ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 18 № 4 (2026). С. 90-108.

УДК 517.938, 517.983, 519.17

ПРИМЕРЫ ГИПЕРЦИКЛИЧЕСКИХ СДВИГОВ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ НА ГРАФАХ

М.А. МАТВЕЕВ

Аннотация. Операторы сдвига играют особую роль в линейной динамике, так как очень часто именно они служат примерами операторов с хаотическим поведением (гиперцикличность, слабое перемешивание, перемешивание). Для случая обычных весовых пространств последовательностей $\ell^p(\mathbb{N},\mu)$ или $\ell^p(\mathbb{Z},\mu)$ гиперциклические операторы сдвига были описаны Г. Саласом в 1995 году. В последнее время большой интерес вызывает динамика операторов на графах. Гиперциклические операторы сдвига на деревьях были описаны К. Гросс-Эрдманном и Д. Папатанасиу в 2023 году. Первые результаты для графов, не являющихся деревьями, были получены в недавнем препринте А.Д. Баранова, А.А. Лишанского и Д. Папатанасиу. В статье рассмотрены новые примеры гиперциклических сдвигов на графах.

Ключевые слова: линейная динамика, гиперциклический оператор, слабо перемешивающий оператор, оператор сдвига на графе.

Mathematics Subject Classification: 47B37, 47A16

1. Введение

Пусть T — непрерывный оператор, действующий в некотором сепарабельном банаховом пространстве или пространстве Фреше X. Оператор T называют *гиперциклическим*, если найдется вектор $x \in X$ (*гиперциклический вектор*) такой, что

$$\overline{\{T^n x : n = 0, 1, \ldots\}} = X,$$

то есть орбита элемента x всюду плотна в X. Хорошо известно, что это свойство равносильно следующему: для любой пары U, V непустых открытых подмножеств X найдется $n \in \mathbb{N}$ такое, что $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$. Оператор называют *слабо перемешивающим*, если оператор $T \oplus T$ является гиперциклическим на $X \oplus X$. Наконец, *перемешивающим* называют такой оператор T, что для любой пары U, V непустых открытых подмножеств X существует некоторое N такое что $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$ для всех $n \geqslant N$. Из перемешивания следует слабое перемешивание, а из слабого перемешивания, очевидно, следует гиперцикличность. Все эти свойства выражают тот факт, что поведение орбит элементов под действием оператора T является крайне хаотическим. Подробное изложение линейной динамики и ее приложений можно найти в монографиях [3], [5].

Различные формы операторов сдвига часто возникают как примеры операторов с хаотическим поведением. Первый пример гиперциклического оператора в банаховом пространстве был найден С. Ролевичем [10]: это оператор λB в пространстве $\ell^p(\mathbb{N})$, $1 \leqslant p < \infty$,

M.A. Matveev, Examples of hypercyclic shifts in weighted spaces on graphs.

© Матвеев М.А. 2026.

Работа поддержана грантом Российского научного фонда 19-71-30002 «Анализ, геометрия, математическая физика и их приложения».

Поступила 27 июля 2026 г.

где B — оператор обратного сдвига, а $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| > 1$. Абстрактные операторы сдвига относительно выбранного базиса рассматривались в [4]. Для случая обычных весовых пространств последовательностей $\ell^p(\mathbb{N}, \mu)$ или $\ell^p(\mathbb{Z}, \mu)$ гиперциклические операторы сдвига были описаны Г. Саласом [11].

В последнее время большой интерес вызывает динамика операторов сдвига на графах (см., например, [1], [6], [7], [8], [9]). Пусть $G = (V, E)$ — связный ориентированный граф, состоящий из счетного множества вершин V, где $E \subset V \times V$ — множество его ребер. Для $v, u \in V$ мы пишем $v \to u$, если $(v, u) \in E$. Для заданной вершины $v \in V$ через $\mathrm{Chi}(v)$ обозначаем множество ее «детей»:

$$\mathrm{Chi}(v) = \{u \in V : \ v \to u\}.$$

Для любого графа G и функции $f : V \to \mathbb{C}$ определяется (невзвешенный) *обратный сдвиг*:

$$(Bf)(v) = \sum_{u \in \mathrm{Chi}(v)} f(u), \qquad v \in V.$$

Будем рассматривать свойства гиперцикличности обратного сдвига на стандартных пространствах $\ell^p(V, \mu)$ и $c_0(V, \mu)$ на V. Пусть $\mu = (\mu_v)_{v \in V}$ семейство положительных вещественных чисел, называемое весом. Для $1 \leqslant p < \infty$ положим

$$\ell^p(V, \mu) = \{f : V \to \mathbb{C} : \|f\|^p_{\ell^p(V,\mu)} = \sum_{v \in V} |\mu_v f(v)|^p < \infty\}.$$

Пространство $c_0(V, \mu)$ определяется как

$$c_0(V, \mu) = \Big\{f : V \to \mathbb{C} : \ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \ \text{конечное } F \subset V \text{ такое что } \ |\mu_v f(v)| < \varepsilon, \ v \in V \setminus F\Big\},$$

оно снабжено нормой $\|f\|_{c_0(V,\mu)} = \sup\limits_{v \in V} |\mu_v f(v)|$. Сопряженным к пространству $\ell^p(V, \mu)$ будет пространство $\ell^{p^*}(V, \frac{1}{\mu})$, где

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1, \qquad \frac{1}{\mu} = \Big(\frac{1}{\mu_v}\Big)_{v \in V}, \qquad c_0(V, \mu)^* = \ell^1\Big(V, \frac{1}{\mu}\Big).$$

Очевидно, что в графе, степени вершин которого равномерно ограничены, ограниченность оператора обратного сдвига равносильна условию

$$\mu_v \leqslant C \min_{u \in \mathrm{Chi}(v)} \mu_u, \qquad v \in V,$$

для некоторой константы $C > 0$. В дальнейшем всегда предполагается, что веса удовлетворяют этому условию.

Задача о гиперцикличности оператора сдвига в весовых пространствах на деревьях (с корнем или без) была полностью решена в работе К. Гросс-Эрдманна и Д. Папатанасиу [6]. Приведем один из результатов этой статьи, относящийся к случаю деревьев с корнем.

Теорема 1.1. *Пусть $G = (E, V)$ — корневое направленное дерево, $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$. Оператор B на $\ell^p(V, \mu)$ является гиперциклическим тогда и только тогда, когда он является слабо перемешивающим и тогда и только тогда, когда существует возрастающая последовательность (n_k) положительных целых чисел, такая что для каждого $v \in V$*

$$\sum_{u \in \mathrm{Chi}^{n_k}(v)} |\mu_u|^{-p^*} \to \infty, \quad k \to \infty.$$

Первые примеры гиперциклических сдвигов на графах, не являющихся деревьями, были рассмотрены в [2]. Приведем один из результатов статьи [2].

Для $m \in \mathbb{N}$ рассмотрим граф $G_m = (V_m, E_m)$, такой что $V_m = (v_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant m, j \geqslant 1}$ и $(v_{i,j}, u) \in E_m \iff u = v_{i,j+1}$ или $u = v_{i+1,j}$, $1 \leqslant i \leqslant m-1$. Ниже представлен рисунок графа G_m при $m = 3$:

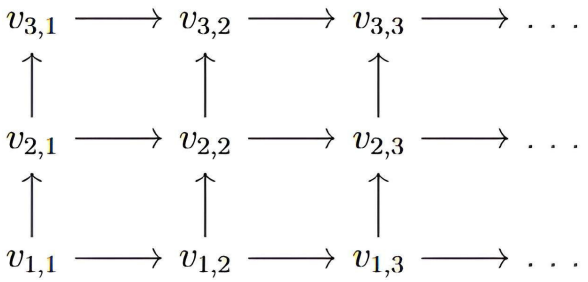


Рис. 1. Граф G_m для $m = 3$

Теорема 1.2. *Пусть B — обратный сдвиг на G_m, $m \in \mathbb{N}$, и пусть X — любое из пространств $\ell^p(V_m, \mu)$, $1 \leqslant p < \infty$, или $c_0(V_m, \mu)$. Предположим, что оператор B ограничен на X. Тогда следующие условия равносильны:*

1. *B — гиперциклический оператор на X;*
2. *B — слабо перемешивающий оператор на X;*
3. *Существует возрастающая последовательность (n_k) положительных целых чисел такая, что для любого $1 \leqslant i \leqslant m$,*

$$n_k^{m-i} |\mu_{v_{i,n_k}}| \to 0, \quad k \to \infty.$$

Цель настоящей заметки состоит в том, чтобы, применяя методы статьи [2], рассмотреть некоторые конкретные новые примеры графов, не являющихся деревьями, и исследовать динамические свойства оператора обратного сдвига (гиперцикличность, слабое перемешивание, перемешивание) в весовых пространствах на таких графах. Среди рассматриваемых графов – решетки с добавленными диагоналями, а также решетки с периодическим чередованием направлений ребер.

