ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 18 № 4 (2026). С. 75-89.

УДК 517.958

ДОЗВУКОВАЯ БЕГУЩАЯ ВОЛНА В ГИПЕРБОЛИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ

Л.А. КАЛЯКИН

Аннотация. Для полулинейного гиперболического уравнения рассматривается дозвуковая бегущая волна. Основное внимание уделяется проблеме устойчивости, в связи с которой исследуется спектральная задача для несамосопряженного оператора. На этой основе дается описание широкого класса начальных возмущений, относительно которых волна асимптотически устойчива в линейном приближении.

Ключевые слова: нелинейное дифференциальное уравнение, бегущая волна, спектр, устойчивость.

Mathematics Subject Classification: 34D20, 35L52

1. Введение

Исходным объектом является полулинейное гиперболическое уравнение

$$\delta\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial\varphi}{\partial t}+f(\varphi)=0,\qquad x\in\mathbb{R},\quad t>0;\qquad \delta=\mathrm{const}>0. \tag{1.1}$$

Наличие первой производной по времени соответствует учету диссипационных эффектов в соответствующих математических моделях. Уравнение типа (1.1) встречается в магнитодинамике при описании динамики доменных стенок [1], [2], в моделях теплопроводности и диффузии [7], [11].

Функция $f(\varphi)$ предполагается непрерывно дифференцируемой *в окрестности отрезка* $\varphi\in[0,1]$. Основное ограничение состоит в наличии пары нулей

$$f(0)=f(1)=0;\qquad f'(0)>0,\qquad f'(1)<0, \tag{1.2}$$

с условием $f(\varphi)\neq 0$ при $0<\varphi<1$. Нули функции $f(\varphi)$ являются тривиальными решениями (равновесиями) уравнения (1.1). При условиях (1.2) одно из них $\varphi\equiv 0$ динамически устойчиво, другое $\varphi\equiv 1$ не устойчиво.

Под бегущей волной понимается функция, зависящая от одной переменной $\Phi(x-S(t))$. Решение уравнения (1.1) в виде волны с постоянной скоростью $V=S'(t)=\mathrm{const}>0$ находится из обыкновенного дифференциального уравнения

$$(\delta V^2-1)\Phi''-V\Phi'+f(\Phi)=0.$$

Уравнение дополняется краевыми условиями на бесконечности, которые выделяют решение с фазовой траекторией, соединяющей неподвижные точки $(0,0)$ и $(1,0)$, [10]. Тип неподвижных точек зависит от коэффициента (δV^2-1). В случае $(\delta V^2-1)<0$ бегущая волна соответствует траектории из седла $(0,0)$ в устойчивый узел (либо фокус) $(1,0)$ [10], [3]. В частности, такая ситуация имеет место при $\delta=0$, когда (1.1) переходит в параболическое уравнение КПП (Колмогоров, Петровский, Пискунов). Бегущие волны такого типа для уравнения КПП хорошо исследованы: имеются результаты об устойчивости и

L.A. Kalyakin, Subsonic traveling wave in hyperbolic equation.

© Калякин Л.А. 2026.

Поступила 14 июня 2026 г.

об асимптотическом выходе на них других решений при $t \to \infty$, [6], [13], [14], [10], [4], [5]. Иная ситуация складывается в гиперболическом уравнении, когда $\delta > 0$. Здесь строгие результаты об асимптотике при $t \to \infty$ отсутствуют. Асимптотический выход на такие волны при $t \to \infty$ обнаруживается в численных экспериментах [12].

Значение V, при котором коэффициент оказывается нулевым: $(\delta V^2 - 1) = 0$, иногда называется звуковой скоростью в соответствующих математических моделях. В данной работе проводится анализ дозвуковых волн на предмет их устойчивости.

2. Существование

В рассматриваемом случае, когда $\delta V^2 - 1 < 0$, удобно использовать перенормированную переменную

$$s = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \delta V^2}}.$$

Тогда уравнение бегущей волны принимает вид

$$\frac{d^2\Phi}{ds^2} + \gamma \frac{d\Phi}{ds} - f(\Phi) = 0. \tag{2.1}$$

Уравнение дополняется условиями стабилизации решения к равновесиям:

$$\Phi(s) \to 0 \qquad \text{при} \quad s \to -\infty, \qquad \Phi(s) \to 1 \quad \text{при} \quad s \to +\infty. \tag{2.2}$$

Тогда волна описывает динамику замещения неустойчивого равновесия $\varphi \equiv 1$ устойчивым $\varphi \equiv 0$ ([10], [3]). Коэффициент $\gamma > 0$ связан со скоростью соотношением $\gamma = \dfrac{V}{\sqrt{1 - \delta V^2}}$. Условие дозвуковой волны эквивалентно следующему:

$$0 < \gamma < \infty. \tag{2.3}$$

Вблизи неподвижных точек структура фазового портрета для уравнения (2.1) определяется линеаризованным уравнением

$$\frac{d^2\phi}{ds^2} + \gamma \frac{d\phi}{ds} - f'\phi = 0.$$

Здесь $f' = f'(0)$, либо $f' = f'(1)$. Построение решения в виде $\phi = \exp(\lambda\, s)$ приводит к характеристическому уравнению, которое дает для λ значения

$$\lambda_0^{\pm} = \frac{1}{2}\Big(-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 + 4f'(0)}\Big), \qquad \lambda_1^{\pm} = \frac{1}{2}\Big(-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 + 4f'(1)}\Big).$$

