{\partial}{\partial t} P_q(q/r, t) dt,$$

следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \operatorname{Re} g_1(z) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [P(\varphi + t) - P(\varphi - t)] \frac{\partial}{\partial t} P_q(q/r, t) dt.$$

Оценивая под знаком интеграла по модулю с учетом неравенства $\frac{\partial}{\partial t}P_q(r, t) < 0$ (см.[24]), получим

$$\left| \frac{\partial}{\partial \varphi} \operatorname{Re} g_1(z) \right| \leq \frac{K}{\pi} \int_0^{\pi} t \left| \frac{\partial}{\partial t} P_q(q/r, t) \right| dt = -K P_q(q/r, \pi) + \frac{K}{\pi} \int_0^{\pi} P_q(q/r, t) dt.$$

Для доказательства первого утверждения леммы осталось заметить, что

$$\int_0^{\pi} P_q(\rho, t) dt = \pi, \quad q < \rho < 1.$$

Пусть теперь $P \in \Lambda_{1+\alpha}(K)$. Легко проверяется равенство

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \operatorname{Im} g_1(z) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} Q_q(q/r, \theta - \varphi) d\theta,$$

где $Q_q(\rho, t) = Q(\rho, t) + Q_q^0(\rho, t)$,

$$Q(\rho, t) = \frac{2\rho \sin t}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos t}, \quad Q_q^0(\rho, t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} Q(q^{2\nu}\rho, t) + Q(q^{2\nu}/\rho, t).$$

Используя четность функции $\frac{\partial}{\partial t}Q_q(q/r, t)$ и равенство

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial}{\partial t} Q_q(\rho, t) dt = 0, \quad q < \rho < 1,$$

формулу для $\frac{\partial}{\partial \varphi} \operatorname{Im} g_1(z)$ преобразуем к виду

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \operatorname{Im} g_1(z) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [P(\varphi + t) - 2P(\varphi) + P(\varphi - t)] \frac{\partial}{\partial t} Q_q(q/r, t) dt.$$

Отсюда получаем неравенство

$$\left| \frac{\partial}{\partial \varphi} \operatorname{Im} g_1(z) \right| \leq \frac{K}{2\pi} \int_0^{\pi} t^{1+\alpha} \left| \frac{\partial}{\partial t} Q_q(q/r, t) \right| dt,$$

которое представим следующим образом

$$\left| \frac{\partial}{\partial \varphi} \operatorname{Im} g_1(z) \right| \leq \frac{K}{2\pi} [I_1(q/r, \alpha) + I_2(q/r, \alpha)], \quad (3.4)$$

$$I_1(\rho, \alpha) = \int_0^{\pi} t^{1+\alpha} \left| \frac{\partial}{\partial t} Q(\rho, t) \right| dt, \quad I_2(\rho, \alpha) = \int_0^{\pi} t^{1+\alpha} \left| \frac{\partial}{\partial t} Q_q^0(\rho, t) \right| dt,$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}Q(\rho, t) &= \frac{(1 + \rho^2)2\rho \cos t - 4\rho^2}{(1 + \rho^2 - 2\rho \cos t)^2}, \quad q < \rho < 1, \\ \frac{\partial}{\partial t}Q_q^0(q/r, t) &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[\frac{\partial}{\partial t}Q(q^{2\nu}r, t) + \frac{\partial}{\partial t}Q(q^{2\nu}/r, t) \right].\end{aligned}\quad (3.5)$$

Формулу для $I_1(\rho, \alpha)$ перепишем в виде

$$I_1(\rho, \alpha) = \int_0^{\tau} t^{1+\alpha} \frac{\partial}{\partial t}Q(\rho, t) dt - \int_{\tau}^{\pi} t^{1+\alpha} \frac{\partial}{\partial t}Q(\rho, t) dt,$$

где $\tau = \arcsin(1 - \rho^2)/(1 + \rho^2)$. После интегрирования по частям получим

$$I_1(\rho, \alpha) = 2\tau^{1+\alpha}Q(\rho, \tau) + (1 + \alpha) \int_{\tau}^{\pi} t^{\alpha}Q(\rho, t) dt - (1 + \alpha) \int_0^{\tau} t^{\alpha}Q(\rho, t) dt.$$

В силу равенства $Q(\rho, \tau) = 2\rho/(1 - \rho^2)$ будем иметь

$$I_1(\rho, \alpha) \leq 2\rho \frac{\pi^{1+\alpha}(1 - \rho^2)^{\alpha}}{2^{\alpha}(1 + \rho^2)^{1+\alpha}} + (1 + \alpha) \int_0^{\pi} t^{\alpha}Q(\rho, t) dt. \quad (3.6)$$

