УДК 517.984

ОБ ИНДЕКСЕ ДЕФЕКТА НЕКОТОРЫХ ВЕКТОРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА

И.Н. БРОЙТИГАМ, К.А. МИРЗОЕВ, Т.А. САФОНОВА

Аннотация. В работе изучаются операторы, порожденные на луче $[1,+\infty)$ линейным матричным симметрическим квазидифференциальным выражением второго порядка $l[y] = -(P(y'-Ry))' - R^*P(y'-Ry) + Qy$, где эрмитовы матриц-функции $P^{-1}(x)$ и $Q(x)$ и комплекснозначная матричная функция $R(x)$ порядка n с элементами $p_{ij}(x), q_{ij}(x), r_{ij}(x) \in L^1_{loc}[1,+\infty)$ $(i,j=1,2,\ldots,n)$. Построен минимальный замкнутый симметрический оператор L_0, порожденный этим выражением, в гильбертовом пространстве $\mathcal{L}^2_n[1,+\infty)$, и для него установлен аналог теоремы С.А. Орлова об индексе дефекта линейных скалярных дифференциальных операторов.

Ключевые слова: Квазипроизводная, квазидифференциальное выражение, минимальный замкнутый симметрический оператор, дефектные числа, асимптотика фундаментальной системы решений.

Mathematics Subject Classification: 34A30, 34L05, 47E05

1. Введение

В работе [1] С.А. Орловым был найден класс линейных симметрических дифференциальных операторов с вещественными аналитическими коэффициентами, дефектные числа которых определяются как число корней некоторого явно выписываемого полинома, лежащих в левой полуплоскости, а именно была приведена следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть функции $p_0, p_1, \ldots, p_m$ определены на множестве $[1,+\infty)$ и удовлетворяют условиям:*
(I) $p_0, p_1, \ldots, p_m$ измеримы, принимают вещественные значения и при любом $b \in (1,+\infty)$

$$\int_1^b |p_m|^{-1} < +\infty, \int_1^b |p_k| < +\infty \quad (k=0,1,\ldots,m-1),$$

(II) $p_0(z), p_1(z), \ldots, p_m(z)$ — аналитические функции при $|z| \geq x_0 \geq 1$ и

$$p_k(z) = z^{2k+\nu}\left[a_k + \sum_{j=1}^{+\infty} a_j^{(k)} z^{-j}\right] \quad (k=0,1,\ldots,m; |z| \geq x_0 \geq 1),$$

I.N. Braeutigam, K.A. Mirzoev, T.A. Safonova, On deficiency index for second order vector differential operators.

Первый автор поддержан грантом Министерства образования и науки РФ и Германской службы академических обменов (DAAD) по программе "Михаил Ломоносов"(№ 1.728.2016/DAAD), второй автор поддержан грантом РНФ (№ 14-11-00754), третий автор поддержан Минобрнауки РФ (грант Президента РФ № МК-3941.2015.1).

Поступила 24 мая 2016 г.

где $a_m \neq 0$, а $\nu \geq 0$ — целое число.
Тогда максимальное число линейно - независимых решений уравнения

$$l_{2m}[y](x) := p_0(x)y + \frac{d}{dx}\left\{p_1(x)y' + \frac{d}{dx}\left[p_2(x)y'' + \dots\right.\right.$$
$$\left.\left.\dots + \frac{d}{dx}\left(p_{m-1}(x)y^{(m-1)} + \frac{d}{dx}(p_m(x)y^{(m)})\right)\dots\right]\right\} = \lambda y,$$

принадлежащих $\mathcal{L}^2[1,+\infty)$, равно:
1) при $\nu > 0$ числу корней полинома

$$F_{2m}(z,\nu) = \sum_{k=1}^{m} a_k \prod_{j=0}^{k-1}\left[\left(z+\frac{\nu}{2}\right)^2 - \left(\frac{\nu+1}{2}+j\right)^2\right] + a_0,$$

лежащих в области $\Re z < 0$, и не зависит от λ. При этом спектр любого самосопряженного расширения соответствующего оператора дискретный.
2) при $\nu = 0$ числу корней полинома $F_{2m}(z,0) - \lambda$, лежащих в области $\Re z < 0$, и при невещественном λ равно m.

Пусть далее, функции $p_0(x), p_1(x), \dots, p_m(x)$ представляются в виде

$$p_k(x) = x^{2k+\nu}(a_k + r_k(x)) \quad (k = 0,1,\dots,m-1), \quad p_m(x) = \frac{x^{2m+\nu}}{\frac{1}{a_m} + r_m(x)},$$

где ν — неотрицательное (необязательно целое) число; $a_0, a_1, \dots, a_m$ — вещественные числа, $a_m \neq 0$; а $r_0, r_1, \dots, r_m$ — вещественные функции на $[1,+\infty)$, такие, что

i) при некотором $x_0(\geq 1)$

$$\int_{x_0}^{+\infty} |r_k(x)|\frac{dx}{x} < +\infty \quad (k = 0,1,\dots,m);$$

ii) все корни полинома $F_{2m}(z,\nu)$ при $\nu > 0$ и полинома $F_{2m}(z,0) - \lambda$ различны.

Ф.А. Неймарк в работе [2], в частности, установила, что утверждения 1) и 2) теоремы 1 остаются справедливыми, если в ней условие (I) оставить без изменений, а условие (II) заменить условиями i) и ii).