Поскольку $f'(0) > 0$, то показатели $\lambda_0^- < 0 < \lambda_0^+$ будут разного знака, и следовательно точка $(0,0)$ – седло. Характер неподвижной точки $(1,0)$ зависит от двух параметров: γ и $f'(1)$. При условии $\gamma^2 \geqslant -4f'(1)$ эта точка будет устойчивым узлом. Величина $\gamma_* = 2\sqrt{-f'(1)}$ определяет минимальное (критическое) значение параметра γ, при которых точка $(1,0)$ остается узлом. При меньших значениях $\gamma < \gamma_*$ точка $(1,0)$ будет фокусом.

Очевидно, разрешимость краевой задачи (2.1), (2.2) эквивалентна существованию фазовой траектории, соединяющей неподвижные точки.

Лемма 2.1. *При любой гладкой функции $f(\varphi)$ с условиями (1.2), (2.3) существует минимальное значение $\gamma_0 \geqslant \gamma_*$ среди тех γ, при которых краевая задача (2.2) для уравнения (2.1) имеет монотонное решение $\Phi(s)$, соответствующее траектории из седла $(0,0)$ в узел $(1,0)$.*

Доказательство сводится к отысканию минимального значения коэффициента γ, при котором сепаратриса из седла $(0,0)$ входит в узел $(1,0)$ при $s \to +\infty$ монотонно (без

обхода точки $(1,0)$). Формальное доказательство получается анализом векторного поля; оно многократно воспроизводилось и приведено, например, в [13], [5].

Математические постановки исходных задач обычно ограничиваются заданием функции $f(\varphi)$ на промежутке между равновесиями $\varphi \in [0,1]$, и поэтому немонотонные волны, у которых фазовая траектория обходит точку равновесия, не обсуждаются [6], [13]. Кроме того, немонотонная волна считается неустойчивой и потому физически нереализуемой. Однако, в контексте обсуждаемых ниже проблем такая волна ничем не выделяется, а понятие устойчивости следует уточнить в направлении, обсуждаемом в [10]. Поэтому сначала надо указать на возможность существования немонотонной волны.

Если $\gamma < \gamma_0$, то точка $(1,0)$ остается узлом при $\gamma_* \leqslant \gamma < \gamma_0$, либо становится фокусом при $\gamma < \gamma_*$. В любом случае при $\gamma < \gamma_0$ траектория обходит точку $(1,0)$, и решение будет немонотонным. Более того, при малых γ сепаратриса из седла может вовсе не входить в $(1,0)$, так что краевая задача (2.2) оказывается не разрешимой. Это свойство определяется глобальным поведением правой части $f(\varphi)$, и эффективных условий разрешимости краевой задачи для нелинейного уравнения не известно. Однако, если γ близко к значению γ_0, то сепаратриса из седла $(0,0)$ остается входящей в точку $(1,0)$, хотя бы и не монотонно (с обходом точки). В конечном счете, этот факт следует из непрерывности сепаратрисы по параметру γ. Один из способов формального доказательства основан на построении функции Ляпунова в окрестности точки $(1,0)$. Основная цель следующего утверждения – показать, что краевая задача (2.1), (2.2) имеет немонотонные решения при некоторых значениях параметра γ.

Теорема 2.1. *При любой гладкой функции $f(\varphi)$ с условиями (1.2) существует значение $\gamma_1 < \gamma_0$ такое, что для любого $\gamma \in (\gamma_1, \gamma_0)$ краевая задача (2.2) для уравнения (2.1) имеет решение (немонотонное) $\Phi(s) = \Phi(s;\gamma)$, которое соответствует траектории из седла в узел (или фокус).*

Доказательство. В качестве функции Ляпунова можно использовать первый интеграл бездиссипационного уравнения

$$J(\dot\Phi, \Phi) = \frac{1}{2}\dot\Phi^2 - \int\limits_0^\Phi f(\phi)\,d\phi.$$

Вдоль траектории любого решения имеет место тождество, вытекающее из исходного уравнения

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{2}(\dot\Phi(s))^2 - \int\limits_{s_0}^{s} f(\Phi(\zeta))\dot\Phi(\zeta)\,d\zeta\right) = -\gamma(\dot\Phi(s))^2.$$

Поэтому при движении точки $(\Phi(s), \dot\Phi(s))$ в направлении $s \to +\infty$ первый интеграл вдоль траектории не возрастает

$$\frac{d}{ds}J(\dot\Phi, \Phi) = -\gamma(\dot\Phi(s))^2 \leqslant 0.$$

В достаточно малой окрестности $S_R = \{(1+\Phi, \dot\Phi) :\ \dot\Phi^2 + \Phi^2 \leqslant R\}$ имеем

$$f(\phi) = f'(1)\phi + \mathcal{O}(\phi^2), \quad f'(1) < 0.$$

Поэтому интеграл $J(\dot\Phi, \Phi)$ мажорируется снизу и сверху квадратичной формой:

$$m(\dot\Phi^2 + \Phi^2) < J(\dot\Phi, \Phi) < M(\dot\Phi^2 + \Phi^2)$$

с константами $0 < m < M < \infty$, которые зависят от R — границы окрестности. Если величина R не слишком велика, то такая окрестность содержит лишь одну неподвижную точку $(1,0)$. Выберем меньшую окрестность $\dot\Phi^2 + \Phi^2 \leqslant m\,R/M$. На ее границе первый интеграл имеет оценку $J(\dot\Phi, \Phi) < mR$. Если в момент «времени» s_0 траектория пересекает