Полагая в (3.6) $\rho = q/r$ и оценивая правую часть с учетом неравенства $Q(\rho, t) < 2\rho/\sin t$, получим

$$I_1(q/r, \alpha) < 2\pi \left[\left(\frac{\pi}{2} \right)^{\alpha} q + B(\alpha) \right]. \quad (3.7)$$

Для оценки $I_2(q/r, \alpha)$ отметим, что ряд (3.5) сходится абсолютно и равномерно, поэтому можем записать неравенство

$$I_2(q/r, \alpha) < \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_0^{\pi} t^{1+\alpha} \left| \frac{\partial}{\partial t}Q(q^{2\nu}r, t) \right| dt + \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_0^{\pi} t^{1+\alpha} \left| \frac{\partial}{\partial t}Q(q^{2\nu}/r, t) \right| dt,$$

из которого с использованием (3.6) получим оценку

$$\begin{aligned}I_2(q/r, \alpha) &< \frac{\pi^{1+\alpha}}{2^{\alpha}} \sum_{\nu=1}^{\infty} q^{2\nu} \frac{(1 - q^{4\nu+2})^{\alpha}}{(1 + q^{4\nu+2})^{1+\alpha}} + \frac{\pi^{1+\alpha}}{2^{\alpha}} \sum_{\nu=1}^{\infty} q^{2\nu-1} \frac{(1 - q^{4\nu})^{\alpha}}{(1 + q^{4\nu})^{1+\alpha}} + \\ &+ (1 + \alpha) \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_0^{\pi} t^{\alpha}Q(q^{2\nu}r, t) dt + (1 + \alpha) \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_0^{\pi} t^{\alpha}Q(q^{2\nu}/r, t) dt.\end{aligned}$$

Отсюда выводим соотношение

$$I_2(q/r, \alpha) < \frac{4\pi q}{1 - q^2} \left[\left(\frac{\pi}{2} \right)^{\alpha} + B(\alpha) \right].$$

Подставляя последнее неравенство и неравенство (3.7), в (3.4), получим второе утверждение леммы 3.1.

Лемма 3.2. Пусть $z = re^{i\varphi} \in E(q, 1)$. Если $\mu \in \Lambda(K)$, то справедливо неравенство

$$\left| \operatorname{Re} \frac{\partial}{\partial \varphi} g_2(re^{i\varphi}) \right| \leq K \frac{0, 4(1 + r) + 2, 1q/(1 - q)}{1 - r}.$$

Доказательство. От обеих частей равенства

$$\operatorname{Re} g_2(z) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mu(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} P_q(r, \theta - \varphi) d\theta, \quad z = re^{i\varphi}.$$

возьмем производную по φ , получим

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \operatorname{Re} g_2(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mu(\theta) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} P_q(r, \theta - \varphi) d\theta, \quad z = re^{i\varphi}.$$

С использованием четности функции $\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} P_q(r, \theta - \varphi)$ последнюю формулу представим в виде

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \operatorname{Re} g_2(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} [\mu(\varphi + t) - 2\mu(\varphi) + \mu(\varphi - t)] \frac{\partial^2}{\partial t^2} P_q(r, t) dt, \quad z = re^{i\varphi}.$$

В силу принадлежности функции μ классу $\Lambda(K)$ получаем неравенство

$$\left| \frac{\partial}{\partial \varphi} \operatorname{Re} g_2(z) \right| \leq \frac{K}{2\pi} \int_0^{\pi} t \left| \frac{\partial^2}{\partial t^2} P_q(r, t) \right| dt.$$

С использованием разложения $\frac{\partial^2}{\partial t^2} P_q(r, t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} P(r, t) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} P_q^0(r, t)$ запишем

$$\left| \frac{\partial}{\partial \varphi} \operatorname{Re} g_2(z) \right| \leq I_1(r) + I_2(r), \quad z = re^{i\varphi},$$

где

$$I_1(r) = \frac{K}{2\pi} \int_0^{\pi} t \left| \frac{\partial^2}{\partial t^2} P(r, t) \right| dt, \quad I_2(r) = \frac{K}{2\pi} \int_0^{\pi} t \left| \frac{\partial^2}{\partial t^2} P_q^0(r, t) \right| dt.$$

Следуя работе [7], мы получаем неравенства

$$I_1(r) \leq \frac{0,4 K(1+r)}{1-r}, \quad I_1(r) \leq r \frac{2,1 K}{1-r}. \quad (3.8)$$

Учитывая формулу

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} P_q^0(r, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} P(rq^{2j}, t) - \frac{\partial^2}{\partial t^2} P(q^{2j}/r, t) \right],$$