2. Классические результаты

Приведем некоторые классические результаты, которые будут использоваться в дальнейшем (см. [5]).

Теорема 2.1 (Критерий гиперцикличности)**.** *Пусть X — сепарабельное пространство Фреше, T — непрерывный линейный оператор на X. Пусть существуют $X_0, Y_0 \subset X$ — всюду плотные подмножества, $S_k : Y_0 \to Y_0$ — отображения (не обязательно линейные) и последовательность $n_k \to \infty$ такие что:*

1. $\forall x \in X_0 \quad T^{n_k} x \to 0, \quad k \to \infty$;
2. $\forall y \in Y_0 \quad S_{n_k} y \to 0, \quad k \to \infty$;
3. $\forall y \in Y_0 \quad T^{n_k} S_{n_k} y = y, \quad k \to \infty$.

Тогда T — слабо перемешивающий и, в частности, гиперциклический оператор.

Замечание 2.1. *На самом деле условия теоремы 2.1 являются и необходимыми для слабого перемешивания.*

Удобное достаточное условие гиперцикличности (и даже перемешивания) было найдено Ж. Годфруа и Дж. Шапиро [4].

Теорема 2.2 (Критерий Годфруа — Шапиро)**.** *Пусть T — непрерывный линейный оператор на X. Если каждое из семейств $\bigcup\limits_{|\lambda|<1} \operatorname{Ker}(T-\lambda I)$ и $\bigcup\limits_{|\lambda|>1} \operatorname{Ker}(T-\lambda I)$ полно в X, то T перемешивающий, и, в частности, слабо перемешивающий и гиперциклический, оператор.*

В дальнейшем, для применения теоремы 2.2 нам будет удобно использовать следующую лемму.

Лемма 2.1. *Пусть дан граф $G=(V,E)$ и $V=\{v_{i,j} : (i,j)\in N_1\times N_2\}$, где N_1, N_2 — бесконечные подмножества в $\mathbb{Z}$. Пусть $U_1, U_2 \subset (0,\infty)$ — непустые открытые интервалы такие, что функции $f_{a,b}(v_{i,j}) = a^i b^j$, $(i,j)\in N_1\times N_2$, принадлежат пространству X при всех $(a,b)\in U_1\times U_2$, где X — любое из пространств $\ell^p(V,\mu)$, $1\leqslant p<\infty$, или $c_0(V,\mu)$. Тогда семейство $\mathcal{F}=\{f_{a,b} : (a,b)\in U_1\times U_2\}$ полно в X.*

Доказательство. Пусть функционал $g=\{g_{i,j}\}\in \ell^{p^*}\left(V,\dfrac{1}{\mu}\right)$ аннулирует все векторы семейства $\mathcal{F}$, то есть

$$\sum_{(i,j)\in N_1\times N_2} g_{i,j}a^i b^j = \sum_{j\in N_2}\left(\sum_{i\in N_1} g_{i,j}a^i\right)b^j = 0, \qquad (a,b)\in U_1\times U_2.$$

Поскольку ряд в левой части сходится абсолютно, ряд $\sum\limits_{i\in N_1} g_{i,j}a^i = 0$ сходится абсолютно при всех $j\in N_2$ и

$$\sum_{j\in N_2} c_j b^j = 0, \quad b\in U_2, \qquad c_j = \sum_{i\in N_1} g_{i,j}a^i, \quad a\in U_1.$$

По теореме единственности для степенных рядов (или рядов Лорана) $c_j = \sum\limits_{i\in N_1} g_{i,j}a^i = 0$, $a\in U_1$, для каждого j, откуда, по той же теореме единственности, $g_{i,j}\equiv 0$. □

Пусть $S: Y\to Y$ и $T: X\to X$ линейные операторы. Оператор T называется *квазисопряженным с S*, если существует непрерывное отображение $\phi: Y\to X$ с плотным образом, такое что $T\circ\phi = \phi\circ S$, то есть диаграмма на Рис. 2 коммутативна. Если оператор T квазисопряжен с оператором S, то T наследует все динамические свойства S (перемешивание, слабое перемешивание, гиперцикличность).

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{S} & Y \\ {\scriptstyle\phi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\phi} \\ X & \xrightarrow{T} & X \end{array}$$

Рис. 2. Коммутативная диаграмма для ϕ, T и S

3. Аналог теоремы 1.2

Рассмотрим ориентированный граф $F_m = (V_m, \overline{E_m})$, где $\overline{E_m} = E_m \cup (v_{i,j}, v_{i+1,j+1})$, $1 \leqslant i \leqslant m-1$, и оператор обратного сдвига на нем (см. Рис. 3).

Таким образом, граф F_m отличается от графа G_m из теоремы 1.2 добавлением диагональных ребер. В этом случае описание весов, для которых оператор сдвига является слабо перемешивающим, будет таким же, как в теореме 1.2.

Теорема 3.1. *Пусть B — обратный сдвиг на F_m, $m \in \mathbb{N}$, и пусть X – любое из пространств $\ell^p(V_m, \mu)$, $1 \leqslant p < \infty$, или $c_0(V_m, \mu)$. Предположим, что оператор B ограничен на X. Тогда следующие условия равносильны:*

1. *B — гиперциклический оператор на X.*
2. *B — слабо перемешивающий оператор на X.*
3. *Существует возрастающая последовательность (n_k) положительных целых чисел такая, что для любого $1 \leqslant i \leqslant m$*
$$n_k^{m-i} \mu_{v_{i,n_k}} \to 0, \quad k \to \infty.$$

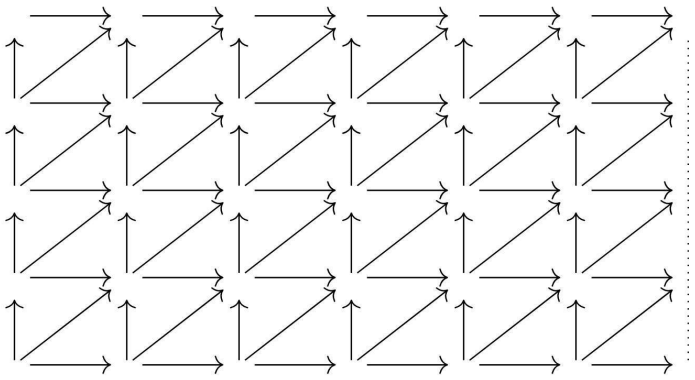


Рис. 3. Ориентированный граф F_m

Доказательство. 3) $\Longrightarrow$ 2).

Прежде всего отметим, что из условия пункта 3) следует более сильное утверждение: существует последовательность (n_k) такая, что для любых $1 \leqslant i \leqslant m$ и $j \geqslant 1$ выполнено $n_k^{m-i} \mu_{v_{i,j+n_k}} \to 0$, $k \to \infty$. В самом деле, если $n_k^{m-i} \mu_{v_{i,n_k}} \to 0$, то из ограниченности оператора B следует, что для каждого $l \geqslant 0$ выполнено $(n_k - l)^{m-i} |\mu_{v_{i,n_k-l}}| \to 0$. Теперь не сложно показать (см. [5, Lemma 4.2]), что найдется возрастающая последовательность m_k, такая что $(m_k + j)^{m-i} |\mu_{v_{i,m_k+j}}| \to 0$ при всех $j \geqslant 0$.

Обозначим через e_v функцию на V_m такую, что $e_v(v) = 1$ и $e_v(u) = 0$, $u \neq v$. Оператор B можно представить в виде суммы двух коммутирующих операторов A и D:
$$(Af)(v_{i,j}) = f(v_{i+1,j}) + f(v_{i,j+1}),$$
$$(Df)(v_{i,j}) = f(v_{i+1,j+1}).$$

Используя это представление и тот факт, что $(A^k f)(v_{i,j}) = \sum\limits_{l=0}^{k} C_k^l f(v_{i+l,j+k-l})$, легко показать, что

$$B^n(e_{v_{i,j}}) = (A+D)^n(e_{v_{i,j}}) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k A^k D^{n-k}(e_{v_{i,j}}) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \sum_{l=0}^{k} C_k^l e_{v_{i-(n-k)-l, j-(n-k)-(k-l)}},$$

где мы полагаем $e_{v_{a,b}} = 0$, если $a \leqslant 0$ или $b \leqslant 0$.

