

УДК 517.9

СИММЕТРИИ И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ЦЕНООБРАЗОВАНИЯ ОПЦИОНОВ

М.М. ДЫШАЕВ, В.Е. ФЁДОРОВ

Аннотация. Исследуется групповая структура уравнения Шенбухера–Уилмотта со свободным параметром, моделирующего ценообразование опционов. Найдена пятимерная группа преобразований эквивалентности такого уравнения. С ее помощью найдены четырехмерные алгебры Ли допускаемых операторов уравнения в случае двух спецификаций свободного элемента и трехмерная алгебра для остальных, не эквивалентных им случаев. Для каждой из алгебр найдены оптимальные системы подалгебр и соответствующие им инвариантные решения или инвариантные подмодели уравнения.

Ключевые слова: нелинейное уравнение в частных производных, нелинейное уравнение Блэка–Шоулса, модель Шенбухера–Уилмотта, ценообразование опционов, групповой анализ, инвариантное решение.

Mathematics Subject Classification: 58J70, 76M60, 91G99, 35A30

1. ВВЕДЕНИЕ

Традиционной моделью в теории финансовых рынков является модель Блэка–Шоулса [1, 2], описываемая обратным уравнением теплопроводности с переменными коэффициентами. Однако практические исследования показывают, что эта модель в силу сделанных допущений далека от адекватности реальным процессам, протекающим на финансовых рынках (см. [3]–[6]). Поэтому исследователи в последние десятилетия перешли к более сложным моделям динамики финансовых рынков, например, исследуются модели со стохастической волатильностью [7], модели, учитывающие наличие транзакционных издержек [8], а также другие модели [3, 4]. Все более популярными у исследователей становятся нелинейные модели, в том числе нелинейные модели типа Блэка–Шоулса. Например, модель с учетом транзакционных издержек (transaction-cost models) в работе [9] имеет вид

$$w_t + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 w_{xx}(1 + 2\rho x w_{xx}) = 0,$$

где t — время; x — цена акции; w — цена опциона; σ — волатильность акции; ρ — транзакционные издержки.

Другим типом моделей являются модели с редуцированной формой стохастического дифференциального уравнения (reduced-form SDE models), имеющие вид

$$w_t + \frac{\sigma^2 x^2 w_{xx}}{2(1 - bx w_{xx})^2} = 0,$$

M.M. DYSHAEV, V.E. FEDOROV, SYMMETRIES AND EXACT SOLUTIONS OF A NONLINEAR PRICING OPTIONS EQUATION.

© ДЫШАЕВ М.М., ФЁДОРОВ В.Е. 2017.

Работа второго автора выполнена при поддержке Правительства РФ (Постановление №211 от 16.03.2013 г.), соглашение №02.A03.21.0011, и Министерства образования и науки РФ, задание №1.6462.2017/БЧ).

Поступила 28 декабря 2015 г.

где b — параметр ликвидности. Они рассмотрены, например, в работах [10]–[13].

Как показано в работах [11, 14, 15], модель стоимости хеджирующей стратегии на неликвидном рынке с учетом влияния операций крупных трейдеров может быть представлена в виде

$$w_t + \frac{\sigma^2 x^2 w_{xx}}{2(1 - \rho x \lambda(x) w_{xx})^2} = 0. \quad (1)$$

В данном случае ρ является параметром, определяющим влияние операций крупных трейдеров, а $\lambda(x)$ выбирается таким образом, чтобы получить необходимую форму выплаты. Значения ρ и $\lambda(x)$ могут быть определены исходя из наблюдаемых на рынке цен опционов.

Еще одной моделью ценообразования опционов является так называемая модель равновесия (equilibrium model) или модель с функцией реакции (reaction-function model). Примеры использования данной модели приведены в работах [15, 16]. Рассмотрим соответствующее модели равновесия, называемой также моделью Шенбухера–Уилмотта [17], уравнение

$$w_t + \frac{\sigma^2 x^2 w_{xx}}{2 \left(1 - \rho \frac{g'(\rho w_x)}{g(\rho w_x)} x w_{xx} \right)^2} = 0, \quad (2)$$

описывающее ценообразование опционов на неликвидном рынке с учетом влияния размеров открытых позиций трейдеров. В этом случае x — цена базового актива, σ — волатильность цены базового актива, $\rho \geq 0$ — показатель, характеризующий величину позиции трейдера относительно общего объема торгуемого базового актива. Модели, учитывающие влияние транзакционных издержек и хеджирующих сделок крупных трейдеров на базовый актив, могут быть применены для некоторых активов, которые торгуются на биржевых площадках развивающихся стран.

В рассматриваемой модели (2) в работах [14, 17, 18, 19] функция реакции $\psi = \psi(F_t, \rho \Phi_t)$ зависит от фундаментальной цены акции F_t и нормализованного объема спроса крупных трейдеров $\rho \Phi_t$. По сути, функция ψ является равновесной ценой. Она обеспечивает равновесие между ценой базового актива, величиной позиции крупных трейдеров по данному активу и фундаментальной ценой базового актива F_t . В работе [19] она имеет вид $\psi(f, \alpha) = f e^\alpha$, в работах [14, 17] взята в виде $\psi(f, \alpha) = f/(1 - \alpha)$. При выводе уравнения (2) в [18] предполагается, что $\psi(f, \alpha) = f g(\alpha)$ при некоторой возрастающей функции $g = g(\alpha)$. Предположение о возрастающем характере функции $g(\alpha)$, входящей в функцию ψ , впервые сделано в работе [16] и хорошо согласуется с практическими наблюдениями, когда цены растут при увеличении позиций крупных трейдеров.

Методы исследования перечисленных моделей весьма различны: численные методы, методы теории временных рядов, теории нейронных сетей и т. д. [20]–[23]. Как всегда, когда идет речь о процессах, моделируемых дифференциальными уравнениями, важно иметь точные решения таких уравнений. В случае нелинейных дифференциальных уравнений одними из самых эффективных методов, позволяющих осуществлять поиск решений, являются методы группового анализа [24, 25]. Первые исследования групповых свойств линейного уравнения Блэка–Шоулса были проведены в работе Н.Х. Ибрагимова и Р.К. Газизова [26]. Помимо линейного уравнения, в последние годы методами симметричного анализа нередко исследуются различные нелинейные модификации уравнения Блэка–Шоулса. Например, уравнение (1) таким образом подробно исследовано в работах L.A. Bordag с соавторами [18, 27, 28]. Кроме того, в работах L.A. Bordag и A. Mikaelyan [29, 30] получены интересные результаты о симметриях и инвариантных решениях уравнения (2).