в которой ряды мажорируются геометрической прогрессией с общим членом $12q^{2j-1}/(1-q)^3$ и, следовательно, сходятся абсолютно и равномерно для $q \leq r \leq 1$, получим следующее неравенство для $I_2(r)$:

$$I_2(r) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{K}{2\pi} \int_0^{\pi} t \left| \frac{\partial^2}{\partial t^2} P(rq^{2j}, t) \right| dt + \frac{K}{2\pi} \int_0^{\pi} t \left| \frac{\partial^2}{\partial t^2} P(q^{2j}/r, t) \right| dt \right).$$

Привлекая второе неравенство (3.8), запишем

$$I_2(r) \leq 2,1 K \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{rq^{2j}}{1-rq^{2j}} + \frac{q^{2j}/r}{1-q^{2j}/r} \right) \leq 2,1 K \sum_{j=1}^{\infty} \frac{q^j}{1-q^j} < \frac{2,1 K q}{(1-q)^2}.$$

Отсюда и из первого неравенства (3.8) получаем утверждение леммы.

Лемма 3.3. Пусть функция F голоморфна в кольце $E(q, 1)$, непрерывно продолжима на граничную окружность $|z| = q$ и имеет на окружности $|z| = q$ вещественную часть, равную нулю. Если внутри кольца $E(q, 1)$ справедливо неравенство $|\operatorname{Re} F(re^{i\varphi})| \leq \frac{C}{(1-r)}$ с постоянной C , то

$$|F(z)| \leq \frac{8, 2C(1+1, 8q)}{(1-r)(1-q^2)} + \max_{\varphi \in [-\pi, \pi]} |\operatorname{Im} F(qe^{i\varphi})|.$$

Доказательство. Пусть ρ — некоторое число, удовлетворяющее условию $q < \rho < 1$, $\tilde{q} = q/\rho$. Функция F голоморфна в кольце $E(\tilde{q}, \rho) \subset E(q, 1)$ и непрерывно продолжима на граничную окружность $|\zeta| = \rho$. Оценим вначале модуль производной функции F , которую запишем в виде

$$F'(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re} F(\rho e^{i\theta}) \left[\frac{d}{dz} S(\rho^{-1} z e^{-i\theta}) + \frac{d}{dz} S_{\tilde{q}}^0(\rho^{-1} z e^{-i\theta}) \right] d\theta.$$

Поскольку

$$\left| \frac{d}{dz} S(\rho^{-1} z e^{-i\theta}) \right| = \frac{2\rho}{\rho^2 - r^2} P(r/\rho, \theta - \varphi),$$

$$\left| \frac{d}{dz} S_{\tilde{q}}^0(\rho^{-1} z e^{-i\theta}) \right| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{2\rho \tilde{q}^{2j}}{\rho^2 - r^2 \tilde{q}^{4j}} P(r \tilde{q}^{2j}/\rho, \theta - \varphi) + \frac{2\rho \tilde{q}^{2j}}{r^2 - \rho^2 \tilde{q}^{4j}} P(\rho \tilde{q}^{2j}/r, \theta - \varphi) \right]$$

то, оценивая в представлении для $F'(z)$ по модулю, получим

$$|F'(z)| \leq \frac{C}{1-\rho} \left[\frac{2\rho}{\rho^2 - r^2} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2\rho \tilde{q}^{2j}}{\rho^2 - r^2 \tilde{q}^{4j}} + \frac{2\rho \tilde{q}^{2j}}{r^2 - \rho^2 \tilde{q}^{4j}} \right].$$

Учитывая неравенства

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{2\rho \tilde{q}^{2j}}{\rho^2 - r^2 \tilde{q}^{4j}} \leq \frac{2\rho}{\rho^2 - r^2} \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{q}^{2j} = \frac{2\rho q^2}{(\rho^2 - r^2)(\rho^2 - q^2)},$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{2\rho \tilde{q}^{2j}}{r^2 - \rho^2 \tilde{q}^{4j}} \leq \frac{2\rho}{r^2(1 - \tilde{q}^2)} \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{q}^{2j} \leq \frac{2\rho q^2}{r^2(\rho^2 - r^2)(\rho^2 - q^2)},$$

получим следующую оценку на $|F'(z)|$:

$$|F'(z)| \leq \frac{2C\rho}{(1-\rho)(\rho^2 - r^2)} \left[1 + \frac{q^2}{\rho^2 - q^2} + \frac{q^2}{r^2(\rho^2 - q^2)} \right].$$

Выбрав в этом неравенстве $\rho = (1 + \sqrt{2}r)/(1 + \sqrt{2})$, получим

$$|F'(z)| \leq \frac{8, 2C}{(1-r)^2} \left[1 + \frac{q^2}{1 - q^2} + \frac{q^2}{r^2(1 - q^2)} \right].$$

Интегрируя последнее неравенство по радиусу, получим утверждение леммы.