Множество финитных функций плотно в X и $B^n f = 0$ для любой финитной функции f и достаточно большого n. Построим операторы R_{n_k} так, чтобы $R_{n_k} f \to 0$ и $B^{n_k} R_{n_k} f = f$ на финитных функциях. Положим

$$R_{n_k}(e_{v_{1,j}}) = e_{v_{1,j+n_k}}, \qquad R_{n_k}(e_{v_{2,j}}) = e_{v_{2,j+n_k}} - n e_{v_{1,j+1+n_k}} - n e_{v_{1,j+n_k}},$$

и, предполагая, что R_{n_k} уже определено на слоях с номерами $1, \dots, i-1$, положим

$$R_{n_k}(e_{v_{i,j}}) = e_{v_{i,j+n_k}} - \sum_{l=1}^{i-1} C_{n_k}^l R_{n_k}(e_{v_{i-l,j+l}}) - \sum_{p=1}^{i-1} C_{n_k}^p \sum_{l=0}^{i-1-p} C_{n_k-p}^l R_{n_k}(e_{v_{i-p-l,j+l}}).$$

Поскольку

$$B^{n_k}(e_{v_{i,j+n_k}}) = \sum_{p=0}^{i-1} C_{n_k}^p \sum_{l=0}^{i-1-p} C_{n_k-p}^l e_{v_{i-p-l,j+l}},$$

мы получаем, что $B^{n_k} R_{n_k}(e_{v_{i,j}}) = e_{v_{i,j}}$.

По индукции можно доказать, что

$$R_{n_k}(e_{v_{i,j}}) = \sum_{p=0}^{i-1} \sum_{s=1}^{i-p} \alpha_{i,s,p} e_{v_{s,i+j-p-s+n_k}} = \sum_{s=1}^{i} \sum_{p=0}^{i-s} \alpha_{i,s,p} e_{v_{s,i+j-p-s+n_k}}$$

с коэффициентами $\alpha_{i,s,p}$ не зависящими от j. Подставим эту формулу в рекуррентную формулу для R_{n_k}:

$$\begin{aligned}\sum_{s=1}^{i} \sum_{p=0}^{i-s} \alpha_{i,s,p} e_{v_{s,i+j-p-s+n_k}} =& e_{v_{i,j+n_k}} - \sum_{l=1}^{i-1} C_{n_k}^l \sum_{s=1}^{i-l} \sum_{p=0}^{i-l-s} \alpha_{i-l,s,p} e_{v_{s,i+j-p-s+n_k}} \\ &- \sum_{p=1}^{i-1} C_{n_k}^p \sum_{l=0}^{i-1-p} C_{n_k-p}^l \sum_{s=1}^{i-p-l} \sum_{p_1=0}^{i-p-l-s} \alpha_{i-p-l,s,p_1} e_{v_{s,i+j-p-p_1-s+n_k}}.\end{aligned}$$

Учитывая, что $e_{v_{i,j}}$ — базис, несложно, путем сравнения коэффициентов при соответствующих базисных векторах, доказать по индукции, что $|\alpha_{i,s,p}| < C n_k^{i-s}$, где константа C зависит только от m. В частности, $|\alpha_{i,s,p}| = O(n_k^{m-s})$, $1 \leqslant i \leqslant m$. Из условия $n_k^{m-s} \mu_{v_{s,i+j-s-p+n_k}} \to 0$ для любых i, j, s, p, мы заключаем, что $R_{n_k} f \to 0$ для любого финитного f. Таким образом, оператор B является слабо перемешивающим.

1) $\Longrightarrow$ 3).

Если B является гиперциклическим, то для любых $\varepsilon, \delta > 0$ и $K \in \mathbb{N}$ мы можем выбрать произвольно большое n и $f \in X$ такие, что $\|f\|_X < \varepsilon$ и

$$\|B^n f - \sum_{j=1}^{K} e_{v_{m,j}}\|_X < \delta \min_{v \in F} \mu_v.$$

Для $n > m$

$$(B^n f)(v_{i,j}) = \sum_{p=0}^{m-i} C_n^p \sum_{k=0}^{m-i-p} C_{n-p}^k f(v_{i+p+k,j+n-k}),$$

$$(B^n f)(v_{m-l,j}) = \sum_{p=0}^{l} C_n^p \sum_{k=0}^{l-p} C_{n-p}^k f(v_{m-l+p+k,j+n-k}).$$

В частности, $(B^n f)(v_{m,j}) = f(v_{m,j+n})$, откуда $|f(v_{m,j+n}) - 1| < \delta$, $1 \leqslant j \leqslant K$. Далее

$$|(B^n f)(v_{m-1,j})| = |f(v_{m-1,j+n}) + n f(v_{m,j+n-1}) + n f(v_{m,j+n})| < \delta,$$

откуда

$$|f(v_{m-1,j+n}) + 2n| < \delta(1+2n), \quad 2 \leqslant j \leqslant K.$$

В общем случае

$$|(B^n f)(v_{m-l,j})| = |\sum_{p=0}^{l} C_n^p \sum_{k=0}^{l-p} C_{n-p}^k f(v_{m-l+p+k,j+n-k})| < \delta, \qquad l+1 \leqslant j \leqslant K.$$

Используя неравенства для меньших l, это неравенство можно переписать в виде

$$|f(v_{m-l,j+n}) + P_l(n)| < C\delta n^l,$$

где C — некоторая числовая константа, а многочлены $P_l(n)$ от переменной n задаются рекуррентной формулой

$$P_l(n) = -\sum_{k=1}^{l} C_n^k P_{l-k}(n) - \sum_{p=1}^{l} C_n^p \sum_{k=0}^{l-p} C_{n-p}^k P_{l-p-k}(n),$$
$$P_0(n) = -1, \qquad P_1(n) = 2n.$$

Перепишем ее в более простом виде:

$$P_l(n) = -\sum_{k=1}^{l} \Big(\sum_{p=0}^{k} C_n^p C_{n-p}^{k-p} \Big) P_{l-k}(n).$$

Обозначим через a_l коэффициент при l степени в многочлене P_l. Из рекуррентной формулы для этих многочленов следует, что

$$a_l = -\sum_{k=1}^{l} \Big(\sum_{p=0}^{k} \frac{1}{p!} \frac{1}{(k-p)!} \Big) a_{l-k} = -\sum_{k=1}^{l} \Big(\frac{1}{k!} \sum_{p=0}^{k} C_k^p \Big) a_{l-k}$$
$$-\sum_{k=1}^{l} \frac{2^k}{k!} a_{l-k} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{a_l}{2^l} = -\sum_{k=1}^{l} \frac{1}{k!} \frac{a_{l-k}}{2^{l-k}}.$$

Рассмотрим функцию $g = \sum\limits_{l=0}^{\infty} \dfrac{a_l}{2^l} x^l$. Из рекуррентной формулы можно получить следующее соотношение на g:

$$(e^x - 1)g = -g + 1 \quad \Longrightarrow \qquad g = -e^{-x}.$$

Из этого соотношения видно, что P_l — многочлен степени в точности l.

Таким образом, если мы выберем $\delta > 0$ достаточно малым, то получим

$$|f(v_{i,j+n})| \geqslant Cn^{m-i}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant m, \qquad m \leqslant j \leqslant K,$$

где $C > 0$ — константа, зависящая только от m.

Заменив n на $n+m-1$, мы получаем

$$|f(v_{i,j+n})| \geqslant Cn^{m-i}$$

для $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant K-m+1$. Напомним, что $\|f\|_X < \varepsilon$. Поскольку $|\mu_v f(v)| \leqslant \|f\|_X$, мы заключаем, что

$$n^{m-i} |\mu_{v_{i,j+n}}| \leqslant C^{-1}\varepsilon, \quad 1 \leqslant i \leqslant m, \quad 1 \leqslant j \leqslant K-m+1.$$

Наконец, поскольку $\varepsilon > 0$ и $K \in \mathbb{N}$ были произвольными, мы повторяем эту процедуру для последовательностей $\varepsilon_k \to 0$ и $K_k \to \infty$ и находим нужную последовательность $n_k \to \infty$. □

Теперь мы рассмотрим случай бесконечного числа горизонтальных слоев, то есть ориентированный граф $F_\infty = (V_\infty,\ E_\infty)$, где

$$V_\infty = (v_{i,j})_{i\geqslant 0, j\geqslant 0}, \qquad E_\infty = \{(v_{i,j}, v_{i,j+1}), (v_{i,j}, v_{i+1,j}), (v_{i,j}, v_{i+1,j+1}),\ i \geqslant 0,\ j \geqslant 0\},$$

и оператор сдвига на нем (см. рис. 4).