Данная работа посвящена групповой классификации [24, 31] уравнения (2) и поиску его точных решений методами группового анализа. Для этого во втором разделе найдены группы преобразований эквивалентности этого уравнения. С их помощью в третьем

разделе удалось показать, что для спецификаций функции $v(\alpha) = g'(\alpha)/g(\alpha) = \beta/\alpha$, соответствующей степенной функции $g(\alpha) = C\alpha^\beta$, и $v \equiv 1$ ($g = Ce^\alpha$) уравнение имеет четырехмерную основную алгебру Ли, а в случаях, не приводимых к указанным преобразованиями эквивалентности, основная алгебра Ли трехмерная. Этот результат корректирует результат работ [29, 30], в которых выделены три спецификации с дополнительными симметриями (используя полученные здесь преобразования эквивалентности, нетрудно показать эквивалентность двух из них). Четвертый, пятый и шестой разделы посвящены поиску инвариантных решений и подмоделей уравнения (2) с различными алгебрами Ли (при различных спецификациях функции g). В седьмом разделе подведены итоги исследования.

2. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ УРАВНЕНИЯ ШЕНБУХЕРА–УИЛМОТТА

Домножим уравнение (2) на константу ρ и сделаем замену $\rho w = u$ и переобозначение $g'(\rho w_x)/g(\rho w_x) = v(u_x)$. Получим уравнение

$$u_t + \frac{\sigma^2 x^2 u_{xx}}{2(1 - xv(u_x)u_{xx})^2} = 0. \quad (3)$$

Для нахождения спецификаций функции $v = v(u_x)$, при которых появляются дополнительные к задаваемым ядром главных алгебр Ли симметрии уравнения (3), необходимо найти непрерывную группу преобразований эквивалентности этого уравнения. Для этого запишем уравнение (3) в виде

$$u_t + \frac{\sigma^2 x^2 u_{xx}}{2(1 - xv u_{xx})^2} = 0, \quad (4)$$

подразумевая, что v — это дополнительная переменная, зависящая от переменных t, x, u, u_t, u_x . Генераторы непрерывной группы преобразований эквивалентности будем искать в виде $Y = \tau \partial_t + \xi \partial_x + \eta \partial_u + \mu \partial_v$, где функции τ, ξ, η зависят от t, x, u , а μ зависит от t, x, u, u_t, u_x, v . Здесь и далее для краткости используется запись $\frac{\partial}{\partial t} \equiv \partial_t$ и т. п. Дополним уравнение (4) уравнениями

$$v_t = 0, \quad v_x = 0, \quad v_u = 0, \quad v_{u_t} = 0, \quad (5)$$

означающими, что в исходной постановке задачи v зависит только от u_x .

Будем рассматривать систему (4), (5) как многообразие $\mathfrak{N}$ в расширенном пространстве соответствующих переменных. Подействуем на левую часть системы (4), (5) продолженным оператором

$$\tilde{Y} = Y + \varphi^t \partial_{u_t} + \varphi^{xx} \partial_{u_{xx}} + \mu^t \partial_{v_t} + \mu^x \partial_{v_x} + \mu^u \partial_{v_u} + \mu^{ut} \partial_{v_{u_t}},$$

сузим результат действия на многообразии $\mathfrak{N}$ и получим уравнения

$$\varphi^t + \frac{\sigma^2 x u_{xx} \xi}{(1 - xv u_{xx})^3} + \frac{\sigma^2 x^2 (1 + xv u_{xx}) \varphi^{xx}}{2(1 - xv u_{xx})^3} + \frac{\sigma^2 x^3 u_{xx}^2 \mu}{(1 - xv u_{xx})^3} \Big|_{\mathfrak{N}} = 0, \quad (6)$$

$$\mu^t|_{\mathfrak{N}} = 0, \quad \mu^x|_{\mathfrak{N}} = 0, \quad \mu^u|_{\mathfrak{N}} = 0, \quad \mu^{ut}|_{\mathfrak{N}} = 0. \quad (7)$$

Коэффициенты оператора $\tilde{Y}$ могут быть вычислены по формулам продолжения, например, $\mu^t = \tilde{D}_t(\mu) - v_t \tilde{D}_t(\tau) - v_x \tilde{D}_t(\xi) - v_u \tilde{D}_t(\eta) - v_{u_t} \tilde{D}_t(\varphi^t) - v_{u_x} \tilde{D}_t(\varphi^x)$, использующим операторы дифференцирования

$$\tilde{D}_t = \partial_t + v_t \partial_v + v_{tt} \partial_{v_t} + v_{tx} \partial_{v_x} + v_{tu} \partial_{v_u} + v_{tu_t} \partial_{v_{u_t}} + v_{tu_x} \partial_{v_{u_x}}$$

и т. д. Тогда уравнения (7) примут вид

$$\mu_t - v'(u_x) \varphi_t^x = 0, \quad \mu_x - v'(u_x) \varphi_x^x = 0, \quad \mu_u - v'(u_x) \varphi_u^x = 0, \quad \mu_{u_t} - v'(u_x) \varphi_{u_t}^x = 0.$$

Поскольку

$$\varphi^x = \eta_x + u_x \eta_u - u_t \tau_x - u_t u_x \tau_u - u_x \xi_x - u_x^2 \xi_u, \quad (8)$$

то эти уравнения можно расписать в виде:

$$\begin{aligned} \mu_t - v'(u_x) (\eta_{tx} + u_x \eta_{tu} - u_t \tau_{tx} - u_t u_x \tau_{tu} - u_x \xi_{tx} - u_x^2 \xi_{tu}) |_{\mathfrak{N}} = \\ = \mu_t - v'(u_x) (\eta_{tx} + u_x \eta_{tu} - u_x \xi_{tx} - u_x^2 \xi_{tu} + \\ + \frac{\sigma^2 x^2 u_{xx} \tau_{tx}}{2(1 - xvu_{xx})^2} + \frac{\sigma^2 x^2 u_{xx} u_x \tau_{tu}}{2(1 - xvu_{xx})^2}) = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \mu_x - v'(u_x) (\eta_{xx} + u_x \eta_{xu} - u_t \tau_{xx} - u_t u_x \tau_{xu} - u_x \xi_{xx} - u_x^2 \xi_{xu}) |_{\mathfrak{N}} = \\ = \mu_x - v'(u_x) (\eta_{xx} + u_x \eta_{xu} - u_x \xi_{xx} - u_x^2 \xi_{xu} + \\ + \frac{\sigma^2 x^2 u_{xx} \tau_{xx}}{2(1 - xvu_{xx})^2} + \frac{\sigma^2 x^2 u_{xx} u_x \tau_{xu}}{2(1 - xvu_{xx})^2}) = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \mu_u - v'(u_x) (\eta_{xu} + u_x \eta_{uu} - u_t \tau_{xu} - u_t u_x \tau_{uu} - u_x \xi_{xu} - u_x^2 \xi_{uu}) |_{\mathfrak{N}} = \\ = \mu_u - v'(u_x) (\eta_{xu} + u_x \eta_{uu} - u_x \xi_{xu} - u_x^2 \xi_{uu} + \\ + \frac{\sigma^2 x^2 u_{xx} \tau_{xu}}{2(1 - xvu_{xx})^2} + \frac{\sigma^2 x^2 u_{xx} u_x \tau_{uu}}{2(1 - xvu_{xx})^2}) = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\mu_{ut} + v'(u_x) (\tau_x + u_x \tau_u) = 0. \quad (12)$$