Доказательство теоремы 3.1. Рассмотрим отображение кольца $E(q, 1)$ функцией (3.1). Будем считать, что $P \in \Lambda_{1+\alpha}(K)$. Необходимым и достаточным условием выпуклости кривой Γ_q — образа окружности $\gamma_q = \{\zeta, \zeta = qe^{i\theta}, -\pi \leq \theta \leq \pi\}$ при отображении функцией f является неравенство

$$\lim_{z \rightarrow \zeta} \operatorname{Re} z \frac{f''(z)}{f'(z)} > -1, \quad \zeta \in \gamma_q. \quad (3.9)$$

Из формулы (3.1) получим

$$iz \frac{f''(z)}{f'(z)} = \frac{\partial}{\partial \varphi} g_1(z) + \frac{\partial}{\partial \varphi} g_2(z), \quad z = re^{i\varphi}.$$

Отсюда следует представление

$$i\zeta \frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)} = \frac{\partial}{\partial \varphi} g_1(\zeta) + \frac{\partial}{\partial \varphi} g_2(\zeta), \quad \zeta = qe^{i\varphi}.$$

Для выполнения условия (3.9) достаточно потребовать неравенства

$$\left| \operatorname{Im} \frac{\partial}{\partial \varphi} g_1(\zeta) + \operatorname{Im} \frac{\partial}{\partial \varphi} g_2(\zeta) \right| < 1. \quad (3.10)$$

Для функции

$$\left| \frac{\partial}{\partial \varphi} g_2(\zeta) \right| = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial}{\partial \varphi} Q_q(qe^{i(\varphi-\theta)}) d\mu(\theta), \quad \zeta = qe^{i\varphi},$$

приняв во внимание неравенство $\frac{\partial}{\partial t} Q_q(qe^{it}) < 4q/(1-q)^2$, получим

$$\left| \frac{\partial}{\partial \varphi} g_2(\zeta) \right| \leq \frac{4q}{(1-q)^2} \beta, \quad \zeta = qe^{i\varphi}, \quad \beta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |d\mu(\theta)|.$$

Для функции $\frac{\partial}{\partial \varphi} g_1(\zeta)$ по лемме 1 с учетом неравенства (3.6) имеем

$$\left| \operatorname{Im} \frac{\partial}{\partial \varphi} g_1(\zeta) \right| \leq \frac{K}{1-q^2} \left[\left(\frac{\pi}{2} \right)^\alpha 2q + (1+2q)B(\alpha) \right].$$

Следовательно, неравенство (3.10) будет выполнено в силу условия (3.2).

Из формулы (3.1) получим неравенство

$$\left| z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right| < \left| \frac{\partial}{\partial \varphi} g_1(z) \right| + \left| \frac{\partial}{\partial \varphi} g_2(z) \right|, \quad z = re^{i\varphi} \in E(q, 1).$$

Привлекая полученные выше оценки, запишем неравенство

$$\left| z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right| < \frac{4q\beta}{(1-q)^2} + K \left[1 + \frac{(3-q^2)}{(1-q)^2} \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^\alpha q + B(\alpha) \right) + \left(6, 6 + \frac{17, 3q}{1-q^2} \right) \frac{1+1, 8q}{1-q^2} \right],$$

из которого и условия (3.3) следует справедливость неравенства $|zf''(z)/f'(z)| < (1-|z|^2)^{-1}$ для любой точки $z \in E(q, 1)$.

Для завершения доказательства теоремы 3.1 для голоморфной в кольце $E(q, 1)$ функции f установим одно достаточное условие однолиственности методом продолжения, изложенным в [18]. А именно, докажем следующее

Утверждение. Пусть f голоморфна в $E(q, 1)$, гармоническая функция $\operatorname{Re} [zf''(z)/f'(z)]$ непрерывно продолжима на внутреннюю границу $|z| = q$. Если

$$|zf''(z)/f'(z)| < 1/(1 - |z|^2), \quad z \in E(q, 1), \quad (3.11)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re} [1 + \zeta f''(\zeta)/f'(\zeta)] d\theta = 2\pi, \quad \operatorname{Re} [1 + \zeta f''(\zeta)/f'(\zeta)] \geq 0, \quad \zeta = qe^{i\theta}, \quad (3.12)$$

то функция f будет однолистной в $E(q, 1)$.