Позднее в совместной работе Р.Б. Периса и А.Д. Вуда [3] была заново открыта теорема 1 для частного случая $p_k(x) = a_k x^{2k+\nu}$ $(k = 0,1,\dots,m)$, где ν — неотрицательное целое число, и подробно изучен полином $F_{2m}(z,\nu)$. Этим методом они, в частности, установили, что существуют положительные числа K и ν такие, что индекс дефекта минимального замкнутого симметрического оператора, порожденного выражением

$$l_6[y] = -(x^{6+\nu}y^{(3)})^{(3)} + Kx^\nu y,$$

равен $(5,5)$, тем самым уточнив результат Р.М. Кауффмана (см. [4]) о том, что индекс дефекта этого оператора не $(3,3)$.

Позже результаты работы [3] вошли в книгу [5], в которой также были рассмотрены и некоторые дифференциальные операторы, порожденные выражениями нечетного порядка частного вида, и исследованы соответствующие им полиномы. По-видимому, работы [1] и [2] так и остались незамеченными авторами работы [3] и книги [5].

В работе К.А. Мирзоева [6] исследуются задачи об индексе дефекта и характере спектра минимального замкнутого симметрического оператора, порожденного квазидифференциальным выражением l_n произвольного (четного или нечетного) порядка n с комплекснозначными коэффициентами на множестве $[1;+\infty)$. Полученные результаты аналогичны утверждениям теоремы Орлова, при этом условия, налагаемые на коэффициенты выражения l_n, того же характера, что и условие (I) теоремы 1, а условие i) видоизменено так, что выполнение условия ii) не требуется.

В совместной работе И.Н. Долгих (И.Н. Бройтигам) и К.А. Мирзоева [7] была рассмотрена аналогичная задача как на полуоси, так и на интервале $(0,1]$, т.е. был существенно расширен класс операторов, для которых утверждения теоремы С.А. Орлова остаются справедливыми.

Наша цель — построение спектральной теории дифференциальных операторов, порожденных в пространстве $\mathcal{L}_n^2[1,+\infty)$ симметрическими (формально самосопряженными) выражениями вида
$$l[y] = -(P(y'-Ry))' - R^*P(y'-Ry) + Qy,$$
где P,Q,R — комплекснозначные матриц-функции порядка n $(n\in\mathbb{N})$, определенные на луче $[1,+\infty)$, такие, что P — невырожденная, P и Q — эрмитовы матрицы, а элементы матриц-функций P^{-1}, Q и R измеримы на $[1,+\infty)$ и суммируемы на каждом ее замкнутом конечном подынтервале. Также нашей целью является установление аналога теоремы Орлова и построение примеров реализации случаев предельной точки и предельного круга для таких операторов
$$l[y] = -(\mathcal{P}_0y')' + i((\mathcal{Q}_0y)' + \mathcal{Q}_0y') + \mathcal{P}_1'y,$$
где всюду производные понимаются в смысле теории распределений, а $\mathcal{P}_0,\mathcal{Q}_0$ и $\mathcal{P}_1$ — эрмитовы матриц-функции порядка n с измеримыми по Лебегу элементами, такие что $\mathcal{P}_0^{-1}$ существует и $||\mathcal{P}_0||, ||\mathcal{P}_0^{-1}||, ||\mathcal{P}_0^{-1}||||\mathcal{P}_1||^2$, $||\mathcal{P}_0^{-1}||||\mathcal{Q}_0||^2 \in \mathcal{L}_{loc}^1[1,+\infty)$.

Корректное определение выражения l, а также минимального замкнутого симметрического оператора, порожденного им, приводятся в параграфе 2.

Часть результатов данной работы без доказательств была опубликована в [8].

2. Квазипроизводные и квазидифференциальные операторы. Индексы дефекта

2.1. Пусть $I := [1,+\infty)$ и пусть $P(x), Q(x)$ и $R(x)$ — квадратные матриц-функции порядка n $(n\in\mathbb{N})$ определены на множестве I, при этом $P(x)$ — невырожденная, $P(x)$ и $Q(x)$ — эрмитовы матрицы при $x\in I$ и таковы, что выполнено

Условие A. *Комплекснозначные функции p_{ij}, q_{ij} и r_{ij} $(i,j=1,2,\dots,n)$ — элементы матриц P^{-1}, Q и R соответственно — определены, измеримы на множестве I и суммируемы на каждом его замкнутом конечном интервале, т.е. $p_{ij},q_{ij},r_{ij}\in\mathcal{L}_{loc}^1(I)$.*

Обозначим символом $AC_{loc}(I)$ – множество вектор-функций $y(x) = (y_1(x), y_2(x),\dots,y_n(x))^t$ (t — символ транспонирования) с локально абсолютно непрерывными компонентами на I и определим первую квазипроизводную заданной вектор-функции $y\in AC_{loc}(I)$, полагая
$$y^{[1]} := P(y'-Ry).$$

Далее считая, что вектор-функция $y^{[1]}$ уже определена и $y^{[1]}\in AC_{loc}(I)$, определим вторую квазипроизводную вектор-функции y, полагая
$$y^{[2]} := (y^{[1]})' + R^*y^{[1]} - Qy,$$
где * — символ сопряжения, и квазидифференциальное выражение, полагая
$$l[y](x) := -y^{[2]}(x), \quad x\in I.$$
Таким образом,
$$l[y] = -(P(y'-Ry))' - R^*P(y'-Ry) + Qy, \tag{1}$$
а множество вектор-функций $\mathcal{D} := \{y(x)|\ y(x), y^{[1]}(x)\in AC_{loc}(I)\}$, очевидно, является областью определения этого выражения. Из условия *(A)* следует, что для любой вектор-функции $y(x)\in\mathcal{D}$ выражение $l[y](x)$ существует п.в. на I, а координаты $l[y]$ локально интегрируемы. Кроме того, для любых двух вектор-функций $f,g\in\mathcal{D}$ справедлива следующая лемма — векторный аналог тождества Грина.