Уравнение (6) в силу равенства

$$\begin{aligned} \varphi^{xx} = \eta_{xx} + 2u_x \eta_{xu} + u_x^2 \eta_{uu} + u_{xx} \eta_u - u_t \tau_{xx} - 2u_t u_x \tau_{xu} - 2u_{tx} \tau_x - u_t u_x^2 \tau_{uu} - \\ - 2u_x u_{tx} \tau_u - u_t u_{xx} \tau_u - u_x \xi_{xx} - 2u_x^2 \xi_{xu} - 2u_{xx} \xi_x - u_x^3 \xi_{uu} - 3u_x u_{xx} \xi_u \end{aligned}$$

примет вид

$$\begin{aligned} \eta_t + u_t \eta_u - u_t \tau_t - u_t^2 \tau_u - u_x \xi_t - u_t u_x \xi_u + \frac{\sigma^2 x}{2(1 - xvu_{xx})^3} (2u_{xx} \xi + 2x^2 u_{xx}^2 \mu + \\ + x(1 + xvu_{xx})(\eta_{xx} + 2u_x \eta_{xu} + u_x^2 \eta_{uu} + u_{xx} \eta_u - \\ - u_t \tau_{xx} - 2u_t u_x \tau_{xu} - 2u_{tx} \tau_x - u_t u_x^2 \tau_{uu} - 2u_x u_{tx} \tau_u - \\ - u_t u_{xx} \tau_u - u_x \xi_{xx} - 2u_x^2 \xi_{xu} - 2u_{xx} \xi_x - u_x^3 \xi_{uu} - 3u_x u_{xx} \xi_u)) |_{\mathfrak{N}} = \\ = \eta_t - \frac{\sigma^2 x^2 u_{xx} \eta_u}{2(1 - xvu_{xx})^2} + \frac{\sigma^2 x^2 u_{xx} \tau_t}{2(1 - xvu_{xx})^2} - \frac{\sigma^4 x^4 u_{xx}^2 \tau_u}{4(1 - xvu_{xx})^4} - u_x \xi_t + \\ + \frac{\sigma^2 x^2 u_x u_{xx} \xi_u}{2(1 - xvu_{xx})^2} + \frac{\sigma^2 x}{2(1 - xvu_{xx})^3} (2u_{xx} \xi + 2x^2 u_{xx}^2 \mu + \\ + x(1 + xvu_{xx}) \left(\eta_{xx} + 2u_x \eta_{xu} + u_x^2 \eta_{uu} + u_{xx} \eta_u + \frac{\sigma^2 x^2 u_{xx} \tau_{xx}}{2(1 - xvu_{xx})^2} + \right. \\ \left. + \frac{\sigma^2 x^2 u_x u_{xx} \tau_{xu}}{(1 - xvu_{xx})^2} - 2u_{tx} \tau_x + \frac{\sigma^2 x^2 u_x^2 u_{xx} \tau_{uu}}{2(1 - xvu_{xx})^2} - 2u_x u_{tx} \tau_u + \frac{\sigma^2 x^2 u_{xx}^2 \tau_u}{2(1 - xvu_{xx})^2} - \right. \\ \left. - u_x \xi_{xx} - 2u_x^2 \xi_{xu} - 2u_{xx} \xi_x - u_x^3 \xi_{uu} - 3u_x u_{xx} \xi_u \right)) = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Дифференцированием последнего уравнения по u_{tx} получим

$$(1 + xvu_{xx})(\tau_x + u_x \tau_u) = 0,$$

отсюда $\tau = \tau(t)$. Следовательно, уравнения (9)–(13) примут вид

$$\mu_t - v'(u_x) (\eta_{tx} + u_x \eta_{tu} - u_x \xi_{tx} - u_x^2 \xi_{tu}) = 0, \quad (14)$$

$$\mu_x - v'(u_x) (\eta_{xx} + u_x \eta_{xu} - u_x \xi_{xx} - u_x^2 \xi_{xu}) = 0, \quad (15)$$

$$\mu_u - v'(u_x) (\eta_{xu} + u_x \eta_{uu} - u_x \xi_{xu} - u_x^2 \xi_{uu}) = 0, \quad (16)$$

$$\mu_{u_t} = 0, \quad (17)$$

$$\begin{aligned} & \eta_t - \frac{\sigma^2 x^2 u_{xx} \eta_u}{2(1 - xvu_{xx})^2} + \frac{\sigma^2 x^2 u_{xx} \tau'(t)}{2(1 - xvu_{xx})^2} - u_x \xi_t + \\ & + \frac{\sigma^2 x^2 u_x u_{xx} \xi_u}{2(1 - xvu_{xx})^2} + \frac{\sigma^2 x}{2(1 - xvu_{xx})^3} (2u_{xx} \xi + 2x^2 u_{xx}^2 \mu + \\ & + x(1 + xvu_{xx}) (\eta_{xx} + 2u_x \eta_{xu} + u_x^2 \eta_{uu} + u_{xx} \eta_u - u_x \xi_{xx} - \\ & - 2u_x^2 \xi_{xu} - 2u_{xx} \xi_x - u_x^3 \xi_{uu} - 3u_x u_{xx} \xi_u)) = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Домножим уравнение (18) на $2(1 - xvu_{xx})^3$ и получим

$$\begin{aligned} & 2(1 - xvu_{xx})^3 \eta_t + (1 - xvu_{xx}) \sigma^2 x^2 u_{xx} (\tau'(t) - \eta_u) - 2(1 - xvu_{xx})^3 u_x \xi_t + \\ & + (1 - xvu_{xx}) \sigma^2 x^2 u_x u_{xx} \xi_u + \sigma^2 x (2u_{xx} \xi + 2x^2 u_{xx}^2 \mu + \\ & + x(1 + xvu_{xx}) (\eta_{xx} + 2u_x \eta_{xu} + u_x^2 \eta_{uu} + u_{xx} \eta_u - u_x \xi_{xx} - \\ & - 2u_x^2 \xi_{xu} - 2u_{xx} \xi_x - u_x^3 \xi_{uu} - 3u_x u_{xx} \xi_u)) = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Расщепляя уравнение (19) по переменной u_{xx} , получим при u_{xx}^3 множитель $\eta_t - u_x \xi_t$ при условии $v \neq 0$, поэтому $\xi = \xi(x, u)$, $\eta = \eta(x, u)$. Тогда из (14) получим, что $\mu_t = 0$, а уравнение (19) примет вид

$$\begin{aligned} & (1 - xvu_{xx}) xu_{xx} (\tau'(t) - \eta_u) + (1 - xvu_{xx}) xu_x u_{xx} \xi_u + \\ & + 2u_{xx} \xi + 2x^2 u_{xx}^2 \mu + x(1 + xvu_{xx}) (\eta_{xx} + 2u_x \eta_{xu} + u_x^2 \eta_{uu} + u_{xx} \eta_u - u_x \xi_{xx} - \\ & - 2u_x^2 \xi_{xu} - 2u_{xx} \xi_x - u_x^3 \xi_{uu} - 3u_x u_{xx} \xi_u) = 0. \end{aligned}$$