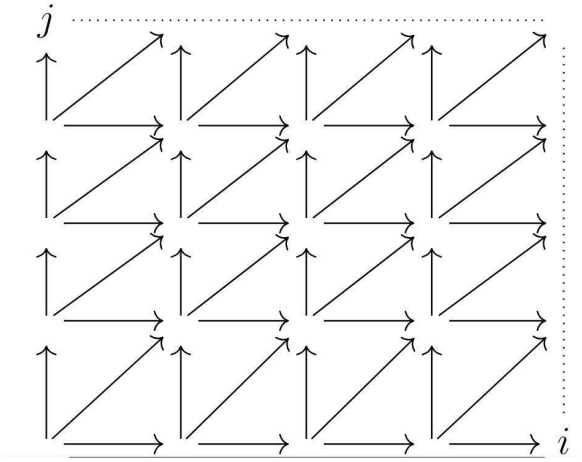


Рис. 4. Граф F_∞

Мы видим, что с ростом числа строк в графе F_m условия на вес, обеспечивающие гиперцикличность, становятся всё более строгими. Поэтому несколько удивительно, что в случае бесконечной в обе стороны решётки $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ с диагональными ребрами обратный сдвиг является слабо перемешивающим при гораздо более мягких условиях на вес. Следующий результат даёт достаточное условие гиперцикличности/перемешивания, которое является точным в грубой экспоненциальной шкале.

Теорема 3.2. *Пусть B — обратный сдвиг на F_∞, и пусть X — любое из пространств $\ell^p(V_\infty, \mu)$, $1 \leqslant p < \infty$, или $c_0(V_\infty, \mu)$. Предположим, что оператор B ограничен на X. Тогда*

1. *Если $\varlimsup\limits_{i+j\to\infty} \mu_{i,j}^{\frac{1}{i+j}} < \sqrt{2}+1$, то оператор B — перемешивающий на X.*
2. *Предположим, что $\mu_{i,j} = p_i q_j$, $p_i, q_j > 0$. Тогда при выполнении условий*

$$\varlimsup_{i\to\infty} p_i^{\frac{1}{i}} = C > 1, \qquad \varlimsup_{j\to\infty} q_j^{\frac{1}{j}} < \frac{C+1}{C-1}, \tag{3.1}$$

или

$$\varlimsup_{i\to\infty} p_i^{\frac{1}{i}} = C \leqslant 1, \qquad \varlimsup_{j\to\infty} q_j^{\frac{1}{j}} < \infty$$

(в частности, при $p_i \equiv 1$) оператор B будет перемешивающим на X.

3. *Пусть для некоторого $C > 1$ выполнены неравенства*

$$p_i \geqslant \gamma C^i, \quad q_j \geqslant \gamma\Big(\frac{C+1}{C-1}\Big)^j \quad \forall i,\ j \in \mathbb{Z}_+,$$

где $\gamma > 0$. Тогда оператор B не будет гиперциклическим на X.

Доказательство. Для доказательства свойства перемешивания для оператора сдвига B мы применим критерий Годфруа — Шапиро (теорема 2.2). Заметим, что функция $f_{a,b} = f_{a,b}(v_{i,j}) = a^i b^j$ является собственным вектором оператора B с собственным значением $a + b + ab$.

Очевидно, для того, чтобы вектор $f_{a,b}$ лежал в пространстве X, достаточно, чтобы

$$\overline{\lim_{i+j\to\infty}}\,\mu_{i,j}^{\frac{1}{i+j}} < \min\Big\{\frac{1}{|a|},\frac{1}{|b|}\Big\}. \tag{3.2}$$

Для применения теоремы 2.2 нужно достаточное количество собственных векторов с собственными значениями, большими 1. Аналогичное утверждение для собственных значений, меньших 1, очевидно, так как $f_{a,b}\in X$, если a и b достаточно малы. Заметим, что $2x+x^2>1$ при $x>\sqrt{2}-1$. Поскольку $\overline{\lim_{i+j\to\infty}}\,\mu_{i,j}^{\frac{1}{i+j}} < \sqrt{2}+1$, найдутся такие открытые множества $U_1,U_2\subset(\sqrt{2}-1,\infty)$, что условие (3.2) выполнено при $(a,b)\in U_1\times U_2$. При этом $a+b+ab>1$. По лемме 2.1 семейство $\{f_{a,b}:(a,b)\in U_1\times U_2\}$ полно в X. Таким образом, оператор B будет перемешивающим по теореме 2.2.

Теперь будем считать, что вес имеет вид: $\mu_{i,j}=p_iq_j$. Собственный вектор a^ib^j лежит в пространстве если:

$$\overline{\lim_{i\to\infty}}\,p_i^{\frac{1}{i}} < \frac{1}{|a|},\qquad \overline{\lim_{j\to\infty}}\,q_j^{\frac{1}{j}} < \frac{1}{|b|}.$$

Из условия (3.1) следует, что эти неравенства справедливы при

$$a\in\Big(\frac{1}{C}-\varepsilon,\frac{1}{C}\Big),\qquad b\in\Big(\frac{C-1}{C+1}+\delta,\frac{C-1}{C+1}+2\delta\Big)$$

при всех достаточно малых $\varepsilon,\delta>0$. В то же время $a+b+ab>1$, если ε намного меньше, чем δ, так как

$$\frac{1}{C}+\frac{C-1}{C+1}+\frac{1}{C}\frac{C-1}{C+1}=1.$$

Таким образом, семейство собственных векторов с собственными значениями, большими 1 (и, тем более, с собственными значениями, меньшими 1) полно в X, и, значит, оператор B — перемешивающий.

Пусть теперь $C=1$. Положим $U_1=(1-2\varepsilon,1-\varepsilon)$ и $U_2=(2\varepsilon,3\varepsilon)$, где $\varepsilon>0$ достаточно мало. Тогда $f_{a,b}\in X$ и $a+b+ab>1$. При этом b может быть сколь угодно мало по модулю.

Оператор B можно представить в виде суммы двух коммутирующих операторов A и D:

$$(Af)(v_{i,j})=f(v_{i+1,j})+f(v_{i,j+1}),$$
$$(Df)(v_{i,j})=f(v_{i+1,j+1}).$$

Соответственно,

$$(A+D)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^kA^kD^{n-k},\qquad (A^kf)(v_{i,j})=\sum_{l=0}^{k}C_k^lf(v_{i+l,j+k-l}).$$

Если оператор B — гиперциклический, то можно приблизить с любой точностью вектор $e_{v_{0,0}}$, а именно, для любых ε, δ и найдутся сколь угодно большие n и вектор f такие, что $\|(B^nf)(v_{0,0})-e_{v_{0,0}}\|_X<\varepsilon$ и $\|f\|_X<\delta$. В качестве f можно выбрать вектор, пропорциональный гиперциклическому вектору. Таким образом,

$$\Big|\sum_{k=0}^{n}C_n^k\sum_{l=0}^{k}C_k^lf(v_{n-k+l,n-k+k-l})-1\Big|<\varepsilon, \tag{3.3}$$

и

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}|\mu_{i,j}f(v_{i,j})|^p<\delta^p.$$

Поэтому, если

$$p_i\geqslant\gamma C^i,\qquad q_j\geqslant\gamma\Big(\frac{C+1}{C-1}\Big)^j,$$

то можно заключить, что

$$|f(v_{i,j})| \leqslant \frac{\delta}{\gamma^2}\Big(\frac{1}{C}\Big)^i\Big(\frac{C-1}{C+1}\Big)^j$$

при всех i, j. А так как

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \sum_{l=0}^{k} C_k^l \Big(\frac{1}{C}\Big)^{n-k+l}\Big(\frac{C-1}{C+1}\Big)^{n-l} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \Big(\frac{1}{C}\Big)^{n-k}\Big(\frac{C-1}{C+1}\Big)^{n-k}\Big(\frac{1}{C}+\frac{C-1}{C+1}\Big)^{k} = 1,$$