Лемма 1. *Пусть P, Q и R - квадратные матриц-функции порядка n, удовлетворяющие перечисленным выше условиям на I. Тогда для любых двух вектор-функций $u, v \in \mathcal{D}$ и для любых двух чисел α и β таких, что $0 \le \alpha \le \beta < \infty$, справедлива формула*

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} \{(l[u](x), v(x)) - (u(x), l[v](x))\}dx = [u(x), v(x)](\beta) - [u(x), v(x)](\alpha), \tag{2}$$

где $(g, h) = \sum\limits_{s=1}^{n} g_s \overline{h_s}$ *— скалярное произведение векторов g и h, а форма $[u, v]$ определена равенством:* $[u, v](x) := (u^{[1]}(x), v(x)) - (u(x), v^{[1]}(x))$.

Справедливость леммы 1 для частного случая выражения l, когда $P(x) = I_n$ (I_n – единичная матрицы порядка n), $R(x) = \sigma(x)$, $Q(x) = -\sigma^2(x)$, где $\sigma(x)$ — заданная симметрическая матриц-функция порядка n с вещественными элементами такая, что элементы матрицы $\sigma^2(x)$ локально интегрируемы на I, установлена в [9]. Доказательство, приведенное там, без существенных изменений переносится на случай выражения l вида (1).

Пусть далее $\mathcal{L}_n^2(I)$ – пространство классов эквивалентности всех комплекснозначных измеримых вектор-функций y, у которых сумма квадратов модулей компонент интегрируема по Лебегу на I. В литературе, посвященной спектральной теории обыкновенных дифференциальных операторов, хорошо известна процедура, с помощью которой определяется минимальный оператор L_0, порожденный выражением $l[y]$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{L}_n^2(I)$. А именно, обозначая через D_0' множество всех комплекснозначных финитных на I вектор-функций из $\mathcal{D}$ таких, что $l[y] \in \mathcal{L}_n^2(I)$, с помощью таких же рассуждений, как в скалярном случае (см., например, [10], стр. 133), и с использованием формулы Грина (2) устанавливается, что множество D_0' является всюду плотным в $\mathcal{L}_n^2(I)$, а формулой $L_0' y = l[y]$ на множестве D_0' выражение l определяет симметрический (незамкнутый) оператор в $\mathcal{L}_n^2(I)$ с областью определения D_0'. Символами L_0 и D_0 обозначим замыкание этого оператора и его область определения соответственно. Благодаря этому, по аналогии с общей концепцией симметрических скалярных квазидифференциальных выражений, везде далее выражение l будем называть симметрическим (формально-самосопряженным) квазидифференциальным выражением, порожденным посредством матриц P, Q и R.

Пусть далее λ — комплексное число и $\Im\lambda \neq 0$. Через R_λ и $R_{\overline{\lambda}}$ обозначим области значений операторов $L_0 - \lambda\mathcal{I}$ и $L_0 - \overline{\lambda}\mathcal{I}$ соответственно, а через $\mathcal{N}_\lambda$ и $\mathcal{N}_{\overline{\lambda}}$ — ортогональные дополнения пространств $R_{\overline{\lambda}}$ и R_λ в $\mathcal{L}_n^2(I)$. Пространства $\mathcal{N}_\lambda$ и $\mathcal{N}_{\overline{\lambda}}$ называются дефектными пространствами, числа n_+ и n_-, равные их размерностям ($n_+ = \dim \mathcal{N}_\lambda$, $n_- = \dim \mathcal{N}_{\overline{\lambda}}$) — дефектными числами оператора L_0 в верхней и нижней открытой комплексной полуплоскости соответственно, а пара (n_+, n_-) — индексом дефекта оператора L_0.

Рассуждениями, аналогичными работам [11] и [12], можно установить, что числа n_+ и n_- совпадают с максимальным числом линейно независимых решений уравнения

$$l[y] = \lambda y, \tag{3}$$

принадлежащих пространству $\mathcal{L}_n^2(I)$, когда параметр λ берется из верхней ($\Im\lambda > 0$) или нижней ($\Im\lambda < 0$) полуплоскости соответственно, удовлетворяют двойному неравенству $n \le n_+, n_- \le 2n$ и $n_+ = 2n$ тогда и только тогда, когда $n_- = 2n$. Кроме того, случай $n_+ = n_- = 2n$ реализуется тогда и только тогда, когда все решения уравнения (3) при всех $\lambda \in C$ принадлежат пространству $\mathcal{L}_n^2(I)$. Используя аналогию со спектральной теорией скалярных операторов Штурма-Лиувилля на полуоси, иногда говорят, что для выражения $l[y]$ (оператора L_0) имеет место случай предельной точки, если $n_+ = n_- = n$, если же $n_+ = n_- = 2n$, то говорят, что для выражения $l[y]$ (оператора L_0) имеет место случай предельного круга (см., например, [11]).