Продифференцируем это уравнение по t и получим $\tau''(t) = 0$, $\tau(t) = At + B$, а уравнение теперь примет вид

$$\begin{aligned} & (1 - xvu_{xx}) xu_{xx} (A - \eta_u) + (1 - xvu_{xx}) xu_x u_{xx} \xi_u + \\ & + 2u_{xx} \xi + 2x^2 u_{xx}^2 \mu + x(1 + xvu_{xx}) (\eta_{xx} + 2u_x \eta_{xu} + u_x^2 \eta_{uu} + u_{xx} \eta_u - u_x \xi_{xx} - \\ & - 2u_x^2 \xi_{xu} - 2u_{xx} \xi_x - u_x^3 \xi_{uu} - 3u_x u_{xx} \xi_u) = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Расщепляя (20) по u_{xx} , получим коэффициент при u_{xx}^0 :

$$x(\eta_{xx} + 2u_x \eta_{xu} + u_x^2 \eta_{uu} - u_x \xi_{xx} - 2u_x^2 \xi_{xu} - u_x^3 \xi_{uu}) = 0.$$

Из этого уравнения расщеплением по u_x получим систему

$$\xi_{uu} = \eta_{xx} = 0, \quad (21)$$

$$2\eta_{xu} = \xi_{xx}, \quad (22)$$

$$\eta_{uu} = 2\xi_{xu}. \quad (23)$$

Из (21) следует, что $\xi = C(x)u + D(x)$, $\eta = E(u)x + F(u)$. Подставив эти выражения в (22), получим $2E'(u) = C''(x)u + D''(x)$. Тогда $C'''(x) = D'''(x) = 0$, $C(x) = Gx^2 + Hx + I$, $D(x) = Jx^2 + Kx + L$, $E'(u) = Gu + J$, $E(u) = \frac{1}{2}Gu^2 + Ju + M$. Таким образом,

$$\xi = Gx^2 u + Hxu + Iu + Jx^2 + Kx + L, \quad \eta = \frac{1}{2}Gu^2 + Jxu + Mx + F(u).$$

Подстановкой этих выражений в (23) получим уравнение $F''(u) = 3Gx + 2H$, откуда $G = 0$, $F(u) = Hu^2 + Nu + P$,

$$\xi = Hxu + Iu + Jx^2 + Kx + L, \quad \eta = Jxu + Mx + Hu^2 + Nu + P.$$

Теперь, приравнявая к нулю коэффициенты при u_{xx} и при u_{xx}^2 из левой части уравнения (20), получим уравнения

$$\mu = \left[\frac{A}{2} - \eta_u + 2u_x \xi_u + \xi_x \right] v,$$

$$\begin{aligned} Ax + 2\xi - 2x\xi_x - 2xu_x\xi_u - x^2u_x\xi_{xx}v - 2x^2u_x^2\xi_{xu}v + 2x^2u_x\eta_{xu}v + x^2u_x^2\eta_{uu}v = \\ = Ax + 2Iu + 2L - 2Jx^2 - 2Hx^2u_x - 2Ixu_x = 0. \end{aligned}$$

Из последнего равенства следует, что $A = H = I = J = L = 0$. Тогда

$$\tau = B, \quad \xi = Kx, \quad \eta = Mx + Nu + P, \quad \mu = (K - N)v. \quad (24)$$

При этом равенства (14)–(17) также выполняются.

Таким образом, решение системы уравнений, определяющей генераторы непрерывных групп преобразований эквивалентности, задается формулами (24). Отсюда получим утверждение.

Теорема 1. *Базис алгебры Ли инфинитезимальных операторов групп преобразований эквивалентности уравнения (3) при функции v , не равной тождественно нулю, образуют операторы*

$$Y_1 = \partial_t, \quad Y_2 = \partial_u, \quad Y_3 = x\partial_u, \quad Y_4 = x\partial_x + u\partial_u, \quad Y_5 = u\partial_u - v\partial_v.$$

Здесь элемент базиса, соответствующий решению при $K = 1, B = M = N = P = 0$ заменен на его сумму с элементом базиса, соответствующим решению $N = 1, B = K = M = P = 0$ для того, чтобы минимизировать количество базисных операторов, содержащих дополнительную переменную v .

С учетом формулы (8) получим продолжения базисных операторов

$$\tilde{Y}_1 = \partial_t, \quad \tilde{Y}_2 = \partial_u, \quad \tilde{Y}_3 = x\partial_u + \partial_{u_x}, \quad \tilde{Y}_4 = x\partial_x + u\partial_u, \quad \tilde{Y}_5 = u\partial_u - v\partial_v + u_x\partial_{u_x}. \quad (25)$$

Отсюда следует, что базис ядра основных алгебр Ли уравнения (3) составляют операторы Y_1, Y_2, Y_4 , продолжения которых не содержат дополнительных переменных v, u_x .

Следствие 1. *Базис ядра основных алгебр Ли уравнения (3) при функции v , не равной тождественно нулю, образуют операторы $X_1 = \partial_t, X_2 = \partial_u, X_3 = x\partial_x + u\partial_u$.*

3. ГРУППОВАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим алгебру Ли, полученную из проекций операторов (25) на подпространство переменных v, u_x , т. е. алгебру с базисом

$$Z_1 = \partial_{u_x}, \quad Z_2 = v\partial_v - u_x\partial_{u_x}. \quad (26)$$

Заметим сразу, что оператору Z_1 соответствует оператор Y_3 , а оператору Z_2 — оператор $-Y_5$.

Ненулевыми структурными константами для данной алгебры Ли являются $c_{12}^1 = -1, c_{21}^1 = 1$. По формуле $E_\alpha = c_{\alpha\beta}^\gamma e^\beta \partial_{e^\gamma}$ найдем генераторы внутренних автоморфизмов алгебры Ли $E_1 = -e^2 \partial_{e^1}, E_2 = e^1 \partial_{e^1}$ и соответствующие им группы преобразований —

$$E_1 : \bar{e}^1 = e^1 - e^2 a_1, \quad E_2 : \bar{e}^1 = e^1 e^{a_2}.$$

Здесь e^i — коэффициент при операторе Z_i в разложении элемента рассматриваемой алгебры Ли по ее базису.