мы приходим с противоречию с условием (3.3) при достаточно малом δ. □

4. Оператор сдвига на графе «лесенка»

Будем исследовать вопрос гиперцикличности оператора B для специального графа $L_2 = (V_2, E)$, полученного модификацией графа G_2 (см. описание перед теоремой 1.2): все его ребра такие же как у G_2, за исключением ребер вида $(v_{1,2j}, v_{2,2j})$, направление которых меняется на противоположное, см. рис. 5:

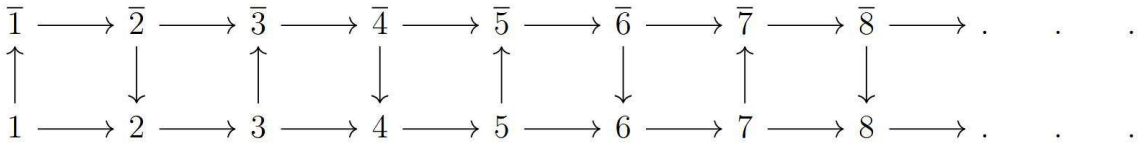


Рис. 5. Граф L_2

На рисунке для простоты дальнейшего изложения введена специальная нумерация вершин: мы пишем n вместо $v_{1,n}$ и $\overline{n}$ вместо $v_{2,n}$.

Следующий результат показывает, что такая смена направлений ребер (по сравнению с графом G_2) кардинально меняет достаточные для гиперцикличности условия на вес.

Теорема 4.1. *Пусть B — обратный сдвиг на L_2, и пусть X — любое из пространств $\ell^p(V_2,\mu)$, $1 \leqslant p < \infty$, или $c_0(V_2,\mu)$. Предположим, что оператор B ограничен на X. Тогда*

1. *Если*
$$\varlimsup_{n\to\infty} \mu_n^{\frac{1}{n}} < \frac{\sqrt{5}+1}{2}, \qquad \varlimsup_{n\to\infty} \mu_{\overline{n}}^{\frac{1}{n}} < \frac{\sqrt{5}+1}{2},$$
то оператор B — слабо перемешивающий.

2. *Если*
$$\mu_n \geqslant C\Big(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\Big)^n \qquad \mu_{\overline{n}} \geqslant C\Big(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\Big)^n$$
при всех $n \in \mathbb{N}$, где $C > 0$, то оператор B не является гиперциклическим.

Доказательство. Заметим, что квадрат оператора B обладает более простой структурой:

$$B^2 f(n) = f(\overline{n+1}) + f(n+2),$$
$$B^2 f(\overline{n}) = f(n+1) + f(\overline{n+2}).$$

Покажем, что в условиях утверждения 1 теоремы оператор B^2 (а, следовательно, и B) будет слабо перемешивающим.

Проанализировав действие B^2, можно заметить, что граф разбивается на два подграфа с вершинами $N_1 = \{1, \bar{2}, 3, \ldots, 2k-1, \overline{2k}, \ldots\}$ и $N_2 = \{\bar{1}, 2, \bar{3}, \ldots, \overline{2k-1}, 2k, \ldots\}$, на которые оператор действует независимо. «Распрямляя» эти подграфы, мы получаем представление пространства в виде прямой суммы обычных весовых пространств $\ell^p(N_1, \mu|_{N_1})$ и

$\ell^p(N_2, \mu|_{N_2})$ (или $c_0(N_1, \mu|_{N_1})$ и $c_0(N_2, \mu|_{N_2})$), а оператора B^2 в виде прямой суммы $B_0 + B_0^2$ с самим собой, где B_0 обозначает обычный обратный сдвиг в пространстве последовательностей (формально речь идет об обратном сдвиге на разных пространствах, но мы используем одно и то же обозначение).

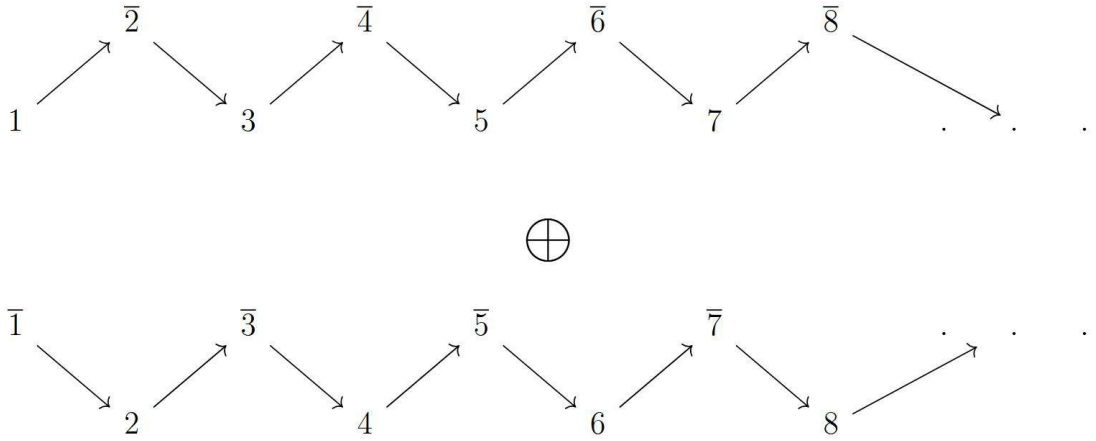


Рис. 6. Разбиение графа L_2

Покажем, что в условиях теоремы оператор $B_0 + (B_0)^2$ будет перемешивающим на каждом из вышеуказанных пространств. Для определенности рассмотрим пространство $\ell^p(N_1, \mu')$, где $\mu' = \mu|_{N_1} = (\mu_1, \mu_{\overline{2}}, \mu_3, \mu_{\overline{4}}, \ldots)$.

Легко видеть, что векторы

$$f_\lambda = \Big(1, \frac{\sqrt{1+4\lambda}-1}{2}, \Big(\frac{\sqrt{1+4\lambda}-1}{2}\Big)^2, \Big(\frac{\sqrt{1+4\lambda}-1}{2}\Big)^3, \ldots\Big)$$

будут собственными векторами оператора $B_0 + (B_0)^2$, соответствующими собственному числу λ. Поскольку

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |\mu'_n|^{\frac{1}{n}} < \frac{\sqrt{5}+1}{2},$$

существуют открытые интервалы $U_1 \subset (0,1)$ и $U_2 \subset (1,\infty)$ такие, что векторы f_λ, $\lambda \in U_1 \cup U_2$, лежат в пространстве X. Аналогично лемме 2.1, семейства $\{f_\lambda : \lambda \in U_1\}$ и $\{f_\lambda : \lambda \in U_2\}$ полны X. Следовательно, оператор $B_0 + B_0^2$ в $\ell^p(N_1, \mu')$ будет перемешивающим. То же самое справедливо и для оператора $B_0 + B_0^2$ на $\ell^p(N_2, \mu|_{N_2})$. Поскольку прямая сумма перемешивающих операторов будет перемешивающей, мы заключаем, что B^2 перемешивающий и, в частности, слабо перемешивающий.

Предположим, что оператор B — гиперциклический. Тогда оператор $B_0 + B_0^2$ на пространстве $\ell^p(N_1, \mu')$, где $\mu' = \mu|_{N_1} = (\mu_1, \mu_{\overline{2}}, \mu_3, \mu_{\overline{4}}, \ldots)$, также будет гиперциклическим (случай пространств c_0 аналогичен).

Рассмотрим вектор $e_1 = (1, 0, 0, \ldots)$. Если оператор $B_0 + B_0^2$ — гиперциклический на $\ell^p(N_1, \mu')$, то для любых $\varepsilon, \delta > 0$ существуют $n \in \mathbb{N}$ и $f = (a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ такие, что

$$\|(B_0 + B_0^2)^n(f) - e_1\|_X < \varepsilon, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} |a_k \mu'_k|^p < \delta^p.$$

По условию,

$$\mu'_k \geqslant C\Big(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\Big)^k,$$

откуда

$$|a_k| \leqslant \frac{\delta\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^k}{C}.$$

Заметим, что

$$(B_0 + B_0^2)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i B_0^{n+i}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}|(B_0 + B_0^2)^n(f)(1)| &\leqslant \left|\sum_{i=0}^{n} C_n^i a_{n+i+1}\right| \\ &\leqslant \frac{\delta}{C}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{n+1} \sum_{i=0}^{n} C_n^i \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^i = \frac{\delta}{C}\frac{\sqrt{5}-1}{2},\end{aligned}$$

что противоречит условию

$$|(B_0 + B_0^2)^n(f)(1) - 1| \leqslant \|(B_0 + B_0^2)^n(f) - e_1\|_X < \varepsilon,$$

если ε, δ достаточно малы. □

5. Две решетки вида $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}$

В этом параграфе мы рассмотрим два типа решеток вида $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}$ и найдем достаточные условия гиперцикличности/перемешивания, используя критерий Годфруа — Шапиро. Отметим, что в этом случае невозможно рассчитывать найти точные условия в экспоненциальной шкале как в теореме 3.2, так как для принадлежности векторов вида $f_{a,b}$ пространству X веса обязаны экспоненциально убывать в одном из направлений.