Уравнение (3) равносильно системе дифференциальных уравнений 1-го порядка

$$\mathbf{y}' = (F - \Lambda)\mathbf{y}, \tag{4}$$

где $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y \\ y^{[1]} \end{pmatrix}$, матрицы F и Λ порядка $2n$ имеют вид

$$F = \begin{pmatrix} R & P^{-1} \\ Q & -R^* \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} O & O \\ \lambda I_n & O \end{pmatrix},$$

а O и I_n, как обычно, — нулевая и единичная матрицы порядка n соответственно.

Равносильность уравнений (3) и (4) понимается в том смысле, что если $y(x)$ является векторным решением системы (3), то вектор-столбец $\mathbf{y}$ является решением (4) и наоборот, если $2n$-компонентный вектор-столбец $\mathbf{y}$ — решение системы (4), то вектор y, составленный из первых n компонент вектора $\mathbf{y}$ — решение уравнения (3).

Замечание 1. *Условия на элементы матриц P, Q и R обеспечивают справедливость теоремы существования и единственности решения задачи Коши для системы (4), поставленной в произвольной точке множества I, и являются самыми общими, обеспечивающими это (см.* [13], *Ch. 1, Th. 1.2.3). А из равносильности систем (3) и (4) следует ее справедливость и для системы (3).*

Используя терминологию из теории операторов, порожденных линейными дифференциальными выражениями с негладкими коэффициентами, иногда говорят, что квазипроизводные $y^{[0]}(:= y)$, $y^{[1]}$, $y^{[2]}$ и квазидифференциальное выражение $l[y]$ порождены матрицей F.

2.2. Пусть $\mathcal{P}_0$, $\mathcal{Q}_0$ и $\mathcal{P}_1$ — эрмитовы матриц-функции порядка n с измеримыми элементами такие, что $\mathcal{P}_0^{-1}$ существует и $||\mathcal{P}_0^{-1}||, ||\mathcal{P}_0^{-1}||||\mathcal{P}_1||^2$, $||\mathcal{P}_0^{-1}||||\mathcal{Q}_0||^2$ локально интегрируемы по Лебегу. Пусть далее $\varphi := \mathcal{P}_1 + i\mathcal{Q}_0$ и $\varphi^* := \mathcal{P}_1 - i\mathcal{Q}_0$. Рассмотрим блочную матрицу

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} \mathcal{P}_0^{-1}\varphi & \mathcal{P}_0^{-1} \\ -\varphi^*\mathcal{P}_0^{-1}\varphi & -\varphi^*\mathcal{P}_0^{-1} \end{pmatrix}.$$

Используя свойства матричных норм и эрмитовость матриц-функций $\mathcal{P}_0$, $\mathcal{Q}_0$ и $\mathcal{P}_1$, легко установить, что все элементы матрицы $\mathcal{F}$ принадлежат пространству $\mathcal{L}^1_{loc}(I)$.

Посредством матрицы $\mathcal{F}$ определим квазипроизводные $y^{[0]}$, $y^{[1]}$, $y^{[2]}$, полагая, как и ранее,

$$y^{[0]} = y, \quad y^{[1]} = \mathcal{P}_0 y' - \varphi y, \quad y^{[2]} = (y^{[1]})' + \varphi^*\mathcal{P}_0^{-1}y^{[1]} + \varphi^*\mathcal{P}_0^{-1}\varphi y.$$

Далее, применяя замечание 1, заключаем, что для уравнения

$$-y^{[2]} = \lambda y$$

справедлива теорема существования и единственности решения задачи Коши, поставленной в произвольной точке I.

Если предположить, что элементы матрицы $\mathcal{P}_0$ также принадлежат $\mathcal{L}^1_{loc}(I)$ ($||\mathcal{P}_0|| \in \mathcal{L}^1_{loc}(I)$), то легко заметить, что и элементы матрицы φ будут локально интегрируемы на I. Исходя из этих предположений, можно доказать, что если $'$ трактовать как операцию взятия производной в смысле теории распределений, то в выражении $y^{[2]}$ можно раскрыть все скобки, и для него получим формулу

$$y^{[2]} = (\mathcal{P}_0 y')' - i((\mathcal{Q}_0 y)' + \mathcal{Q}_0 y') - \mathcal{P}_1' y.$$

Таким образом, выражение $l[y]$ (см. (1)) в терминах обобщенных функций записывается в виде

$$l[y] = -(\mathcal{P}_0 y')' + i((\mathcal{Q}_0 y)' + \mathcal{Q}_0 y') + \mathcal{P}_1' y, \tag{5}$$

а оператор L_0, определенный ранее, можно трактовать как оператор, порожденный этим выражением в гильбертовом пространстве $\mathcal{L}^2_n(I)$. Такая трактовка оператора с коэффициентами-распределениями позволяет включить его в класс операторов, порожденных квазидифференциальными выражениями с локально суммируемыми коэффициентами в пространстве $\mathcal{L}^2_n(I)$, и строить спектральную теорию этого оператора.

Отметим, что корректное определение оператора Штурма-Лиувилля со скалярным потенциалом-распределением первого порядка, т.е. оператора, порожденного в пространстве $\mathcal{L}^2(a,b)$ выражением вида

$$l[y] = -y'' + \sigma'(x)y,$$

где σ — комплекснозначная функция такая, что $\sigma^2 \in \mathcal{L}^1_{loc}(a,b)$, впервые, по-видимому, было дано в нескольких работах А.М. Савчука и А.А. Шкаликова (см. [14], [15]), а для векторного аналога этого выражения, когда $\sigma(x)$ является квадратной симметрической матриц-функцией порядка n с вещественными элементами такой, что элементы матрицы σ^2 локально интегрируемы на полуоси в [9].