Пусть $e^2 \neq 0$, тогда $e^1 = 0$ в силу E_1 . Получим подалгебру с базисом Z_2 . Иначе имеем одномерную подалгебру с базисом Z_1 . Таким образом, оптимальная система одномерных подалгебр алгебры L_2 с базисом (26) имеет вид $\Theta_1 = \{\langle Z_1 \rangle, \langle Z_2 \rangle\}$.

Для операторов Z из оптимальной системы вычислим выражения $Z(V(u_x) - v)|_{v=V} = 0$. Получим:

$$\begin{aligned} Z_1(V(u_x) - v)|_{v=V} = V' = 0, \quad V \equiv \beta; \\ Z_2(V(u_x) - v)|_{v=V} = -V - u_x V' = 0, \quad V = \frac{\beta}{u_x}. \end{aligned}$$

Первая из спецификаций преобразованием эквивалентности Y_5 сводится к $V \equiv 1$. Во втором случае преобразования эквивалентности, найденные в предыдущем разделе, не позволяют изменить константу β .

Для каждого базисного оператора из оптимальной системы вычислим проекцию соответствующего генератора группы преобразований эквивалентности (Y_3 или $-Y_5$) на подпространство переменных t, x, u . Получится соответствие (с точностью до множителя) $Z_1 : x\partial_u, Z_2 : u\partial_u$. Поэтому спецификации свободного элемента $v \equiv 1$ соответствует дополнительная симметрия $x\partial_u$, а спецификациям

$$v = \beta u_x^{-1}, \quad \beta \in \mathbb{R}, \quad (27)$$

соответствует симметрия $u\partial_u$.

Теорема 2. 1. *Базис основной алгебры Ли уравнения*

$$u_t + \frac{\sigma^2 x^2 u_{xx}}{2(1 - xu_{xx})^2} = 0$$

имеет вид $X_1 = \partial_t, X_2 = \partial_u, X_3 = x\partial_x + u\partial_u, X_4 = x\partial_u$.

2. *Базис основной алгебры Ли уравнений*

$$u_t + \frac{\sigma^2 x^2 u_{xx}}{2\left(1 - \frac{\beta x u_{xx}}{u_x}\right)^2} = 0, \quad \beta \in \mathbb{R},$$

имеет вид $X_1 = \partial_t, X_2 = \partial_u, X_3 = x\partial_x, X_4 = u\partial_u$.

3. *В случаях функции v , не приводимой к перечисленным выше преобразованиями эквивалентности, основная алгебра Ли уравнения*

$$u_t + \frac{\sigma^2 x^2 u_{xx}}{2(1 - xv(u_x)u_{xx})^2} = 0$$

совпадает с ядром основных алгебр Ли и имеет вид $X_1 = \partial_t, X_2 = \partial_u, X_3 = x\partial_x + u\partial_u$.

Во втором пункте теоремы использована возможность линейного преобразования базиса с целью упрощения вида его элементов.

Замечание 1. В работе [29] помимо спецификаций функции v из пунктов 2 и 3 теоремы 2 указаны еще спецификации

$$v = \beta(1 - u_x)^{-1}, \quad \beta \in \mathbb{R}, \quad (28)$$

(см. п. 4 теоремы 4.2.1 [29]), имеющие дополнительную четвертую симметрию. Однако с помощью преобразования $v \rightarrow -v$, которое, очевидно, является внутренним автоморфизмом соответствующей группы преобразований эквивалентности алгебры L_5 из теоремы 1, а также используя порождаемое оператором Y_3 преобразование эквивалентности, осуществляющее сдвиг аргумента функции v , можно преобразовать эти спецификации к виду (27) из пункта 2 теоремы 2. Описанные преобразования соответствуют замене переменных $\bar{t} = t, \bar{x} = x, \bar{u} = x - u$, где черта над символом переменной обозначает новую переменную. Нетрудно проверить, что при таких преобразованиях алгебра Ли уравнения со спецификацией (28) преобразуется к алгебре Ли уравнения со спецификацией (27). Поэтому с точки зрения группового анализа спецификации (27) и (28) эквивалентны.

4. ИНВАРИАНТНЫЕ ПОДМОДЕЛИ В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ

Рассмотрим уравнение

$$u_t + \frac{\sigma^2 x^2 u_{xx}}{2(1 - xv(u_x)u_{xx})^2} = 0, \quad (29)$$

алгебра Ли L_3 которого имеет базис

$$X_1 = \partial_t, \quad X_2 = \partial_u, \quad X_3 = x\partial_x + u\partial_u. \quad (30)$$

Ненулевые структурные константы ее — $c_{23}^2 = 1$, $c_{32}^2 = -1$, поэтому группы внутренних автоморфизмов имеют вид $E_2 : \bar{e}^2 = e^2 + a_1 e^3$, $E_3 : \bar{e}^2 = e^2 e^{-a_2}$. Используя их, осуществим поиск оптимальной системы одномерных подалгебр данной алгебры Ли L_3 . Инфинитезимальные генераторы искомым базисных для этих подалгебр операторов будут иметь вид $X = \sum_{k=1}^3 e^k X_k = (e^1, e^2, e^3)$.

1. Пусть $e^3 \neq 0$, тогда с помощью E_2 получим $e^2 = 0$, поэтому базисный вектор подалгебры имеет вид $X = (a, 0, 1)$, $a \in \mathbb{R}$.

2.1. При $e^3 = 0$, $e^1 \neq 0$, $e^2 \neq 0$ получим $X = (1, 1, 0)$. При этом использованы внутренние автоморфизмы E_3 и $\bar{e}^2 = -e^2$.

2.2. Остались случаи $X = (1, 0, 0)$ и $X = (0, 1, 0)$.

Лемма 1. *Оптимальная система одномерных подалгебр алгебры L_3 с базисом (30) имеет вид $\Theta_1 = \{\langle X_1 \rangle, \langle X_2 \rangle, \langle X_1 + X_2 \rangle, \langle aX_1 + X_3 \rangle, a \in \mathbb{R}\}$.*

Используя операторы оптимальной системы, найдем инвариантные подмодели уравнения (29) и, по возможности, его инвариантные решения. Результаты исследования записаны в табл. 1, где во втором столбце записана одномерная подалгебра из оптимальной системы, в третьем — ее инварианты, а в четвертом — соответствующая инвариантная подмодель исходного уравнения или вид решения при условии, что ограничения, следующие из вида уравнения или области определения самой функции v , выполнены. Символами A , B обозначены произвольные константы интегрирования.

Таблица 1.