Рассмотрим граф $G_\infty = (V_\infty, E_\infty)$, где

$$V_\infty = \{v_{i,j}\}_{i\geqslant 0,\ j\in\mathbb{Z}}, \qquad E_\infty = \{(v_{i,j}, v_{i,j+1}), (v_{i,j}, v_{i+1,j}) :\ i \geqslant 0,\ j \in \mathbb{Z}\}.$$

Граф G_∞ представляет собой декартово произведение графов $\mathbb{Z}_+$ и $\mathbb{Z}$ с естественной ориентацией ребер.

Теорема 5.1. *Пусть B — обратный сдвиг на G_∞, и пусть X — любое из пространств $\ell^p(V_\infty, \mu)$, $1 \leqslant p < \infty$, или $c_0(V_\infty, \mu)$. Предположим, что оператор B ограничен на X. Пусть $\mu_{i,j} = p_i q_j$, $p_i, q_j > 0$.*

1. *Если*

$$\varlimsup_{i\to\infty} p_i^{\frac{1}{i}} = C, \qquad \varlimsup_{j\to\infty} q_j^{\frac{1}{j}} \leqslant H, \qquad \varlimsup_{j\to-\infty} q_j^{\frac{1}{|j|}} < \frac{1}{H},$$

где

$$C > 0, \qquad H \geqslant 1, \qquad \frac{1}{H} + \frac{1}{C} > 1,$$

то оператор B на X — перемешивающий. В случае $H = 1$ утверждение справедливо для любого $C > 0$.

2. *Если*

$$C > 1, \qquad p_i \geqslant \gamma C^i, \qquad q_j \geqslant \gamma\left(\frac{C}{C-1}\right)^j, \quad i, j \geqslant 0,$$

то оператор B не является гиперциклическим на X.

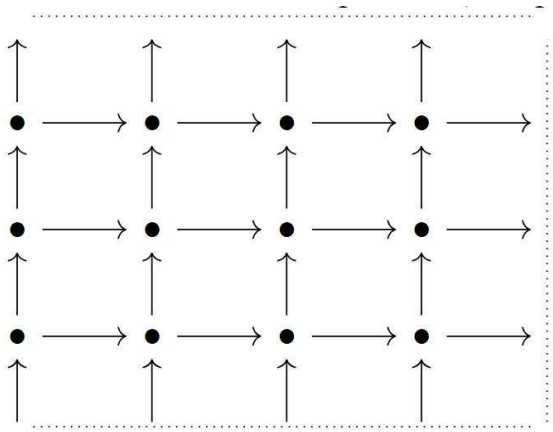


Рис. 7. Граф G_∞

Доказательство. Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы

$$\overline{\lim_{j\to-\infty}} q_j^{\frac{1}{|j|}} < \frac{1}{H+\varepsilon}.$$

Положим $f_{a,b}(v_{i,j}) = a^i b^j$, $a, b > 0$. Это собственные векторы оператора B, отвечающие собственным числам $a + b$. Если

$$a < \frac{1}{C}, \qquad \frac{1}{H+\varepsilon} < b < \frac{1}{H},$$

то $f_{a,b} \in X$. При этом существуют открытые интервалы параметров a и b, для которых, соответственно, $a + b < 1$ или $a + b > 1$. Очевидно, $a + b < 1$, если $a < 1 - \dfrac{1}{H}$. В то же время, из условия $\dfrac{1}{H} + \dfrac{1}{C} > 1$ следует, что $a + b > 1$, если a достаточно близко к $\dfrac{1}{C}$, а b достаточно близко к $\dfrac{1}{H}$.

По лемме 2.1 семейства собственных векторов оператора B, отвечающие собственным числам, большим и меньшим единицы, полны, и, следовательно, оператор B — перемешивающий по теореме 2.2.

Легко видеть, что

$$(B^n f)(v_{i,j}) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f(v_{i+k,j+n-k}).$$

Если оператор B — гиперциклический, то для любых ε, δ найдутся $f \in X$ и $n \in \mathbb{N}$ такие что

$$\|(B^n f)(v_{0,0}) - e_{v_{0,0}}\|_X < \varepsilon, \qquad \|f\|_X < \delta.$$

В частности,

$$|\sum_{k=0}^{n} C_n^k f(e_{v_{k,n-k}}) - 1| < \varepsilon, \qquad |f(v_{i,j})\mu_{i,j}| \leqslant \|f\|_X < \delta. \tag{5.1}$$

Поскольку

$$\mu_{i,j} \geqslant \gamma^2 C^i \Big(\frac{C}{C-1}\Big)^j,$$

мы получаем

$$\Big|\sum_{k=0}^{n} C_n^k f(e_{v_{k,n-k}})\Big| \leqslant \frac{\delta}{\gamma^2} \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{1}{C^k} \Big(\frac{C-1}{C}\Big)^{n-k} = \frac{\delta}{\gamma^2}.$$

Это противоречит первому неравенству в (5.1), если δ достаточно мало. □

Замечание 5.1. *Как показано в* [2, Th. 2.4], *в случае* $q_j \equiv 1$ *оператор* B *на* G_∞ *всегда будет перемешивающим, если только он ограничен. В теореме 5.1 нужно дополнительно требовать экспоненциальное убывание в одном из вертикальных направлений, но в другом направлении допускается экспоненциальный рост.*

Рассмотрим граф $W = (V_W, E_W)$, где

$$W = (v_{i,j})_{i\geqslant 0, j\in\mathbb{Z}, i+j\in 2\mathbb{Z}}, \qquad E_W = \{(v_{i,j}, v_{i+1,j+1}), (v_{i,j}, v_{i+1,j-1}), (v_{i,j}, v_{i+2,j}),\ i \geqslant 0,\ j \in \mathbb{Z}\},$$

и оператор сдвига на нем.

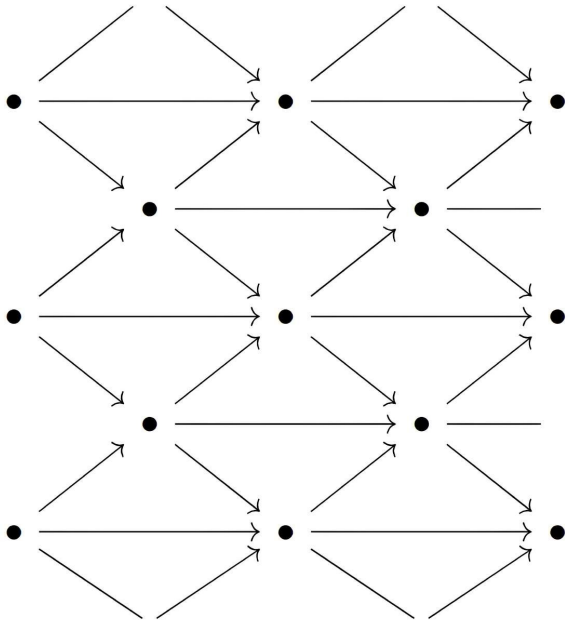


Рис. 8. Граф W

Теорема 5.2. *Пусть* B *— обратный сдвиг на* W, *и пусть* X *— любое из пространств* $\ell^p(V_W, \mu)$, $1 \leqslant p < \infty$, *или* $c_0(V_W, \mu)$. *Предположим, что оператор* B *ограничен на* X. *Пусть* $\mu_{i,j} = p_i q_j$, $p_i, q_j > 0$. *Тогда*

1. *При условиях*

$$\overline{\lim_{i\to\infty}}\, p_i^{\frac{1}{i}} = C,$$

$$\overline{\lim_{j\to\infty}}\, q_j^{\frac{1}{j}} < \frac{2C}{C^2 - 1 + \sqrt{C^4 - 6C^2 + 1}}, \tag{5.2}$$

$$\overline{\lim_{j\to-\infty}}\, q_j^{\frac{1}{|j|}} \leqslant \frac{C^2 - 1 + \sqrt{C^4 - 6C^2 + 1}}{2C}, \tag{5.3}$$

где $C > \sqrt{2}+1$, *оператор* B *будет перемешивающим на* X. *Если же* $1 \leqslant C \leqslant \sqrt{2}+1$, *то оператор* B *на* X *будет перемешивающим при выполнении следующих условий:*

$$\overline{\lim_{i\to\infty}}\, p_i^{\frac{1}{i}} = C, \qquad \overline{\lim_{j\to\infty}}\, q_j^{\frac{1}{j}} \leqslant H, \qquad \overline{\lim_{j\to-\infty}}\, q_j^{\frac{1}{|j|}} < \frac{1}{H},$$

где $H > 0$.