границу этой окрестности, то в последующие моменты $s > s_0$ эта оценка сохраняется в силу монотонности на траектории. В силу нижней мажоранты получается $(\Phi^2+\dot\Phi^2) < R$. Таким образом, полутраектория $(\Phi(s), \dot\Phi(s))$ во все моменты $s > s_0$ оказывается в ограниченной области S_R. Уравнение (2.1) не имеет предельных циклов силу критерия Бендиксона. Поскольку замкнутая область S_R содержит одну неподвижную точку, и она устойчива при $s \to +\infty$, то траектория входит в эту точку при $s \to +\infty$, [8, стр. 12, 26].

Покажем, что при $\gamma > \gamma_0$ таким свойством обладает сепаратриса, выходящая из седла $(0,0)$. На фазовой плоскости с координатами $x = \Phi$, $y = \dot\Phi$ фазовые траектории автономного уравнения (2.1) касаются векторного поля

$$\dot x = y, \qquad \dot y = f(x) - \gamma y.$$

Рассмотрим семейство, зависящее от $\gamma > 0$, сепаратрисных траекторий, которые выходят из седловой точки $(0,0)$ в верхнюю полуплоскость. Запишем их в виде интегральных кривых $y = Y(x;\gamma)$ соответствующего уравнения:

$$\frac{dy}{dx} = f(x) - \gamma.$$

Начальная точка $(0,0)$ является особой. Тем не менее, функция $Y(x;\gamma)$ непрерывна по параметру γ, поскольку в начальной точке вектор $(1, \lambda_0^+(\gamma))$, касательный к сепаратрисе, непрерывен по γ.

При $\gamma = \gamma_0$ сепаратриса входит в точку $(1,0)$, а следовательно пересекает границу $\Phi^2 + \dot\Phi^2 = r$. В силу непрерывной зависимости от параметра γ эту границу пересекает семейство сепаратрис для близких значений параметра: $\gamma \in (\gamma_1, \gamma_0]$, $\gamma_1 = \mathrm{const} < \gamma_0$. □

Замечание 2.1. *Доказанные утверждения о существовании γ_1 и граничного значения параметра γ_0 не содержат никаких рецептов вычисления этих величин. В задачах с конкретными нелинейными функциями $f(\varphi)$ значение γ_0 вычисляются приближенно, как это продемонстрировано в* [5].

Результаты, полученные для обыкновенного дифференциального уравнения (2.1), можно интерпретировать для бегущей волны в уравнении (1.1).

Предложение 2.1. *При любой гладкой функции $f(\varphi)$ с условиями (1.2) и при любой достаточно большой скорости, для которой $\gamma > \gamma_1$, существует дозвуковая волна $\Phi(s)$, бегущая из устойчивого равновесия $\varphi \equiv 0$ в неустойчивое $\varphi \equiv 1$.*

Асимптотика этой волны на переднем и заднем фронте соответствует структуре неподвижных точек и описывается экспонентами с показателями $\lambda_0^\pm$, $\lambda_1^\pm$, которые являются корнями характеристического уравнения, [8, стр.40]:

$$\Phi(s) = \begin{cases} 1 + \big(c_1^+ \exp(\lambda_1^+ s) + c_1^- \exp(\lambda_1^- s)\big)\big(1 + o\big(1\big)\big), & s \to +\infty, \\ c_0^+ \exp(\lambda_0^+ s)\big(1 + \mathcal{O}\big(\exp(\lambda_1^+ s)\big)\big), & s \to -\infty, \quad \lambda_1^+ > 0, \end{cases} \qquad c_{0,1}^\pm = \mathrm{const}\,.$$

Значение параметра γ может оказаться как выше так и ниже критического γ_*, что влияет на структуру асимптотики при $s \to +\infty$. Если $\gamma < \gamma_*$ (случай фокуса) мнимые части $\operatorname{Im}\lambda_1^\pm \neq 0$, и асимптотики содержат осциллирующие функции. В исключительном случае $\gamma = \gamma_*$ показатели $\lambda_1^+ = \lambda_1^- < 0$ совпадают и появляется линейный множитель s при одной из экспонент. Такие ситуации исключаются при $\gamma > \gamma_0$.

Далее рассматривается бегущая волна $\Phi(s)$ как решение краевой задачи (2.1), (2.2) при параметре $\gamma \in (\gamma_1, \infty)$. При условиях (1.2) этой волне соответствует траектория из седла в узел (либо фокус). Условие монотонности волны не предполагается.

3. Устойчивость в линейном приближении

Центральным вопросом теории бегущих волн является выяснение условий на исходную начально–краевую задачу, при которых точное решение выходит на волну в асимптотике по времени $t \to \infty$. Для уравнения КПП этот вопрос считается решенным [13]. Для гиперболического уравнения похожих результатов нет. Эту проблему можно пытаться решить другим способом, широко распространенным в прикладных исследованиях.