Доказательство. В силу условия (3.12) образом окружности $\gamma_q := \{|\zeta| = q\}$, при отображении функцией f будет замкнутая выпуклая кривая Γ_q , однократно обходимая против часовой стрелки, когда θ изменяется от $-\pi$ до π . Возьмем какой-либо гомеоморфизм g круга $\bar{E}_q := \{z : |z| \leq q\}$ на замкнутую ограниченную область с границей Γ_q удовлетворяющую условию склейки $f(qe^{i\theta}) = g(qe^{i\theta})$. Пусть d – некоторое число $q < d < 1$. Определим отображение всей плоскости следующим образом

$$\hat{f}(\zeta) = \begin{cases} g(\zeta), & \zeta \in \bar{E}_q, \\ f(\zeta), & \zeta \in E(q, d), \\ f(d^2/\bar{\zeta}) + \left(\zeta - \frac{d^2}{\bar{\zeta}}\right)f'\left(\frac{d^2}{\bar{\zeta}}\right), & \zeta \in E\left(d, \frac{d^2}{q}\right), \\ f(qe^{i\theta}) + \left(1 - \frac{q}{d^2}\right)re^{i\theta}f'(qe^{i\theta}), & \zeta \in \bar{E}_{d^2/q} := \{\zeta : |\zeta| \geq d^2/q\}. \end{cases}$$

Функция $\hat{f}$ является локально однолистной во всей комплексной плоскости. Действительно, в $\bar{E}_q$ функция $\hat{f}(\zeta) \equiv g(\zeta)$ однолистка по построению. При $\zeta \in \bar{E}(q, d)$ неравенство $|f'(\zeta)| > 0$ следует из (3.11). В кольце $E\left(d, \frac{d^2}{q}\right)$ условием локальной однолистности функции $\hat{f}$ является неравенство $I = |\hat{f}_\zeta|^2 - |\hat{f}_{\bar{\zeta}}|^2 > 0$. Запишем явное выражение для якобиана отображения $\hat{f}$ в кольце $E\left(d, \frac{d^2}{q}\right)$

$$I = |f'(d^2/\bar{\zeta})|^2 \left[1 - \left| \left(\zeta - \frac{d^2}{\bar{\zeta}} \right) \frac{d^2}{\bar{\zeta}^2} \right|^2 \left| \frac{f''(d^2/\bar{\zeta})}{f'(d^2/\bar{\zeta})} \right|^2 \right],$$

из которого ясно, что положительная ориентация отображения есть следствие условия (3.11). Если же $\zeta \in \bar{E}_{d^2/q}$, то условие локальной однолистности в этой точке равносильно неравенству

$$1 + \operatorname{Re} qe^{i\theta} \frac{f''(qe^{i\theta})}{f'(qe^{i\theta})} + \frac{d^2}{r(d^2 - q^2)} > 0, \quad f'(qe^{i\theta}) \neq 0, \quad r = |\zeta| \geq \frac{d^2}{q},$$

вытекающему из условия (3.12).

Поскольку отображение $\hat{f}$ переводит любую последовательность точек, сходящуюся к бесконечности, в аналогичную, по теореме Адамара (см, например, [18], [21]) из локальной однолистности $\hat{f}$ следует однолистность во всей плоскости. Следовательно, f будет однолистной в кольце $E(q, 1)$.

Таким образом, теорема 3.1 доказана.

4. УСЛОВИЯ ОДНОЛИСТНОСТИ ОТОБРАЖЕНИЙ КОНЕЧНО-СВЯЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ

Пусть f осуществляет однолистное конформное отображение D_n на некоторую область Ω_n ; Ω_{nk} – односвязная область, введенная в определении 2б). Аналогично введем области D_{nk} . Очевидно, это круг или внешность круга с границей γ_k . Возьмем концентрическую с γ_k окружность γ'_k , $\gamma'_k = \{\zeta : |\zeta - a_k| = R'_k\}$, и через D'_{nk} обозначим круговое кольцо с границей $\gamma_k \cup \gamma'_k$.

Лемма 4.1. *Справедливо представление $f(\zeta) = (f_k \circ w_k)(\zeta)$, $\zeta \in D'_{nk}$, где f_k – любое из однолистных конформных отображений D_{nk} на Ω_{nk} , а w_k – гомеоморфизм D_{nk} на себя, конформный в D'_{nk} .*

Доказательство. Продолжим отображение f кольца D'_{nk} на двусвязную область Ω'_{nk} до гомеоморфизма $\hat{f}$ области D_{nk} на Ω_{nk} . Это можно сделать, например, следующим образом. Возьмем некоторую функцию φ_k , осуществляющую однолистное конформное отображение $D_{nk} \setminus D'_{nk}$ на область $\Omega_{nk} \setminus \Omega'_{nk}$. Тогда в качестве $\hat{f}$ можно взять функцию, определяемую равенствами

$$\hat{f}(\zeta) = \begin{cases} f(\zeta), & \zeta \in E'_{nk}, \\ \varphi(a_k + re^{i\tau}), & \tau = \arg\{\varphi^{-1}[f(a_k + R'_k e^{i\theta})] - a_k\}, \zeta = a_k + re^{i\theta} \in E_{nk} \setminus E'_{nk}. \end{cases}$$