	Подалгебра	Инварианты	Подмодель или решение
1	$\langle X_1 \rangle$	x, u	$u = Ax + B$
2	$\langle X_2 \rangle$	t, x	нет
3	$\langle X_1 + X_2 \rangle$	$u - t, x$	$\sigma^2 x^2 \psi' = -2(1 - xv(\psi)\psi')^2 \neq 0$, $u = t + \varphi(x)$, $\varphi' = \psi$
4	$\langle X_3 \rangle$	$t, x^{-1}u$	$u = Ax$
5	$\langle aX_1 + X_3 \rangle$, $a \neq 0$	$a \ln x - t$, $x^{-1}u$	$u = Ax$ или $2(1 - (a\varphi' + a^2\varphi'')v(\varphi + a\varphi'))^2 = \sigma^2(a\varphi' + a^2\varphi'')/\varphi' \neq 0$, $u = x\varphi(a \ln x - t)$

5. ИНВАРИАНТНЫЕ РЕШЕНИЯ И ПОДМОДЕЛИ В СЛУЧАЕ $v \equiv \beta$

Уравнение

$$u_t + \frac{\sigma^2 x^2 u_{xx}}{2(1 - \beta x u_{xx})^2} = 0, \quad \beta \neq 0 \quad (31)$$

имеет алгебру Ли L_4 с базисом

$$X_1 = \partial_t, \quad X_2 = \partial_u, \quad X_3 = x\partial_x + u\partial_u, \quad X_4 = x\partial_u. \quad (32)$$

Ненулевыми структурными константами этой алгебры являются $c_{23}^2 = 1$, $c_{32}^2 = -1$, поэтому ее группы внутренних автоморфизмов имеют вид $E_2 : \bar{e}^2 = e^2 + a_1 e^3$, $E_3 : \bar{e}^2 = e^2 e^{-a_2}$. Найдем оптимальную систему одномерных подалгебр данной алгебры Ли L_4 .

1. Пусть $e^3 \neq 0$, тогда с помощью E_2 получим $e^2 = 0$, поэтому базисный вектор подалгебры имеет вид $X = (a, 0, 1, b)$, $a, b \in \mathbb{R}$.

2.1. При $e^3 = 0$, $e^2 \neq 0$ получим следующее.

2.1.1. Если $e^1 \neq 0$, то $X = (1, 1, 0, a)$, $a \in \mathbb{R}$. При этом использованы внутренние автоморфизмы E_3 и $\bar{e}^2 = -e^2$.

2.1.2. Пусть $e^1 = 0$, тогда $X = (0, 1, 0, 1)$ или $X = (0, 1, 0, 0)$. В первом случае также использованы E_3 и $\bar{e}^2 = -e^2$.

2.2. Если $e^2 = e^3 = 0$, то $X = (1, 0, 0, a)$, $a \in \mathbb{R}$, или $X = (0, 0, 0, 1)$.

Лемма 2. *Оптимальная система одномерных подалгебр алгебры L_4 с базисом (32) имеет вид*

$$\Theta_1 = \{\langle X_2 \rangle, \langle X_4 \rangle, \langle X_2 + X_4 \rangle, \langle X_1 + aX_4 \rangle, \langle X_1 + X_2 + aX_4 \rangle, \langle aX_1 + X_3 + bX_4 \rangle, a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Для одномерных подалгебр из оптимальной системы получим табл. 2.

Таблица 2.

	Подалгебра	Инварианты	Подмодель, решение, ограничения
1	$\langle X_2 \rangle$	t, x	нет
2	$\langle X_4 \rangle$	t, x	нет
3	$\langle X_2 + X_4 \rangle$	t, x	нет
4	$\langle X_1 \rangle$	x, u	$u = Ax + B$
5	$\langle X_1 + aX_4 \rangle$, $a \neq 0$	$x, u - atx$	$u = atx + A_{a\beta\sigma}x \ln x + Ax + B$, $A_{a\beta\sigma} = \frac{2\beta - \frac{\sigma^2}{2a} \pm \sqrt{\frac{\sigma^4}{4a^2} - \frac{2\beta\sigma^2}{a}}}{2\beta^2}$, $\sigma \neq 0$, $\frac{\sigma^4}{4a^2} - \frac{2\beta\sigma^2}{a} \geq 0$
6	$\langle X_1 + X_2 + aX_4 \rangle$	x , $u - (1 + ax)t$	$\varphi'' = \frac{2\beta - \frac{\sigma^2 x}{2(1+ax)} \pm \sqrt{\frac{\sigma^4 x^2}{4(1+ax)^2} - \frac{2\beta\sigma^2 x}{1+ax}}}{2\beta^2 x}$, $\sigma \neq 0$, $u = (1 + ax)t + \varphi(x)$
7	$\langle X_3 + bX_4 \rangle$, $b \neq 1/\beta$	$t, \frac{u}{x} - b \ln x $	$u = bx \ln x + Ax - \frac{b\sigma^2 tx}{2(1-\beta b)^2}$
8	$\langle aX_1 + X_3 + bX_4 \rangle$, $a \neq 0$	$a \ln x - t$, $\frac{u}{x} - b \ln x $	$u = Ax$ при $b = 0$ или $\sigma^2(b + a\varphi' + a^2\varphi'')/\varphi' = 2(1 - \beta(b + a\varphi' + a^2\varphi''))^2 \neq 0$, $u = bx \ln x + x\varphi(a \ln x - t)$

6. ИНВАРИАНТНЫЕ РЕШЕНИЯ И ПОДМОДЕЛИ В СЛУЧАЕ $v = \beta u_x^{-1}$

Для уравнения

$$u_t + \frac{\sigma^2 x^2 u_{xx}}{2 \left(1 - \frac{\beta x u_{xx}}{u_x}\right)^2} = 0, \quad \beta \neq 0, \quad (33)$$

базис алгебры Ли L_4 имеет вид

$$X_1 = \partial_t, \quad X_2 = \partial_u, \quad X_3 = x\partial_x, \quad X_4 = u\partial_u. \quad (34)$$

Ненулевыми структурными константами этой алгебры являются $c_{24}^2 = 1$, $c_{42}^2 = -1$, поэтому структура данной алгебры Ли не отличается от алгебры из предыдущего параграфа с точностью до перенумерации операторов X_3 , X_4 . Из этого наблюдения и леммы 2 сразу получим следующее утверждение.

Лемма 3. *Оптимальная система одномерных подалгебр алгебры L_4 с базисом (34) имеет вид*

$$\Theta_1 = \{\langle X_2 \rangle, \langle X_3 \rangle, \langle X_2 + X_3 \rangle, \langle X_1 + aX_3 \rangle, \langle X_1 + X_2 + aX_3 \rangle, \langle aX_1 + bX_3 + X_4 \rangle, a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Используя операторы оптимальной системы, найдем инвариантные подмодели уравнения (33) и по возможности его инвариантные решения (табл. 3).

Таблица 3.