В частности, если $\mathcal{Q}_0(x) = O$, то векторное квазидифференциальное выражение (5) примет вид

$$l[y] = -(\mathcal{P}_0 y')' + \mathcal{P}_1' y.$$

3. Аналог теоремы С.А. Орлова

3.1. Далее нам понадобится следующая лемма (см. [16], [17, гл. III, задача 35, стр. 120]).

Лемма 2. *Рассмотрим систему дифференциальных уравнений*

$$U' = (A + G(t))U, \tag{6}$$

где A — постоянная матрица, каноническая форма которой имеет жордановы клетки J_k, $k \geq 1$, а максимальное число строк для всех клеток J_k равно $r+1$. Предположим, что

$$\int_1^\infty t^r ||G(t)|| dt < \infty. \tag{7}$$

Пусть z_j — характеристический корень матрицы A и пусть уравнение $y' = Ay$ имеет решения вида

$$e^{z_j t} t^k c + O(e^{z_j t} t^{k-1}),$$

где c — постоянный вектор. Тогда уравнение (6) имеет решение ϕ, такое, что

$$\phi(t) = e^{z_j t} t^k (c + o(1)), \textit{при } t \to +\infty.$$

3.2. В дальнейшем предполагается, что матриц-функции P^{-1}, Q и R — коэффициенты выражения $l[y]$ (см. (1)) удовлетворяют следующему условию

Условие B. *При всех $x \geq 1$ и некотором вещественном $\nu \geq 0$*

$$P^{-1}(x) = x^{-\nu-2}(P_0 + P_1(x)),\; Q(x) = x^{\nu}(Q_0 + Q_1(x)),\; R(x) = x^{-1}(R_0 + R_1(x)),$$

где P_0, Q_0, R_0 и $P_1(x)$, $Q_1(x)$, $R_1(x)$ — эрмитовы постоянные матрицы и матричные функции порядка n соответственно. Пусть $\det P_0 \neq 0$ и, кроме того,

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln^r x}{x} (||P_1(x)|| + ||Q_1(x)|| + ||R_1(x)||) dx < +\infty,$$

где $r+1$ — максимальное число строк для всех жордановых клеток J_k, $k \geq 1$, канонической формы матрицы

$$A_\nu := \begin{pmatrix} R_0 + \frac{1}{2} I_n & P_0 \\ Q_0 - \lambda\chi(\nu) I_n & -R_0^* - (\nu + \frac{1}{2}) I_n \end{pmatrix},$$

где $\chi(\nu) = 0$ при $\nu > 0$ и $\chi(0) = 1$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть элементы P^{-1}, Q и R матрицы F удовлетворяют условию (B) и пусть l — квазидифференциальное выражение, порожденное этой матрицей (см. (1)). Тогда максимальное число линейно независимых решений уравнения (3), принадлежащих пространству $\mathcal{L}^2_n(I)$, равно*
1) при $\nu > 0$ числу корней полинома $\mathcal{F}(z,\nu) := \det(A_\nu - zI_{2n})$ (с учетом их кратности), лежащих в области $\Re z < 0$, и не зависит от λ;
2) при $\nu = 0$ числу корней полинома $\mathcal{F}(z,0) := \det(A_0 - zI_{2n})$ (с учетом их кратности), лежащих в области $\Re z < 0$, и при невещественном λ равно n.
При этом в случае $\nu > 0$ спектр любого самосопряженного расширения оператора L_0 является дискретным.

Доказательство. Из условия (B) следует, что элементы матрицы F удовлетворяют условию (A) п. 2.1. Поэтому по формуле (1) корректно определено квазидифференциальное выражение $l[y]$, порожденное этой матрицей, а также минимальный замкнутый симметрический оператор L_0, а в утверждениях 1 и 2 теоремы 2, очевидно, речь идет об индексах дефекта этого оператора.

Пусть $\nu > 0$. Обозначим через D блочно-диагональную матрицу

$$D = \begin{pmatrix} x^{-1/2}I_n & O \\ O & x^{\nu+1/2}I_n \end{pmatrix}.$$

В системе (4) сделаем замену $\mathbf{y} = DY$, где Y — новая неизвестная $2n$-компонентная вектор-функция. В результате система (4) примет вид

$$Y' = (D^{-1}FD - D^{-1}\Lambda D - D^{-1}D')Y.$$

Простые вычисления показывают, что матриц-функции $D^{-1}FD$, $D^{-1}\Lambda D$ и $D^{-1}D'$ в блочном представлении имеют вид:

$$D^{-1}D' = x^{-1}\begin{pmatrix} -1/2I_n & O \\ O & (\nu+1/2)I_n \end{pmatrix}, \quad D^{-1}\Lambda D = x^{-1}\begin{pmatrix} O & O \\ \lambda x^{-\nu}I_n & O \end{pmatrix},$$

$$D^{-1}FD = x^{-1}\begin{pmatrix} xR & x^{\nu+2}P^{-1} \\ x^{-\nu}Q & -xR^* \end{pmatrix}.$$

Таким образом, неизвестная вектор-функция Y удовлетворяет системе дифференциальных уравнений

$$xY' = (A_\nu + B(x))Y, \tag{8}$$

где A_ν — числовая матрица, определенная выше, а $B(x)$ — матриц-функция

$$B(x) = \begin{pmatrix} R_1(x) & P_1(x) \\ Q_1(x) - \frac{\lambda}{x^\nu}I_n & -R_1^*(x) \end{pmatrix}.$$

Полагая далее $x = e^t$, заметим, что система (8) приобретает вид (6), где $U(t) = Y(e^t)$, $A = A_\nu$ и $G(t) = B(e^t)$.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$U' = A_\nu U(t).$$

Фундаментальная матрица решений этой системы имеет вид $\Phi = e^{A_\nu t}$.