Функция $\hat{f}$ осуществляет гомеоморфное, следовательно, внутреннее в смысле Стоилова отображение D_{nk} на Ω_{nk} . По теореме Стоилова, $\hat{f}(\zeta) = (F \circ w_k)(\zeta)$, где w_k – гомеоморфизм D_{nk} на себя, функция F является аналитической в D_{nk} . Поскольку $F(w_k) = (\hat{f} \circ \zeta)(w_k)$, то F однолистка в D'_{nk} , т.е. $F(z) = f_k(z)$. Конформность w_k в D'_{nk} сразу следует из равенства $w_k(\zeta) = (f_k^{-1} \circ f)(\zeta)$, $\zeta \in D'_{nk}$.

Лемма доказана.

Для дальнейшего нам удобно выделить узкое кольцо D''_{nk} , лежащее в кольце D'_{nk} . Именно, пусть $\gamma''_k = \{\zeta : |\zeta - a_k| = R''_k\}$, лежит в D'_{nk} . Тогда полагаем, что D''_{nk} – кольцо с границей $\gamma_k \cup \gamma''_k$. Учитывая аналитичность w_k на γ_k , по принципу симметрии Римана-Шварца получаем, что w_k является однолистной аналитической функцией в замкнутой области $\overline{D''_{nk}}$. Поэтому производные любого порядка от $w_k(\zeta)$ непрерывны и равномерно ограничены в $\overline{D''_{nk}}$. И, кроме того, существуют такие положительные постоянные C_j , что в $\overline{D''_{nk}}$ справедливы оценки

$$C_1 \leq |\ln w'_k(\zeta)| < C_2, \quad C_3 \leq (R_k - |\zeta - a_k|)/(R_k - |w_k - a_k|) \leq C_4. \quad (4.1)$$

С помощью леммы предложим простое доказательство эквивалентности определений 2а) и 2б). Действительно, имеем:

$$\ln f'(\zeta) = \ln f'_k(w_k(\zeta)) + \ln w'_k(\zeta), \quad \zeta \in D''_{nk}.$$

Пусть $\gamma_{k,\zeta}^m$ – замкнутые спрямляемые кривые из D''_{nk} , сходящиеся к γ_k при $m \rightarrow \infty$. Тогда кривые $\gamma_{k,z}^m = \{z : z = w_k(\zeta), \zeta \in \gamma_{k,\zeta}^m\}$ обладают аналогичными свойствами. В силу неравенств (4.1) получаем:

$$\int_{\gamma_{k,\zeta}^m} |\ln f'(\zeta) d\zeta| \leq M_1 \int_{\gamma_{k,z}^m} |\ln f'_k(z) dz| + M_2, \quad k = \overline{1, n}, \quad (4.2)$$

$$\int_{\gamma_{k,z}^m} |\ln f'_k(z) dz| \leq M_3 \int_{\gamma_{k,\zeta}^m} |\ln f'(\zeta) d\zeta| + M_4, \quad k = \overline{1, n}, \quad (4.3)$$

где $M_l, l = \overline{1, 4}$ – положительные постоянные.

Предположим, что $\Omega_n = f(E_n)$ принадлежит классу В.И. Смирнова и $\ln |f'(z)|$ представим по формуле Грина. Тогда согласно [14] функция $\ln f'$ принадлежит классу $H_1(D_n)$. На основании определения класса H_1 и неравенства (4.3) заключаем, что $\ln f'_k \in H_1(D_{nk})$. Следовательно, Ω_{nk} есть область класса В.И. Смирнова.

В обратную сторону утверждение доказывается аналогично, только вместо неравенства (4.3) нужно использовать (4.2).

На основании леммы 4.1 легко оценить порядок роста по $r = |\zeta - a_k|$, $R_k - \varepsilon \leq r \leq R_k$ вблизи границы γ_k многих функционалов для однолистных в D_n функций, если подобные оценки известны для функций, однолистных в круге или внешности круга. Именно этим мы воспользуемся для доказательства следующего утверждения.