	Подалгебра	Инварианты	Подмодель, решение, ограничения
1	$\langle X_2 \rangle$	t, x	нет
2	$\langle X_3 \rangle$	t, u	нет
3	$\langle X_2 + X_3 \rangle$	$t, u - \ln x $	$u = \ln x + \frac{\sigma^2 t}{2(1+\beta)^2} + A, \beta \neq -1$
4	$\langle X_1 \rangle$	x, u	$u = Ax + B, A \neq 0$
5	$\langle X_1 + aX_3 \rangle,$ $a \neq 0$	$\ln x - at, u$	$u = Ae^{-aCt} x ^C + B, A \neq 0,$ $C = \frac{4a\beta(\beta+1)+\sigma^2 \pm \sigma\sqrt{\sigma^2+8a\beta}}{4a\beta^2} \neq 0,$ $\sigma \neq 0, \sigma^2 + 8a\beta \geq 0$
6	$\langle X_1 + X_2 + aX_3 \rangle$	$\ln x - at,$ $u - t$	$2(a\varphi' - 1)(\varphi' - \beta(\varphi'' - \varphi'))^2 =$ $\sigma^2 \varphi'^2(\varphi'' - \varphi'), \varphi(z) \neq Ae^{(1+1/\beta)z} + B,$ $u = t + \varphi(\ln x - at)$
7	$\langle X_4 \rangle$	t, x	нет
8	$\langle aX_1 + X_4 \rangle,$ $a \neq 0$	$x, e^{-t/a}u$	$a\sigma^2 x^2 \varphi'^2 \varphi'' = 2\varphi(\varphi' - \beta x \varphi'')^2 \neq 0,$ $u = e^{t/a} \varphi(x)$
9	$\langle bX_3 + X_4 \rangle,$ $b \neq 0$	$t, x ^{-1/b}u$	$u = Ae^{\frac{\sigma^2(b-1)t}{2(b(\beta+1)-\beta)^2}} x ^{1/b} + B,$ $A \neq 0, b \neq \frac{\beta}{\beta+1} \text{ при } \beta \neq -1$
10	$\langle aX_1 + bX_3 + X_4 \rangle,$ $a \neq 0, b \neq 0$	$a \ln x - bt,$ $e^{-t/a}u$	$a^2 \sigma^2 \varphi'^2 (a\varphi'' - \varphi') =$ $2(ab\varphi' - \varphi)(\varphi' - \beta(a\varphi'' - \varphi'))^2,$ $\varphi(z) \neq Ae^{\frac{1}{a}(1+1/\beta)z} + B,$ $u = e^{t/a} \varphi(a \ln x - bt)$

Оператор $X_2 + X_3$ при $\beta = -1$ инвариантных решений не имеет.

У операторов $X_1 + aX_3$ при $a \neq 0$ инвариантная подмодель имеет вид

$$\sigma^2 \varphi'(\varphi'' - \varphi') = 2a(\varphi' - \beta(\varphi'' - \varphi'))^2 \neq 0.$$

Обозначим аргумент функции φ через z . После подстановки $\zeta = e^z$ и понижения порядка уравнения получим $\sigma^2 \zeta \psi \psi' = 2a(\psi - \beta \zeta \psi')^2$, где $\psi(\zeta) = \frac{d}{d\zeta} \varphi(\ln \zeta)$. Сделав обратную замену $\xi(z) = \psi(e^z)$, получим квадратное уравнение для производной

$$\sigma^2 \xi \xi' = 2a(\xi - \beta \xi')^2.$$

При $a \geq -\frac{\sigma^2}{8\beta}$ в случае положительного β и при $a \leq -\frac{\sigma^2}{8\beta}$ для β отрицательного получим после интегрирования $\xi(z) = Ae^{C_1 z}$, где

$$C_1 = \frac{4a\beta + \sigma^2 \pm \sigma\sqrt{\sigma^2 + 8a\beta}}{4a\beta^2}.$$

Следовательно, инвариантное решение имеет вид, указанный в пятой строке таблицы.

Инвариантное решение подалгебры $\langle bX_3 + X_4 \rangle$, $b \neq 0$, (в таблице строка 9) — это по сути решение с произвольной ненулевой степенью $|x|$ (чтобы не было $u_x = 0$) и соответствующим этой степени множителем при t в аргументе экспоненциальной функции в том же члене решения. Его частным случаем является инвариантное решение для $\langle X_1 + aX_3 \rangle$, $a \neq 0$, (строка 5).

7. ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ШЕНБУХЕРА–УИЛМОТТА

Проанализируем полученные результаты в терминах исходной задачи. Функции $v \equiv \beta$ соответствует модель

$$w_t + \frac{\sigma^2 x^2 w_{xx}}{2(1 - \beta \rho x w_{xx})^2} = 0$$

с функцией $g(\alpha) = Ge^{\beta\alpha}$ при константе интегрирования G . Ограничимся рассмотрением вычисленных точных решений. Возвращаясь от u к функции w , получим, учитывая произвол в выборе некоторых констант, решения

$$w(t, x) = Ax + B;$$

$$w(t, x) = \frac{atx}{\rho} + \frac{2\beta - \frac{\sigma^2}{2a} \pm \sqrt{\frac{\sigma^4}{4a^2} - \frac{2\beta\sigma^2}{a}}}{2\beta^2\rho} x \ln|x| + Bx + C,$$

$$a \neq 0, \quad \sigma \neq 0, \quad \frac{\sigma^4}{4a^2} - \frac{2\beta\sigma^2}{a} \geq 0;$$

$$w(t, x) = \frac{b}{\rho} x \ln|x| - \frac{b\sigma^2 tx}{2\rho(1 - \beta b)^2} + Ax + B, \quad b \neq 1/\beta.$$

В последнем случае семейство инвариантных решений операторов $X_3 + bX_4$, $b \neq 1/\beta$ расширено с помощью допускаемой группы сдвигов по переменной u , соответствующей оператору X_2 .

Функции $v = \frac{\beta}{u_x}$ преобразованием эквивалентности, соответствующим оператору Y_3 , могут быть приведены к эквивалентному виду $v = \frac{\beta}{u_x + \gamma}$, $\gamma \in \mathbb{R}$. Таким функциям соответствуют функции $g(\alpha) = G(\alpha + \gamma)^\beta$ и модель

$$w_t + \frac{\sigma^2 x^2 w_{xx}}{2\left(1 - \frac{\beta x w_{xx}}{w_x + \gamma/\rho}\right)^2} = 0. \quad (35)$$

Нетрудно заметить, что решения (35) связаны с решениями уравнения (33) равенством $w(t, x) = (u(t, x) - \gamma x)\rho^{-1}$. Поэтому согласно таблице из предыдущего параграфа уравнение (35) имеет точные решения

$$w(t, x) = Ax + B, \quad A \neq -\frac{\gamma}{\rho};$$

$$w(t, x) = A \ln|x| + \frac{A\sigma^2 t}{2(1 + \beta)^2} + B - \frac{\gamma}{\rho} x, \quad A \neq 0, \quad \beta \neq -1;$$

$$w(t, x) = Ae^{-\frac{\sigma^2 C(C-1)t}{2(1-\beta(C-1))^2}} x^C + B - \frac{\gamma}{\rho} x, \quad AC \neq 0.$$

При этом сначала класс решений $u(t, x)$ уравнения (33), инвариантных оператору $X_2 + X_3$, расширен с помощью действия допускаемого оператора X_4 , вследствие чего в них появился множитель A в первых двух слагаемых.