Пусть теперь z — характеристический корень матрицы A_ν алгебраической кратности r_0 и геометрической кратности l. Обозначим через k_i $(i = 1, 2\ldots l)$ размерность жордановых клеток, соответствующих числу z. Отметим, что $2n$-компонентные вектор-столбцы фундаментальной матрицы Φ, соответствующие i-й жордановой клетке имеют вид

$$e^{zt}c_{k_i}, \quad t^j e^{zt}c_{k_i} + O(t^{j-1}e^{zt}), \;\; j = 1,\ldots,k_i - 1, \tag{9}$$

где c_{k_i} — собственный вектор матрицы A, соответствующий этой жордановой клетке (более подробно см. [17, Гл. III, §4]).

Пусть $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$, где $X_i (i = 1,2)$ — вектор-столбцы размерности n, является собственным вектором, соответствующим собственному значению z матрицы A_ν, т.е.

$$(A_\nu - zI_{2n}) \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = O.$$

Таким образом, вектора X_1 и X_2 удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} (R_0 + (\frac{1}{2} - z)I_n)X_1 + P_0X_2 = O \\ (-R_0^* - (\nu + \frac{1}{2} + z)I_n)X_1 + Q_0X_2 = O. \end{cases}$$

Учитывая, что $\det P_0 \neq 0$ и исключив из этой системы неизвестный вектор X_2, получим, что вектор X_1 удовлетворяет уравнению

$$(-R_0^* - (\nu + \frac{1}{2} + z)I_n - Q_0P_0^{-1}(R_0 + (\frac{1}{2} - z)I_n)X_1 = O. \tag{10}$$

Вектор X_1, очевидно, ненулевой, кроме того, по предположению, геометрическая кратность корня z равна l, поэтому ранг матрицы-коэффициента системы (10) равен $n - l$ ($l \in \{1, 2 \ldots, n-1\}$). Таким образом, эта система имеет l линейно-независимых решений, т.е. характеристическому корню z соответствует l собственных векторов вида $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$, причем первые n координат этих векторов одновременно не равны нулю.

Учитывая (В), заметим, что система (8) сводится к системе (6) и при этом выполнено (7), т.е. все условия леммы 2. Далее, применяя эту лемму для каждой функции из списка (9), получаем, что система (6) имеет фундаментальную матрицу решений, состоящую из вектор-столбцов, представимых при $t \to \infty$ в виде

$$t^k e^{zt}(c_{k_i} + o(1)) \quad (k = 0, 1, \ldots k_i - 1).$$

Выполняя обратную замену $x = e^t$ и учитывая, что $\mathbf{y} = DY$, получаем, что вектор-столбцы фундаментальной матрицы уравнения (3), соответствующие характеристическому корню z матрицы A, имеют вид

$$x^{z-\frac{1}{2}} \ln^k x(\widetilde{c}_{k_i} + o(1)), \tag{11}$$

где $\widetilde{c}_{k_i}$ — ненулевые вектора, состоящие из первых n компонент векторов c_{k_i}.

Функции, представимые в виде (11), принадлежат пространству $\mathcal{L}_n^2(I)$ тогда и только тогда, когда

$$\int\limits_1^{+\infty} |\, x^{2z-1}| \, (\ln x)^{2k} \, dx \; < \infty,$$

а это справедливо тогда и только тогда, когда $\Re z < 0$. Кроме того, при $\nu > 0$ многочлен $\mathcal{F}(z, \nu)$ не зависит от λ. Таким образом, дефектные числа оператора L_0 совпадают и равны числу корней уравнения $\mathcal{F}(z, \nu) = 0$, удовлетворяющих условию $\Re z < 0$.

Далее можно показать, что функция Грина любого самосопряженного расширения оператора L_0 является ядром Гильберта-Шмидта и мероморфной функцией от λ. Из этого следует дискретность спектра любого самосопряженного расширения оператора L_0.

Пусть теперь $\nu = 0$. Покажем, что

$$\overline{\det\left(A_0(\lambda) - (-\overline{z})I_{2n}\right)} = \det\left(A_0(\overline{\lambda}) - zI_{2n}\right). \tag{12}$$

Действительно, справедливо равенство

$$\det\left(A_0(\overline{\lambda}) - zI_{2n}\right) =$$

$$= \det(-R_0^* - (1/2 + z)I_n) \times \det(R_0 + (1/2 - z)I_n - P_0(-R_0^* - (1/2 + z)I_n)^{-1}(Q_0 - \overline{\lambda} I_n)).$$

С другой стороны, используя свойства P_0, Q_0, R_0, транспонированных к ним матриц и их определителей, несложно заметить, что и для

$$\overline{\det\left(A_0(\lambda)-(-\overline{z})I_{2n}\right)}$$

также справедлива приведенная выше формула. Таким образом, выполняется равенство (12).