Лемма 4.2. *Если f голоморфна и однолистка в D_n , то*

$$\sup_{z \in D_n} \left(\left| \frac{f''(z)}{f'(z)} \right| \prod_{k=1}^n (R_k - |z - a_k|) \right) = M(f) < \infty.$$

Доказательство. Если f_k однолистка в D_{nk} , то на основании известных результатов (см., например, [19], [23]) можно записать

$$\sup_{z \in E_{nk}} \left(\left| \frac{f''_k(z)}{f'_k(z)} (R_k - |z - a_k|) \right| \right) \leq M_1 < \infty. \quad (4.4)$$

Из леммы 4.1 следует, что

$$\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)} = \frac{f''_k(w_k(\zeta))}{f'_k(w_k(\zeta))} w'_k(\zeta) + \frac{w''_k(\zeta)}{w'_k(\zeta)}, \quad \zeta \in D''_{nk}.$$

Отсюда, с использованием (4.1), (4.4) и неравенства $C_5 \leq |w''_k(\zeta)/w'_k(\zeta)| < C_6$, получаем соотношение

$$\sup_{\zeta \in D''_{nk}} \left(\left| \frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)} (R_k - |\zeta - a_k|) \right| \right) \leq M_2 < \infty,$$

из которого, очевидно, следует утверждение леммы.

Рассмотрим теперь область Ω_n , не принадлежащую классу В.И. Смирнова и ограниченную жордановыми спрямляемыми кривыми. На основании теоремы Ф. Рисса $f' \in H_1(D_n)$, поэтому мы можем воспользоваться параметрическим представлением (2.6). Очевидно, справедлива следующая структурная формула для функции, отображающей некоторую каноническую область D_n на Ω_n :

$$f(z) = \int z^\delta \Theta^{-1}(z) \exp \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_k(z, z_k(\theta)) d\nu_k(\theta) - \alpha \right\} dz, \quad z_k \in \gamma_k, \quad (4.5)$$

$$\alpha = \sum_{j \neq k} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_j(z_k, z_j(\theta)) d\nu_j(\theta), \quad k = \overline{1, n}.$$

Здесь ν_k — функция ограниченной вариации, в разложении которой присутствует нетривиальная сингулярная составляющая $\mu_k(\theta)$, $k = \overline{1, n}$. Пусть однолистная область Ω_n ограничена жордановыми спрямляемыми кривыми Γ_k , $k = \overline{1, n}$. Нас будет интересовать вопрос, какие ограничения налагают последние требования на отображающую функцию (4.5).

Теорема 4.1. *Если функция (4.5) однолистно и конформно отображает D_n на Ω_n , то существует такая постоянная $K > 0$, что $\nu_k \in \Lambda(K)$ для любого $k = 1, 2, \dots, n$.*

Доказательство. Представим выражение (4.5) в кольце D'_{nk} в виде (см. [17]):

$$\ln f'(z) = \delta \ln z - \ln \Theta(z) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{z + z_k - 2a_k}{z - z_k} d\nu_k(\theta) + \varphi_k(z), \quad z \in D'_{nk}, \quad (4.6)$$

где φ_k — функция, голоморфная в области $D^k = \bigcap_{j \neq k} D_{nj}$ и, следовательно, голоморфная в кольце $\overline{D'_{nk}}$. Пусть

$$q_k(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \nu_k(\theta) \frac{z + z_k - 2a_k}{z - z_k} d\theta$$

— функция, голоморфная в D_{nk} . Тогда на окружности γ_k выполняется равенство $\operatorname{Re} q_k(z_k(\theta)) = \nu_k(\theta)$. Из (4.6) имеем

$$i(z - a_k)q'_k(z) = \ln f'(z) - \delta \ln z + \ln \Theta(z) - \varphi_k(z), \quad z \in D'_{nk}.$$

Отсюда, с применением леммы 4.2 находим, что

$$\sup_{z \in D'_{nk}} |(R_k - |z - a_k|) \frac{d}{dz} [(z - a_k)q'_k(z)]| \leq M < \infty.$$

Отобразим единичный круг $D = \{\zeta : |\zeta| < 1\}$ на область D_{nk} функцией $z_k(\zeta) = a_k + R_k/\zeta$, рассмотрим голоморфную в единичном круге функцию, определенную равенством $Q_k(\zeta) := q_k[z_k(\zeta)]$, и функцию $\tilde{Q}_k$, определенную равенством $\tilde{Q}_k(\theta) = Q_k(e^{i\theta})$. Легко заметить, что

$$\sup_{\zeta \in D} |(1 - |\zeta|^2) \frac{d}{d\zeta} [\zeta Q'_k(\zeta)]| = \sup_{z \in D'_{nk}} |(R_k - |z - a_k|) \frac{d}{dz} [(z - a_k)q'_k(z)]| \leq M < \infty.$$

Отсюда следует ([5], с.419), что $\tilde{Q}_k \in \Lambda(K)$ с вполне определенной постоянной $K > 0$, зависящей лишь от M . Установив связь между граничными значениями $Q_k(\zeta)$ и $q_k(z)$, убеждаемся в справедливости теоремы.