Устойчивость волны в линейном приближении понимается как устойчивость по времени t (в смысле Ляпунова) точного решения $\varphi(x,t) \equiv \Phi(s)$ начально–краевой задачи для исходного уравнения в частных производных. Линейное приближение означает, что при анализе возмущенного решения

$$\varphi(x,t) = \Phi(s) + \varepsilon u(x,t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad \varepsilon \to 0, \qquad s = \frac{(x - Vt)}{\sqrt{\delta V^2 - 1}}$$

поправка $u(x,t)$ определяется из линеаризованного уравнения

$$\delta \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial t} + f'(\Phi(s))u = 0. \tag{3.1}$$

с нулевыми условиями на бесконечности

$$u(x,t) \to 0, \quad x \to \pm\infty, \tag{3.2}$$

и с ненулевыми начальными данными:

$$u(x,t)|_{t=0} = u_0(x), \qquad \partial_t u(x,t)|_{t=0} = u_1(x). \tag{3.3}$$

Постановка проблемы. *Требуется указать класс начальных данных $u_0(x)$, $u_1(x)$ (начальных возмущений), при которых решение линеаризованной задачи стремится к нулю $u(x,t) \to 0$ при $t \to \infty$ равномерно по $x \in \mathbb{R}$.*

Ниже предъявляется набор решений уравнения (3.1) с однородными краевыми условиями (3.2). Эти решения, взятые при $t = 0$ определяют класс начальных данных. При этом пара функций $u_0(x)$, $u_1(x)$ оказывается согласованной, как это бывает для решения гиперболического уравнения при выделении волны в одном направлении.

В данной работе рассматривается первый (формальный) этап анализа устойчивости. Для получения результатов, сравнимых с известными результатами для уравнения КПП, на втором этапе потребуются оценки разности $\varphi(x,t) - \Phi(s) - \varepsilon u(x,t)$, как это делается в теории устойчивости Ляпунова. Второй этап выходит за рамки данной статьи.

3.1. Переход к спектральной задаче.

Имея в виду метод разделения переменных, в формальном подходе достаточно проанализировать поправки специального вида в переменной бегущей волны

$$u(x,t;\mu) = \phi(s;\mu)\exp(\mu t), \quad \mu = \text{const} \in \mathbb{C}, \qquad s = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \delta V^2}}.$$

На этом пути для функции $\phi(s;\mu)$ получается дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2\phi}{ds^2} + \gamma(1 + 2\delta\mu)\frac{d\phi}{ds} - (f'(\Phi(s)) + \delta\,\mu^2 + \mu)\phi = 0, \qquad \gamma = \frac{V}{\sqrt{1 - \delta V^2}} \tag{3.4}$$

с однородными условиями на бесконечности

$$\phi(s;\mu) \to 0, \quad s \to \pm\infty. \tag{3.5}$$

Получившаяся спектральная задача[1] рассматривается при параметре $\mu \in \mathbb{C}$. Асимптотическая устойчивость ассоциируется с экспоненциальным убыванием поправки $u(x,t;\mu)$

[1] Подобные задачи иногда связываются с понятием операторного пучка.

при $t \to \infty$, что соответствует требованию $\mathrm{Re}(\mu) < 0$. Такое ограничение на параметр μ выделяет определенный класс функций $\phi(s;\mu)$, относительно которых рассматриваемая волна $\Phi(s)$ устойчива. Надо иметь в виду, что выделяемое таким способом множество решений $\phi(s;\mu)$ зависит от требований на скорость стабилизации при $s \to \pm\infty$. Увеличение скорости стабилизации ведет к сужению класса устойчивых возмущений. С другой стороны ослабление этого требования ведет не только к расширению множества устойчивых возмущений, но и к появлению неусточивых возмущений. Такие свойства спектральной задачи (3.4), (3.5) обязаны ее несамосопряженности.

Уравнение (3.4) имеет два линейно независимых решения при любой комплексной константе μ. Структура этих решений в асимптотике на бесконечности зависит от μ и определяется корнями характеристических уравнений вблизи равновесий [9]:

$$\phi(s;\mu) \approx \exp(\lambda_0^{\pm}(\mu)s), \quad s \to -\infty, \qquad \phi(s;\mu) \approx \exp(\lambda_1^{\pm}(\mu)s), \quad s \to +\infty.$$

Показатели $\lambda_{0,1}^{\pm}(\mu)$ определяются из уравнений

$$\lambda^2 + \gamma(1+2\delta\mu)\lambda - (f' + \delta\,\mu^2 + \mu) = 0; \qquad f' = f'(0), \quad \text{либо} \quad f' = f'(1). \tag{3.6}$$

Соответствующая формула

$$\lambda = -\frac{1}{2}\gamma(1+2\delta\mu) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\gamma^2(1+2\delta\mu)^2 + 4(\delta\,\mu^2 + \mu) + 4f'}$$

приводится к виду

$$\begin{aligned} \lambda_0^{\pm}(\mu) &= -\frac{1}{2}\gamma(1+2\delta\mu) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(1+2\delta\mu)^2\Big(\gamma^2 + \frac{1}{\delta}\Big) + \Big(4f'(0) - \frac{1}{\delta}\Big)}, \quad f'(0) > 0, \\ \lambda_1^{\pm}(\mu) &= -\frac{1}{2}\gamma(1+2\delta\mu) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(1+2\delta\mu)^2\Big(\gamma^2 + \frac{1}{\delta}\Big) + \Big(4f'(1) - \frac{1}{\delta}\Big)}, \quad f'(1) < 0. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Показатели $\lambda_{0,1}^{\pm}(\mu)$ зависят от параметров исходного уравнения δ, $f'(0)$, $f'(1)$ и от параметра волны γ.