Пусть λ невещественное число и число корней уравнения

$$\det\left(A_0(\overline{\lambda})-zI_{2n}\right)=0, \tag{13}$$

удовлетворяющие условию $\Re z<0$, с учетом их кратности, равно k. Из тождества (12) следует, что число корней уравнения

$$\det\left(A_0(\lambda)-(-\overline{z})I_{2n}\right)=0 \tag{14}$$

таких, что $\Re z\le 0$ с учетом их кратности равно $2n-k$, т.е., для дефектных чисел n_+ и n_- выполняется неравенство $n_+ + n_- \le 2n$. Учитывая теперь, что $n_+\ge n, n_-\ge n$, получаем $n_+=n_-=n$. Теорема 2 доказана.

3.3. Пусть теперь выражение $l[y]$ определяется равенством

$$l[y]=-(\mathcal{P}_0y')'+i((\mathcal{Q}_0y)'+\mathcal{Q}_0y')+\mathcal{P}_1'y,$$

(см. (5) во введении) и предположим, что коэффициенты $\mathcal{P}_0(x),\mathcal{P}_1(x),\mathcal{Q}_0(x)$ этого выражения удовлетворяют следующему условию.

Условие B$'$. *При всех $x\ge 1$ и некотором вещественном $\nu\ge 0$*

$$\mathcal{P}_0^{-1}(x)=x^{-\nu-2}(P_0^0+P_0^1(x)),\ \mathcal{P}_1(x)=x^{\nu+1}(P_1^0+P_1^1(x)),\ \mathcal{Q}_0(x)=x^{\nu+1}(Q_0^0+Q_0^1(x)),$$

где P_0^0, P_1^0, Q_0^0 и $P_0^1(x)$, $P_1^1(x)$, $Q_0^1(x)$ — постоянные эрмитовы матрицы и эрмитовы матричные функции порядка n соответственно. Пусть $\det P_0^0\ne 0$ и, кроме того,

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{\ln^r x}{x}(||P_i^1(x)||+||P_i^1(x)||^2)dx<+\infty,\quad i=0,1,$$

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{\ln^r x}{x}(||Q_0^1(x)||+||Q_0^1(x)||^2)dx<+\infty,$$

где $r+1$ — максимальное число строк для всех жордановых клеток J_k, $k\ge 1$, канонической формы матрицы

$$A_\nu:=\begin{pmatrix} P_0^0\phi_0+\frac12 I_n & P_0^0\\ -\phi_0^*P_0^0\phi_0-\lambda\chi(\nu)I_n & -\phi_0^*P_0^0-(\nu+\frac12)I_n\end{pmatrix},$$

где $\chi(\nu)=0$ при $\nu>0$ и $\chi(0)=1$, а $\phi_0=P_1^0+iQ_0^0$, $\phi_0^*=P_1^0-iQ_0^0$.

Из условия (B$'$) следует, что коэффициенты $P=\mathcal{P}_0, Q=-\varphi^*\mathcal{P}_0^{-1}\varphi$ и $R=\mathcal{P}_0^{-1}\varphi$ в выражении (1) в данной ситуации удовлетворяют условию (B) пункта 3.2 и, таким образом, и здесь теорема 2 остается в силе. Применяя ее, получаем, что справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть матричные коэффициенты $\mathcal{P}_0^{-1}$, $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{Q}_0$ выражения $l[y]$ (см. (5)) удовлетворяют условию (B$'$). Тогда для уравнения $l[y]=\lambda y$ справедливы утверждения 1 и 2 теоремы 2.*

4. Примеры

4.1. В ходе доказательства теоремы 2 мы фактически получили асимптотические формулы для некоторой фундаментальной системы решений уравнения (3) при $x \to \infty$, причем эти асимптотические формулы справедливы и без предположения об эрмитовости коэффициентов выражения $l[y]$, и они, несомненно, представляют и самостоятельный интерес. Ниже мы приводим формулировку соответствующего результата для одного простейшего случая выражения (5), а именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть* $\nu > 0$, P_0 *— постоянная матрица такая, что* $\det P_0 \neq 0$, *матриц-функция* $P_1(x)$ *удовлетворяет условию* $x^{-1}(\|P_1(x)\| + \|P_1(x)\|^2) \in \mathcal{L}^1(I)$ *и* λ *— ненулевое комплексное число. Тогда векторное уравнение*

$$(x^{\nu+2}P_0 y')' + (x^{\nu+1}P_1(x))'y = \lambda y$$

имеет фундаментальную систему решений y_j $(j = 1, 2, \dots, 2n)$, *которую при* $x \to \infty$ *можно представить в виде*

$$y_j = c_j + o(1),$$
$$y_{n+j} = x^{-(\nu+1)}(c_{n+j} + o(1)),$$

где c_j *и* c_{n+j} $(j = 1, 2, \dots, n)$ *— линейно независимые системы* n *компонентных векторов.*

Особо отметим, что теорема 4 обеспечивает справедливость асимптотических формул, приведенных выше, для векторного дифференциального уравнения $l[y] = \lambda y$, где

$$l[y](x) = -(Py')' + Qy, \qquad x \in I, \tag{15}$$

$P(x) = x^{\nu+2}P_0$ и $Q(x) = (x^{\nu+1}P_1(x))'$. Таким образом, коэффициент Q в выражении (15) может сильно осциллировать.