2. *Пусть* $q_j = 1$ *и* $p_i \geqslant c(\sqrt{2}+1)^i$, $\forall i \geqslant 0$, $j \in \mathbb{Z}$, $i + j \in 2\mathbb{Z}$, *где* $c > 0$. *Тогда оператор* B *не является гиперциклическим на* X.

Замечание 5.2. 1. *В силу симметричности графа можно поменять местами условия на рост весов вверх и вниз соответственно, а также поменять местами строгое и нестрогое неравенства.*

2. *Оператор B может быть перемешивающим при быстром возрастании весов по горизонталям, но для этого нужно быстрое убывание весов по вертикалям в одном из направлений (в то же время в противоположную сторону веса могут быстро расти).*

Доказательство. 1. Рассмотрим векторы $f_{a,b}(v_{i,j}) = a^i b^j$, $a, b > 0$. Это собственные векторы оператора B, отвечающие собственным числам $ab + \dfrac{a}{b} + a^2$. Векторы $f_{a,b}$ принадлежат пространству X, если выполнены условия

$$\overline{\lim_{i\to\infty}} p_i^{\frac{1}{i}} < \frac{1}{a}, \qquad \overline{\lim_{j\to\infty}} q_j^{\frac{1}{j}} < \frac{1}{b}, \qquad \overline{\lim_{j\to-\infty}} q_j^{\frac{1}{|j|}} < b. \tag{5.4}$$

Таким образом, a должно удовлетворять условию $a < \dfrac{1}{C}$, в то время как b может пробегать интервал $\left(\overline{\lim\limits_{j\to-\infty}} q_j^{\frac{1}{|j|}}, \left(\overline{\lim\limits_{j\to\infty}} q_j^{\frac{1}{j}} \right)^{-1} \right)$. Очевидно, в условиях теоремы найдутся открытые интервалы параметров a и b, для которых $f_{a,b} \in X$ и $0 < ab + \dfrac{a}{b} + a^2 < 1$ (если выбрать a достаточно малым). Покажем, что можно найти такие интервалы, чтобы выполнялось условие

$$ab + \frac{a}{b} + a^2 > 1.$$

Пусть $C > \sqrt{2} + 1$. Тогда при

$$b > \frac{C^2 - 1 + \sqrt{C^4 - 6C^2 + 1}}{2C}$$

справедливо неравенство

$$\frac{b}{C} + \frac{1}{bC} + \frac{1}{C^2} > 1,$$

а значит и неравенство $ab + \dfrac{a}{b} + a^2 > 1$ при a, близких к $\dfrac{1}{C}$. При этом, в силу условий (5.2) и (5.3), найдется непустой открытый интервал параметров $b > \dfrac{C^2 - 1 + \sqrt{C^4 - 6C^2 + 1}}{2C}$, лежащих в интервале $\left(\overline{\lim\limits_{j\to-\infty}} q_j^{\frac{1}{|j|}}, \left(\overline{\lim\limits_{j\to\infty}} q_j^{\frac{1}{j}} \right)^{-1} \right)$.

Пусть теперь $1 \leqslant C \leqslant \sqrt{2} + 1$. Тогда неравенство

$$\frac{b}{C} + \frac{1}{bC} + \frac{1}{C^2} > 1$$

выполняется для всех $b > 0$, $b \neq 1$, и нам достаточно выбрать интервал значений параметра b, лежащий в $\left(\overline{\lim\limits_{j\to-\infty}} q_j^{\frac{1}{|j|}}, \left(\overline{\lim\limits_{j\to\infty}} q_j^{\frac{1}{j}} \right)^{-1} \right)$, и интервал значений a, достаточно близких к $\dfrac{1}{C}$.

В каждом из случаев имеются открытые интервалы параметров, отвечающие собственным числам, большим и меньшим единицы. По лемме 2.1 соответствующие семейства собственных векторов полны, и, следовательно, оператор B — перемешивающий по теореме 2.2.

2. В случае когда $q_j = 1$, заметим, что оператор $B_0^2 + 2B_0$ на $Y = \ell^p(\mathbb{Z}_+, \{p_i\})$ (где B_0 – обычный оператор обратного сдвига на $\ell^p(\mathbb{Z}_+)$) квазисопряжен изучаемому оператору B.

Соответствующим отображением пространств является $\phi : X \to Y$,

$$\phi(f)(k) = \sum_{j\in\mathbb{Z}:\, j+k\in 2\mathbb{Z}} f(v_{k,j}), \quad k \geqslant 0,$$

— отображение, сопоставляющее $f \in X$ последовательность из Y, k-я координата которой равна сумме всех чисел, стоящих на вертикали с номером k. Легко проверить, дословно повторяя рассуждение из доказательства утверждения 2 в теореме 4.1, что при $p_i \geqslant c(\sqrt{2}+1)^i$ оператор $B_0^2+2B_0$ на $Y = \ell^p(\mathbb{Z}_+, \{p_i\})$ не будет гиперциклическим. Поэтому и оператор B не будет гиперциклическим, так как таковым не является оператор, квазисопряженный ему. □

6. Бесконечная версия «лесенки»

Рассмотрим ориентированный граф $L_\infty = (V'_\infty, E'_\infty)$, где $V'_\infty = (v_{i,j})_{i\geqslant 0, j\in\mathbb{Z}}$ и

$$E'_\infty = \big\{(v_{i,j}, v_{i+1,j}),\ (v_{2i,2j}, v_{2i,2j+1}),\ (v_{2i,2j}, v_{2i,2j-1}),$$
$$(v_{2i+1,2j+1}, v_{2i+1,2j}),\ (v_{2i+1,2j+1}, v_{2i+1,2j+2}),\ \ j \in \mathbb{Z},\ i \geqslant 0\big\}$$

и оператор сдвига B на нем.

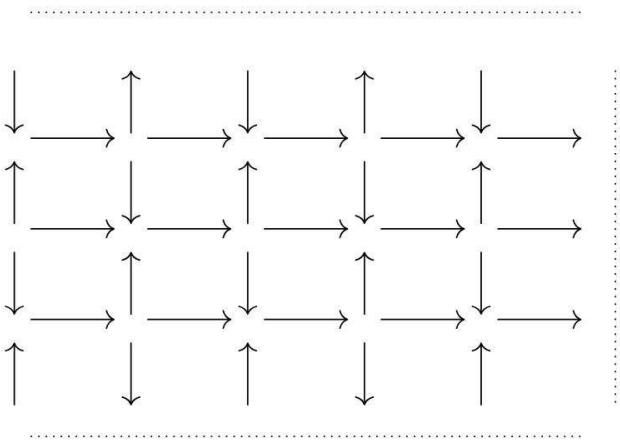


Рис. 9. Граф L_∞

Теорема 6.1. *Пусть B — обратный сдвиг на L_∞, и пусть X — любое из пространств $\ell^p(V'_\infty, \mu)$, $1 \leqslant p < \infty$, или $c_0(V'_\infty, \mu)$. Тогда*

1. *Пусть $\mu_{i,j} = p_i q_j$, $p_i, q_j > 0$. Если*

$$\overline{\lim_{i\to\infty}}\, p_i^{\frac{1}{i}} < C,$$
$$\overline{\lim_{j\to\infty}}\, q_j^{\frac{1}{j}} < \frac{2C}{C^2-1+\sqrt{C^4-6C^2+1}},$$
$$\overline{\lim_{j\to-\infty}}\, q_j^{\frac{1}{|j|}} \leqslant \frac{C^2-1+\sqrt{C^4-6C^2+1}}{2C},$$

где $C > \sqrt{2}+1$, то оператор B будет слабо перемешивающим на X. Если же $1 \leqslant C \leqslant \sqrt{2}+1$, то оператор B на X будет слабо перемешивающим при выполнении условий

$$\overline{\lim_{i\to\infty}}\, p_i^{\frac{1}{i}} < C, \qquad \overline{\lim_{j\to\infty}}\, q_j^{\frac{1}{j}} \leqslant \frac{1}{H}, \qquad \overline{\lim_{j\to-\infty}}\, q_j^{\frac{1}{|j|}} < H,$$

где $H > 0$.