Примеры графиков функций $\lambda = \lambda_{0,1}^{\pm}(\mu)$ на действительной оси $\mu \in \mathbb{R}$ при разных $f'(0)$, $f'(1)$ приведены на рисунке 1. Отрезки прямой линии $\lambda = 1 + 2\delta\mu$ соединяют точки кратных корней и соответствуют графикам реальной части $\mathrm{Re}\,\lambda_{0,1}^{\pm}(\mu)$ в случае комплексных показателей. Точками выделены нули этих функций $\mu_1^- < \mu_0^- < \mu_* < \mu_0^+ < \mu_1^+$.

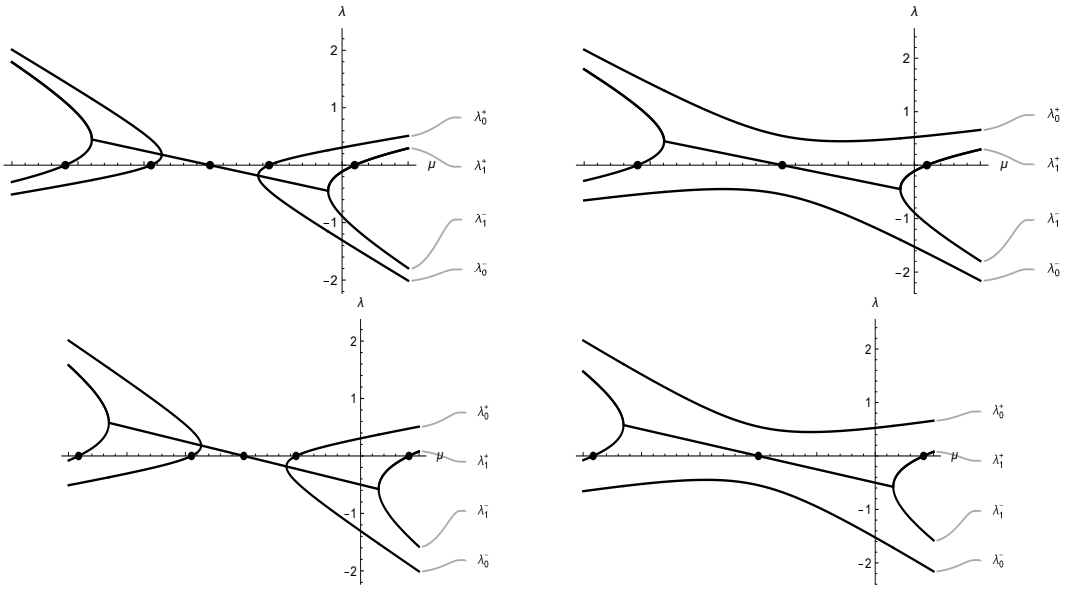


Рис. 1. Варианты графиков показателей $\lambda_{0,1}^{\pm}(\mu)$ в зависимости от действительного параметра $\mu \in \mathbb{R}$

3.2. Точечный спектр на действительной оси. Рассмотрим задачу (3.4), (3.5) на действительной оси $\mu \in \mathbb{R}$. Подходящее решение фиксируется убывающей асимптотикой при $s \to -\infty$. Если наибольший показатель $\lambda_0^+(\mu) > 0$ положителен, то краевое условие на минус бесконечности позволяет выделить (с точностью до множителя) одно из двух независимых решений, экспоненциально убывающее при $s \to -\infty$; обозначим его $\phi_-(s;\mu)$. Эта функция выражается через линейную комбинацию решений с показателями $\lambda_1^\pm(\mu)$, определяющих асимптотику на другой бесконечности.

Необходимое условие разрешимости спектральной задачи (3.4), (3.5) формулируется в виде требований на знаки показателей: *хотя бы один из* $\operatorname{Re}\lambda_0^\pm(\mu) > 0$ *и хотя бы один из* $\operatorname{Re}\lambda_1^\pm(\mu) < 0$. Из графиков легко усмотреть, что для спектрального параметра $\mu \in \mathbb{R}$ на действительной оси существуют интервалы, на которых задача либо безусловно разрешима, либо безусловно не разрешима. Границы таких интервалов определяются нулями функций $\lambda_{0,1}^\pm(\mu)$, расположенным последовательно $\mu_1^- < \mu_0^- < \mu_0^+ < \mu_1^+$ и нулем их реальных частей $\mu_* = -\frac{1}{2}\delta$. Например, в случае, когда существует нуль функции $\lambda_0^+(\mu)$, спектр сплошь заполняет промежуток $\mu_0^+ < \mu < \mu_1^+$. Если $\lambda_0^+(\mu) \neq 0$, то спектр заполняет промежуток $\mu_* < \mu < \mu_1^+$. Соответствующие собственные функции экспоненциально убывают при $s \to +\infty$ с показателем $\operatorname{Re}\lambda_1^+(\mu) < 0$, либо $\operatorname{Re}\lambda_1^-(\mu) < 0$. Точек спектра не существует на интервале $\mu_1^- < \mu < \mu_*$, поскольку здесь $\operatorname{Re}\lambda_1^\pm(\mu) > 0$ и любое решение растет при $s \to +\infty$.