4.2. Приведем некоторые конкретные примеры реализации различных дефектных чисел для оператора L_0. В выражении (1) положим $n = 2$ и $R(x) = O$. Тогда оно запишется в виде (15), а матриц функции $P(x)$ и $Q(x)$ удовлетворяют условию (B) пункта 3.2. Простые вычисления показывают, что

$$\mathcal{F}(z,\nu) = \left[\left(z + \frac{\nu}{2}\right)^2 - \left(\frac{\nu+1}{2}\right)^2\right]^2 - \left[\left(z + \frac{\nu}{2}\right)^2 - \left(\frac{\nu+1}{2}\right)^2\right] \times sp(P_0 \cdot Q_0) + \\ + \det(P_0 \cdot Q_0).$$

Многочлен $\mathcal{F}(z,\nu)$, очевидно, является произвольным квадратным трехчленом относительно $\left[\left(z + \frac{\nu}{2}\right)^2 - \left(\frac{\nu+1}{2}\right)^2\right]$, поэтому число корней этого многочлена, лежащих в левой полуплоскости, за счет выбора элементов постоянных матриц P_0 и Q_0 может быть сделано любым из чисел 2, 3 и 4. Таким образом, легко построить примеры реализации случаев минимального, не максимального и максимального индекса дефекта для оператора L_0. Так, например, полагая $sp(P_0 \cdot Q_0) = 0$ и $\det Q_0 = 0$, получаем, что для оператора L_0 реализуется случай предельной точки. Пусть теперь $sp(P_0 \cdot Q_0) = -2$ и $\det(P_0 \cdot Q_0) = 1$, тогда индекс дефекта оператора L_0 равен $(4, 4)$ при $0 < \nu < 1$ и $(3, 3)$ при $\nu \geq 1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Орлов С.А. *Об индексе дефекта линейных дифференциальных операторов* // ДАН СССР. 1953. Т. 92. № 3. С. 483–486.
2. Неймарк Ф.А. *Об индексе дефекта дифференциального оператора* // УМН. 1962. Т. 17, Вып. 4. С. 157–163.
3. R.B. Paris, A.D. Wood *On the $\mathcal{L}_2(I)$ nature of solutions of $n-$ th order symmetric differential operator and McLeod's conjecture* // Proc. Roy. Soc. Edinburg. 1981. V. 90A. P. 209–236.

4. R.M. Kauffman *On the limit - n classification of ordinary differential operators with positive coefficients* // Proc.London Math.Soc. 1977. (3), 35. P. 496–526.
5. R.B. Paris, A.D. Wood *On the $\mathcal{L}_2(I)$ nature of solutions of $n-$ th order symmetric differential operator and McLeod's conjecture* // Proc. Roy. Soc. Edinburg. *Asymptotics of high order differential equations.* Pitman Res.Notes in Math.Ser. 1986. V. 129.
6. Мирзоев К.А. *О теореме Орлова об индексе дефекта дифференциальных операторов* // ДАН. 2001. Т. 380, № 5. С. 591–595.
7. Долгих И.Н., Мирзоев К.А. *Индексы дефекта и спектр самосопряженных расширений некоторых классов дифференциальных операторов* // Математический сборник. 2006. Т. 127, № 4. С. 53–74.
8. Бройтигам И.Н., Мирзоев К.А., Сафонова Т.А. *Аналог теоремы Орлова об индексе дефекта для матричных дифференциальных операторов второго порядка* // Математические заметки. 2015. Т. 97, № 2. С. 314-–317.
9. Мирзоев К.А., Сафонова Т.А. *Сингулярные операторы Штурма-Лиувилля с негладкими потенциалами в пространстве вектор-функций* // Уфимский математический журнал. 2011. Т. 3, № 3. С. 105–119.
10. W.N. Everitt, L. Marcus *Boundary Value Problems and Sympletic Algebra for Ordinary Differential and Quasi-Differentrial Operators* // AMS. Mathematical Surveys and Monographs. 1999. V. 61. 187 p.
11. R.L. Anderson *Limit-point and limit-circle criteria for a class of singular symmetric differential operators* // Canad. J. Math. 1976. 28. № 5. P. 905–914.
12. Наймарк М.А. *Линейные дифференциальные операторы.* 2-е изд., перераб. и доп. М.:Наука. 1969. 526 с.
13. A. Zettl *Sturm-Liouville theory.* MS, Mathematical Surveys and Monographs, vol.121. 2005. 330 p.
14. Савчук А.М., Шкаликов А.А. *Операторы Штурма-Лиувилля с сингулярными потенциалами* // Математические заметки 1999. Т. 66. В. 6. С. 897–912.
15. Савчук А.М., Шкаликов А.А. *Операторы Штурма-Лиувилля с потенциалами-распределениями* // Труды ММО. 2003. Т. 64. С. 159–212.
16. S. Faedo *Proprieta asintotiche delle soluzioni dei sistemi differenziali lineari* // Annali di Matematica Pura ed Applicata (4), 26. 1947. P. 207–215.
17. Коддингтон Э.А., Левинсон Н. *Теория обыкновенных дифференциальных уравнений.* М.: Издательство ЛКИ. 2007. 472 с.

Ирина Николаевна Бройтигам,
САФУ им. М.В. Ломоносова,
Набережная Северной Двины, 17,
163002, г. Архангельск, Россия
E-mail: irinadolgih@rambler.ru

Карахан Агахан оглы Мирзоев,
МГУ им. М.В. Ломоносова,
Ленинские Горы, 1,
119991, г. Москва, Россия
E-mail: mirzoev.karahan@mail.ru

Татьяна Анатольевна Сафонова,
САФУ им. М.В. Ломоносова,
Набережная Северной Двины, 17,
163002, г. Архангельск, Россия
E-mail: tanya.strelkova@rambler.ru