Отметим, что эта теорема распространяется на случай многосвязных областей известный результат Дюрена, Шапиро и Шилдса [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Привалов И.И. *Граничные свойства аналитических функций*. изд. 2, М;—Л., Гостехиздат, 1950. 336 с.
2. Смирнов В.И. *Sur la théorie des polynômes orthogonaux à la variable complex* // Журнал Ленингр. физ.-матем. об-ва. 1928. Т.2. С. 155–179.
3. M.V. Keldyš, M.A. Lavrentiev *Sur la représentation conforme des domaines limités par des courbes rectifiables* // Ann. Ecole Norm. (3). 1937. V. 54. P. 1–38.
4. P.L. Duren, M.S. Shapiro, A.L. Shields *Singular measures and domains not of Smirnov type* // Duke Math. J. 1966. V. 33. № 2. P. 247–254.
5. Зигмунд А. *Тригонометрические ряды*. М.: Мир. Т.1. 1965. 615 с.
6. L.V. Ahlfors, G. Weill *A uniqueness theorem for Beltrami equations* // Proc. Amer. Math. Soc. 1962. V. 13. P. 247–254.
7. Шабалин П.Л. *Об однолистности общего решения внутренней обратной краевой задачи* // Изв. вузов, Математика. 1975. № 12. С. 92–95.
8. Авхадиев Ф.Г. *Оценки в классе Зигмунда и их применение к краевым задачам* // Докл. АН СССР. 1989. Т. 307. № 6. С. 1289–1292.
9. Макаров Н.Г. *О размере множества особых точек на границе несмирновской области* // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1989. Т. 170. С. 176–183.

10. P.W. Jones, S.K. Smirnov, V.I. On *Smirnov domains* // Ann. Acad. Sci. Fennicae Mathem. 1999. V. 24. P. 105–108.
11. C. Bishop, L. Carleson, J. Garnett *Jones P. Harmonic measures supported on curves* // Pacific J. Math. 1989. V. 138. P. 233–236.
12. S. Rohde *On conformal welding and quasicircles* // Michigan Math. J. 1991. V. 38. P. 111–116.
13. Дубинин В.Н. *Неравенства для гармонических мер относительно неналегающих областей* // Изв АН СССР, сер. матем. 2015. Т. 79, № 5. С. 47–64.
14. Тумаркин Г.Ц., Хавинсон С.Я. *Аналитические функции в многосвязных областях класса В.И.Смирнова (класса S)* // Изв АН СССР, сер. матем. 1958. Т. 22, № 3. С. 379–385.
15. Тумаркин Г.Ц., Хавинсон С.Я. *О существовании в многосвязных областях однозначных аналитических функций с заданным модулем граничных значений* // Изв АН СССР, сер. матем. 1958. Т. 22, № 4. С. 543–562.
16. Тумаркин Г.Ц. *Условия существования аналитической мажоранты семейства аналитических функций* // Изв АН Арм.ССР, сер. матем. 1964. Т.17, № 6. С. 3–25.
17. D. Khavinson *Factorization theorems for different classes of analytic functions in multiply connected domains* // Pacific J. Math. 1983. V. 108. №. 2 P. 295–318.
18. Авхадиев Ф.Г. *Достаточные условия однолиственности квазиконформных отображений* // Матем.заметки 1975. Т. 18, № 6. С. 793–802.
19. B.G. Osgood *Some properties of f''/f' and the Poincaré metric* // Indiana Univ. Math. J. 1982. V. 31. № 4. P. 449–461.
20. J. Becker, Ch. Pommerenke *Schlichtheitskriterien und Jordangebiete* // J. Reine Angew. Math. 1984. V. 354. P. 74–94.
21. Авхадиев Ф.Г. *Об инъективности в области открытых изолированных отображений с заданными граничными свойствами* // Докл. АН СССР. 1987. Т. 292. № 4. С. 78–783.
22. Авхадиев, Ф.Г. *Допустимые функционалы в условиях однолиственности для дифференцируемых отображений n-мерных областей* // Изв. вузов. Матем. 1989. № 4. С. 3–12.
23. F.G. Avkhadiev, K.J. Wirths *Schwarz-Pick type inequalities*. Basel-Boston-Berlin, Birkhäuser Verlag. 2009. 156 p.
24. Голузин Г.М. *О параметрическом представлении функций, однолистных в кольце* // Мат. сб. 1951. Т. 29 (71). № 2. С.469–476.

Фарит Габидинович Авхадиев,
 Казанский (Приволжский) федеральный университет,
 ул. Кремлевская, 18,
 420008, г. Казань, Россия
 E-mail: avkhadiev47@mail.ru

Павел Леонидович Шабалин,
 Казанский государственный архитектурно-строительный университет,
 ул. Зеленая, 1,
 420043, г. Казань, Россия
 E-mail: pavel.shabalin@mail.ru