Вывод: Функция $\phi_-(s;\mu)\exp(\mu t)$ является решением краевой задачи для поправки в линейном приближении (3.1), (3.2). Таким же свойством обладают линейные комбинации решений (либо интегралы) по всевозможным $\mu \in \mathcal{L} \subset (\mu_0^+, \mu_1^+)$ внутри промежутка. Если ограничиться промежутком на левой полуоси $\mu \in \mathcal{L} \subset (\mu_0^+, 0)$, то такие комбинации с весовыми функциями $\hat{u}_0(\mu)$

$$u(s,t) = \int\limits_{\mathcal{L}} \hat{u}_0(\mu)\phi_-(s;\mu)\exp(\mu t)\,d\mu$$

и их производные, взятые при $t = 0$, определяют класс начальных возмущений, относительно которых волна устойчива. В то же время всегда существуют неустойчивые возмущения $\phi_-(s;\mu)\exp(\mu t)$ при параметре $\mu \in (0, \mu_1^+)$.

3.3. Вариант с самосопряженным оператором. Существует другой подход к спектральной задаче (3.4), (3.5). Замена функции

$$\phi(s;\mu) = \tilde{\phi}(s;\mu)\exp\Big(-\frac{\gamma}{2}(1+2\delta\mu)s\Big)$$

позволяет исключить первую производную из дифференциального уравнения (3.4). Для новой функции с условием $\tilde{\phi}(s;\mu) \to 0$, $s \to \pm\infty$ получается самосопряженная задача, спектр которой действителен и полуограничен. Однако получившаяся спектральная задача не эквивалентна исходной (3.4), (3.5). При переходе к $\tilde{\phi}(s;\mu)$ исключаются решения $\phi_+(s;\mu)$, которые убывают при $s \to +\infty$ не слишком быстро – с показателем $\lambda_1^+(\mu)$. Найденный таким способом набор устойчивых возмущений оказывается бедным. Он состоит из быстро убывающих решений (с показателем $\lambda_1^-(\mu)$), которые существуют при исключительных (собственных) значениях параметра μ и соответствуют собственным функциям самосопряженной задачи. Такие изолированные точки дискретного спектра могут существовать на действительной оси левее нуля $\mu < \mu_1^+$; например при $\mu = 0$ имеется собственная функция $\phi(s;0) = \Phi'(s)$. Если волна монотонна, то спектра нет на правой полуоси $\mu > 0$, и следовательно не бывает неустойчивости относительно быстро убывающих возмущений, [5].

Таким образом, редукция спектральной задачи (3.4), (3.5) к самосопряженной форме сужает класс устойчивых возмущений. Если же допустить решения $\phi(s;\mu)$, убывающие не столь быстро при $s \to +\infty$, то спектральная задача (3.4), (3.5) остается несамосопряженной. Именно ее следует рассматривать для идентификации более широкого класса начальных возмущений, относительно которых волна $\Phi(s)$ устойчива. Указания на такую устойчивость для уравнения КПП можно усмотреть в аналитических результатах [13], а для гиперболического уравнения в численных экспериментах [12]. Эта проблема обсуждалась в [10].

3.4. Точечный спектр в комплексной плоскости. Класс начальных возмущений можно расширить, добавив решения $\phi_-(s;\mu)\exp(\mu t)$ с комплексными значениями μ. В этом случае для однозначной идентификации показателей $\lambda^{\pm}_{0,1}(\mu)$ в виде формул (3.7) (как корней алгебраического уравнения (3.6)) на комплексной плоскости следует указать разрезы, которые соединяют точки ветвления. Координаты точек ветвления $\mu^{\pm}_{0,1}$ на комплексной плоскости соответствуют нулям подкоренного выражения в (3.7):

$$\hat\mu^{\pm}_{0,1} = \frac{1}{2\delta}\left(-1 \pm \sqrt{\frac{1-4\delta f'}{\gamma^2\delta+1}}\right). \tag{3.8}$$

Здесь $f' = f'(0) > 0$, либо $f' = f'(1) < 0$. Если $4f'(0)\delta < 1$, то обе пары точек $\hat\mu^{\pm}_{0,1}$ расположены на действительной оси. Если $4f'(0)\delta > 1$, то пара точек

$$\hat\mu^{\pm}_0 = -\frac{1}{2}\delta \pm i\,\mu_*, \qquad \mu_* = \frac{1}{2\delta}\sqrt{\frac{4\delta f'(0)-1}{\gamma^2\delta+1}}$$

расположена на прямой Γ_*, играющей важную роль в дальнейшем:

$$\Gamma_* = \Big\{\mu\in\mathbb{C}:\ \operatorname{Re}\mu = -\frac{1}{2}\delta\Big\}.$$

Разрезы удобно провести через бесконечно удаленную точку в виде двух пар лучей на этих прямых.