2. *Предположим, что* $\inf\limits_j \mu_{i,j} \geqslant c(\sqrt{2}+1)^i$, $\forall i \in \mathbb{Z}_+$, *где* $c > 0$. *Тогда оператор* B *на* X *не будет гиперциклическим.*

Доказательство. Рассмотрим квадрат оператора B

$$(B^2 f)(v_{i,j}) = f(v_{i+1,j+1}) + f(v_{i+1,j-1}) + f(v_{i+2,j}).$$

Действие этого оператора изображено на рис. 10.

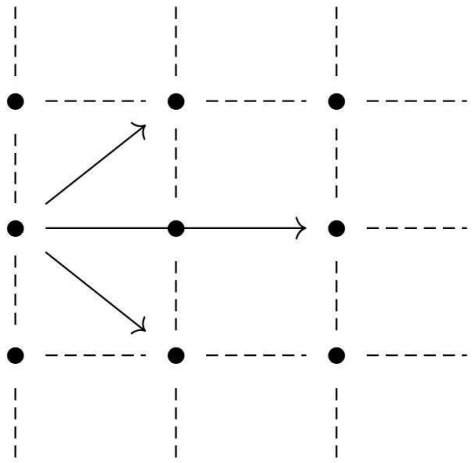


Рис. 10. Действие оператора B^2

Нетрудно заметить, что как и в случае графа L_2, граф L_∞ распадается на два одинаковых подграфа, каждый из которых — это граф W из теоремы 5.2. Пространство X также распадается в прямую сумму пространств, на каждом из которых действует один и тот же оператор – оператор обратного сдвига на графе W. В условиях теоремы операторы обратного сдвига на каждом из слагаемых будут перемешивающими, следовательно, и оператор B^2, как их прямая сумма, будет перемешивающим. В частности, оператор B^2, а, значит, и оператор B будет слабо перемешивающим.

Если одно из слагаемых, на которые распадается исходный оператор, не будет гиперциклическим, то и исходный оператор не будет гиперциклическим. Поэтому из теоремы 5.2 можно получить и необходимое условия на веса. Однако сейчас мы рассмотрим еще одно доказательство необходимости условий гиперцикличности оператора сдвига на графе W (для удобства выкладок введена новая нумерация вершин $i = \dfrac{i'-j'}{2}$, $j = \dfrac{i'+j'}{2}$, где штрихами помечены старые номера вершин), см. рис. 11.

Аналогично доказательству теоремы 3.2, оператор B^2 можно представить в виде суммы двух коммутирующих операторов A и D

$$(Af)(v_{i,j}) = f(v_{i+1,j}) + f(v_{i,j+1}), \qquad (Df)(v_{i,j}) = f(v_{i+1,j+1}).$$

Соответственно,

$$(A+D)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k A^k D^{n-k}, \qquad (A^k f)(v_{i,j}) = \sum_{l=0}^{k} C_k^l f(v_{i+l,j+k-l}).$$

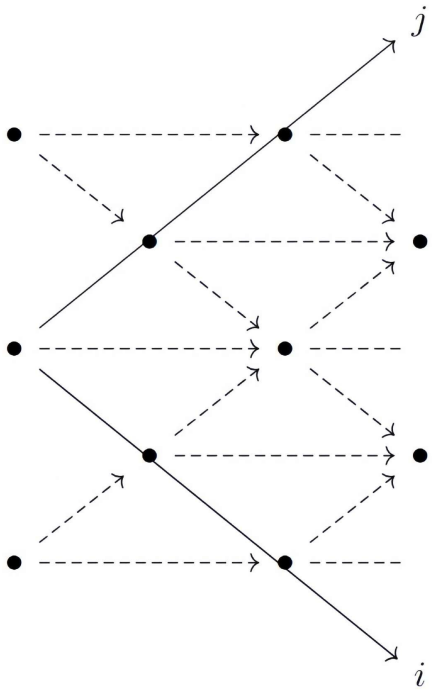


Рис. 11. Граф W

Если оператор B^2 — гиперциклический, то можно приблизить с любой точностью вектор $e_{v_{0,0}}$. Следовательно, для любых ε, δ найдутся $f \in X$ и $n \in \mathbb{N}$ такие что

$$|\sum_{k=0}^{n} C_n^k \sum_{l=0}^{k} C_k^l f(e_{v_{n-k+l,n-l}}) - 1| < \varepsilon, \qquad |f(v_{i,j})\mu_{i,j}| \leqslant \|f\|_X < \delta.$$

В новых координатах условие из утверждения 2 переходит в $\mu_{i,j} \geqslant c(\sqrt{2}+1)^{i+j}$ при всех i, j, откуда $|f(v_{i,j})| \leqslant \dfrac{\delta}{c}(\sqrt{2}+1)^{-i-j}$. Следовательно,

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{k=0}^{n} C_n^k \sum_{l=0}^{k} C_k^l f(e_{v_{n-k+l,n-l}})\Big| &\leqslant \frac{\delta}{c}\sum_{k=0}^{n} C_n^k \sum_{l=0}^{k} C_k^l (\sqrt{2}+1)^{k-2n} \\ &= \frac{\delta}{c}(\sqrt{2}+1)^{-2n}\sum_{k=0}^{n} C_n^k (2\sqrt{2}+2)^k = \frac{\delta}{c},\end{aligned}$$

что при достаточно малых δ противоречит тому, что эта сумма близка к 1. Таким образом, оператор B^2 не будет гиперциклическим. □

Благодарности

Автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю, профессору Антону Дмитриевичу Баранову за всестороннюю поддержку и помощь в процессе написания работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. E. Abakumov, A. Abbar. *On several dynamical properties of shifts acting on directed trees* // Canadian J. Math. **78**:2, 375–404 (2026).
2. A. Baranov, A. Lishanskii, D. Papathanasiou. *Hypercyclic shifts on lattice graphs* // Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat., Ser. A Mat. **120**, 78 (2026).
3. F. Bayart, É. Matheron. *Dynamics of Linear Operators*. Cambridge Univ. Press, Cambridge (2009).
4. G. Godefroy, J. H. Shapiro. *Operators with dense, invariant cyclic vector manifolds* // J. Funct. Anal. **98**:2, 229–269 (1991).
5. K.–G. Grosse–Erdmann, A.P. Manguillot. *Linear Chaos*. Springer, Berlin (2011).
6. K.–G. Grosse–Erdmann, D. Papathanasiou. *Dynamics of weighted shifts on directed trees* // Indiana Univ. Math. J. **72**:1, 263–299 (2023).
7. K.–G. Grosse–Erdmann, D. Papathanasiou. *Chaotic weighted shifts on directed trees* // Preprint, arXiv:2303.03980 [math.FA] (2023).
8. A. López–Martinez, D. Papathanasiou. *Shifts on trees versus classical shifts in chain recurrence* // J. Differ. Equations **433**, 113230 (2025).
9. R.A. Martínez–Avendaño. *Hypercyclicity of shifts on weighted L^p spaces of directed trees* // J. Math. Anal. Appl. **446**:1, 823–842 (2017).
10. S. Rolewicz. *On orbits of elements* // Studia Math. **32**:1, 17–22 (1969).
11. H. N. Salas. *Hypercyclic weighted shifts* // Trans. Amer. Math. Soc. **347**:3, 993–1004 (1995).

Максим Андреевич Матвеев,
Междисциплинарная исследовательская лаборатория им. П.Л. Чебышева,
14-я линия В.О., дом 29Б, к. 122,
199178, г. Санкт–Петербург, Россия,
ФГБОУ ВО «Санкт–Петербургский государственный университет»,
Математико–механический факультет,
Университетский проспект, дом 28, литера Д,
198504, г. Санкт–Петербург, г. Петергоф, Россия
E-mail: st087207@student.spbu.ru