Отметим, что в работе [29] симметрии модели (35) в случаях $\gamma = 0$ и $\gamma \neq 0$ исследуются отдельно. Этого можно было не делать, установив возможность перехода от одной из них к другой с помощью группы преобразований эквивалентности исследуемого класса уравнений (см. замечание 1).

Понятно, что если придерживаться требования монотонного возрастания функции $g(\alpha)$, то для рассмотренных спецификаций функции g надо наложить условие $\beta > 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. F. Black, M. Scholes. *The pricing of options and corporate liabilities* // Journal of Political Economy. 1973. V. 81. P. 637–659.
2. F. Black. *The pricing of Commodity Contracts* // Journal of Financial Economics. 1976. V. 3. P. 167–179.
3. J. Cox, S. Ross, M. Rubinstein. *Option pricing: a simplified approach* // Journal of Financial Economics. 1979. V. 7. P. 229–263.
4. J. Duan. *The GARCH option pricing model* // Mathematical Finance. 1995. V. 5. P. 13–32.
5. E. Derman, N. Taleb. *The illusions of dynamic replication* // Quantitative Finance. 2005. V. 5, No. 4. P. 323–326.
6. E. G. Haug, N. N. Taleb. *Option traders use (very) sophisticated heuristics, never the Black–Scholes–Merton formula* // Journal of Economic Behavior and Organization. 2011. V. 77, No. 2. P. 97–106.
7. J. C. Hull, A. White. *The pricing of options on assets with stochastic volatilities* // The Journal of Finance. 1987. V. 42. P. 281–300.
8. H. E. Leland. *Option pricing and replication with transactions costs* // The Journal of Finance. 1985. V. 40. P. 1283–1301.
9. U. Cetin, R. Jarrow, P. Protter. *Liquidity risk and arbitrage pricing theory* // Finance and Stochastic. 2004. V. 8. P. 311–341.
10. R. Frey. *Market illiquidity as a source of model risk in dynamic hedging*. Model Risk, ed. R. Gibson. London: Risk Publications, 2000. P. 125–136.
11. R. Frey, P. Patie. *Risk Management for Derivatives in Illiquid Markets: a Simulation Study*. Advances in Finance and Stochastics, eds. K. Sandmann and P. Schönbucher. Berlin: Springer, 2002.
12. M. Jandačka, D. Ševćović. *On the risk-adjusted pricing-methodology-based valuation of vanilla options and explanation of the volatility smile* // Journal of Applied Mathematics. 2005. V. 3. P. 253–258.
13. H. Liu, J. Yong. *Option pricing with an illiquid underlying asset market* // Journal of Economic Dynamics and Control. 2005. V. 29, No. 12. P. 2125–2156.
14. R. Frey, A. Stremme. *Market volatility and feedback effects from dynamic hedging* // Mathematical Finance. 1997. V. 7, No. 4. P. 351–374.
15. R. Frey. *Perfect option replication for a large trader* // Finance and Stochastics. 1998. V. 2. P. 115–148.
16. R. A. Jarrow. *Derivative securities markets, market manipulation and option pricing theory* // Journal of Financial and Quantitative Analysis. 1994. V. 29. P. 241–261.
17. P. Schönbucher, P. Wilmott. *The feedback-effect of hedging in illiquid markets* // SIAM Journal on Applied Mathematics. 2000. V. 61. P. 232–272.
18. L. A. Bordag, R. Frey. *Pricing options in illiquid markets: symmetry reductions and exact solutions*. Chapter 3 in Nonlinear Models in Mathematical Finance: Research Trends in Option Pricing, ed. M. Ehrhardt. Nova Science Publishers, Inc., 2008. P. 83–109.
19. E. Platen, M. Schweizer. *On feedback effects from hedging derivatives* // Mathematical Finance. 1998. V. 8. P. 67–84.
20. P. Brandimarte. *Numerical Methods in Finance & Economics*. John Wiley & Sons Publications, 2004; Second edition, 2006. xxiv+669 p.
21. G. Bakshi, C. Cao, Z. Chen. *Empirical performance of alternative option pricing models* // Journal of Finance. 1997. V. 52. P. 2003–2049.
22. M. J. Morelli, G. Montagna, O. Nicrosini, M. Treccani, M. Farina, P. Amato. *Pricing financial derivatives with neural networks* // Physica A. 2004. V. 338. P. 160–165.
23. S. Kou. *A jump diffusion model for option pricing* // Management Science. 2002. V. 48. P. 1086–1101.
24. Овсянников Л. В. *Групповой анализ дифференциальных уравнений*. М.: Наука, 1978. 400 с.
25. Ибрагимов Н. Х. *Группы преобразований в математической физике*. М.: Наука, 1983. 280 с.

26. R. K. Gazizov, N. H. Ibragimov. *Lie symmetry analysis of differential equations in finance* // Nonlinear Dynamics. 1998. V. 17. P. 387–407.
27. L. A. Bordag, A. Y. Chmakova. *Explicit solutions for a nonlinear model of financial derivatives* // International Journal of Theoretical and Applied Finance. 2007. V. 10, No. 1. P. 1–21.
28. L. A. Bordag. *On option-valuation in illiquid markets: invariant solutions to a nonlinear model*. Mathematical Control Theory and Finance, eds. A. Sarychev, A. Shiryaev, M. Guerra and M. R. Grossinho. Springer, 2008. P. 71–94.
29. A. Mikaelyan. *Analytical Study of the Schönbucher–Wilmott Model of the Feedback Effect in Illiquid Markets*. Master's thesis in financial mathematics, Halmstad: Halmstad University, 2009. viii+67 p.
30. L. A. Bordag, A. Mikaelyan. *Models of self-financing hedging strategies in illiquid markets: symmetry reductions and exact solutions* // Journal Letters in Mathematical Physics. 2011. V. 96, No. 1–3. 191–207.
31. Чиркунов Ю. А., Хабиров С. В. *Элементы симметричного анализа дифференциальных уравнений механики сплошной среды*. Новосибирск: НГТУ, 2012. 659 с.

Михаил Михайлович Дышаев,
ФГБОУ ВО «Челябинский государственный университет»,
ул. Братьев Кашириных, 129,
454001, г. Челябинск, Россия
E-mail: Mikhail.Dyshaev@gmail.com

Владимир Евгеньевич Фёдоров,
ФГБОУ ВО «Челябинский государственный университет»,
ул. Братьев Кашириных, 129,
454001, г. Челябинск, Россия
ФГАОУ ВО «Южно-Уральский государственный университет
(национальный исследовательский университет)»,
пр. Ленина, 76,
454080, г. Челябинск, Россия
E-mail: kar@csu.ru