Теперь экспоненциальная асимптотика при $s \to \pm\infty$ характеризуется действительной частью соответствующей пары показателей $\operatorname{Re}\lambda^{\pm}_{0,1}(\mu)$. Условие знакоопределенности этих функций выделяет области на комплексной плоскости:

$$D^{\pm}_0 = \{\mu\in\mathbb{C}:\ \operatorname{Re}\lambda^{\pm}_0(\mu) > 0\}, \qquad D^{\pm}_1 = \{\mu\in\mathbb{C}:\ \operatorname{Re}\lambda^{\pm}_1(\mu) < 0\}.$$

Они зависят от параметров уравнения δ, $f'(0)$, $f'(1)$ и от параметра волны γ. Пересечение областей $D^+_0 \bigcap D^+_1$ определяет точечный спектр несамосопряженной задачи. Описание границы такой области нетрудно получить в аналитической форме.

Рассмотри более общую задачу выделения на комплексной плоскости линии нулей действительных частей показателей

$$\Gamma_0 = \{\mu\in\mathbb{C}:\ \operatorname{Re}\lambda^{\pm}_0(\mu) = 0\}, \qquad \Gamma_1 = \{\mu\in\mathbb{C}:\ \operatorname{Re}\lambda^{\pm}_1(\mu) = 0\}.$$

Лемма 3.1. *Пусть выполнены условия* (1.2) *и* (2.3). *Если* $4\delta f'(0) < 1$, *то в комплексной плоскости* $\mu\in\mathbb{C}$ *каждая линия нулей состоит из двух компонент:* $\Gamma_{0,1} = \Gamma_* \cup \mathcal{E}_{0,1}$, *включая прямую* Γ_* *и эллипсы:*

$$\mathcal{E}_{0,1} = \Big\{\mu\in\mathbb{C}:\ \delta(\operatorname{Re}\mu)^2 + \Big(\delta+\frac{1}{\gamma^2}\Big)(\operatorname{Im}\mu)^2 + f' + \operatorname{Re}\mu = 0\Big\}.$$

В случае $4\delta f'(0) \geqslant 1$ *меняется линия нулей* Γ_0*: эллипс* $\mathcal{E}_0$ *отсутствует, линия* Γ_0 *состоит из двух лучей на прямой* Γ_* *и проходит по выбранным разрезам:*

$$\Gamma_0 = \Big\{\mu\in\mathbb{C}:\ \operatorname{Re}\mu = -\frac{1}{2}\delta, \quad |\operatorname{Im}\mu| \geqslant \mu_*\Big\}.$$

Доказательство. Аналитическое описание границы извлекается из характеристического уравнения (3.6). Это приводит к паре уравнений в терминах комплексной переменной $\mu = x + iy$ и мнимой части $\operatorname{Im}\lambda_{0,1}^{\pm}(\mu) = Y$ (не путать с переменными x, y, Y из раздела 2):

$$Y^2 + 2\gamma\delta yY + f' + \delta(x^2 - y^2) + x = 0, \qquad (\gamma Y - y)(1 + 2\delta x) = 0.$$

Как видим, второе уравнение распадается на два.

Одна часть границы определяется соотношением $\gamma Y = y$ и приводит к уравнению эллипса

$$\mathcal{E}_{0,1} = \Big\{ x + iy \in \mathbb{C} : \ \delta x^2 + \Big(\delta + \frac{1}{\gamma^2}\Big) y^2 + f' + x = 0 \Big\}.$$

Значения производных берутся $f' = f'(0) > 0$, либо $f' = f'(1) < 0$. Они определяют два вложенных эллипса: эллипс $\mathcal{E}_0$, соответствует $\operatorname{Re}\lambda_0^{\pm}(\mu) = 0$ и вложен в эллипс $\mathcal{E}_1$, соответствующий паре $\operatorname{Re}\lambda_1^{\pm}(\mu) = 0$. В каждой паре ветвь эллипса (правая $\mathcal{E}_{0,1}^{+}$ или левая $\mathcal{E}_{0,1}^{-}$) пересекает действительную ось в точках $\mu_{0,1}^{\pm}$ — нулях соответствующего показателя $\lambda_{0,1}^{\pm}(\mu)$ (см. рис. 2). Поскольку нули определяются выражениями

$$\frac{1}{2\delta}\big(-1 \pm \sqrt{1 - 4\delta f'}\big),$$

то из сравнения с (3.8) следует, что при $4f'(0)\delta < 1$ точки ветвления находятся на действительной оси внутри эллипсов. В случае $4f'(0)\delta = 1$ эллипс $\mathcal{E}_0$ вырождается в точку и исчезает при $4\delta f'(0) > 1$.

Вторая компонента границы выделяется уравнением $(1 + 2\delta x) = 0$, которое определяет прямую $\Gamma_* : \ x = -\dfrac{1}{2}\delta$, $y \in \mathbb{R}$, параллельную мнимой оси. При этом оставшееся квадратное уравнение для Y разрешимо в действительных числах лишь при условии

$$(\delta\gamma^2 - 1)y^2 + f' - \frac{1}{4\delta} \geqslant 0.$$

Это соотношение при $f'(1) < 0$ и при $4\delta f'(0) < 1$ выполняется для всех $y \in \mathbb{R}$. В случае $4f'(0)\delta > 1$ возникают ограничения

$$|y| > \sqrt{\frac{f'(0) - \frac{1}{4}\delta}{(\gamma^2\delta + 1)\delta}} = \frac{1}{2\delta}\sqrt{\frac{4\delta f'(0) - 1}{\gamma^2\delta + 1}},$$

которое соответствует выделению из прямой двух лучей с границей в точках ветвления. □

Замечание 3.1. *Внутренность каждого эллипса $\mathcal{E}_{0,1}$ представляет область на комплексной плоскости, в которой действительные части соответствующих показателей $\operatorname{Re}\lambda_0^{\pm}(\mu)$, либо $\operatorname{Re}\lambda_1^{\pm}(\mu)$ имеют разные знаки, см. рис. 2. Знак меняется при переходе через прямую Γ_*, которая делит эллипс на две части. Знакоопределенность каждой из функций сохраняется на половине соответствующего эллипса, либо в оставшейся части плоскости. Вне эллипса при переходе через прямую Γ_* знак не меняется.*

Главным объектом для анализа устойчивости является половина внутренности эллипса $\mathcal{E}_1^{+}$ в полуплоскости $\{\operatorname{Re}\mu > -\frac{1}{2}\delta\}$, в которой $\operatorname{Re}\lambda_1^{+}(\mu) < 0$. Вторая область состоит из внешности другого полуэллипса $\mathcal{E}_0^{+}$, где $\operatorname{Re}\lambda_0^{+}(\mu) > 0$, рис.3. Пересечение этих областей представляет собой слой между двумя полуэллипсами, если $4\delta f'(0) < 1$, рис.4. В случае $4\delta f'(0) > 1$ эта область совпадает с внутренностью полуэллипса $\mathcal{E}_1^{+}$.

Замечание 3.2. *В случае уравнения КПП, когда $\delta = 0$, линии $\Gamma_{0,1}$ состоят из парабол*

$$\frac{1}{\gamma^2}(\operatorname{Im}\mu)^2 + f' + \operatorname{Re}\mu = 0.$$

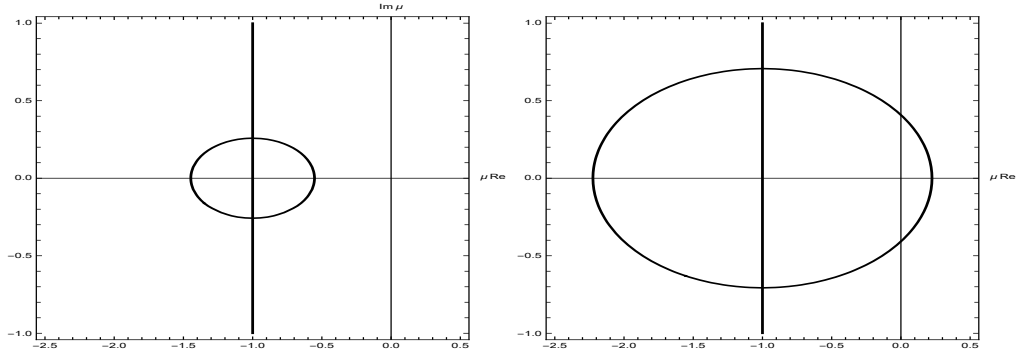


Рис. 2. Линии нулей действительнаой части показателей $\operatorname{Re}\lambda_0^{\pm}(\mu)$, и $\operatorname{Re}\lambda_1^{\pm}(\mu)$ на комплексной плоскости $\mu \in \mathbb{C}$ в случае $4\delta f'(0) < 1$

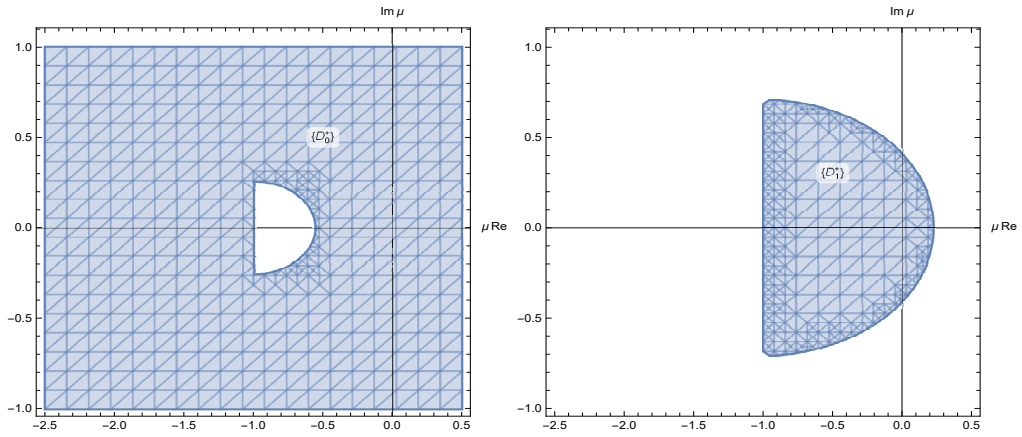


Рис. 3. Области знакоопределенности действительной части показателей: $\operatorname{Re}\mu_1^{+}(\mu) < 0$, $\operatorname{Re}\mu_0^{+}(\mu) > 0$ на комплексной плоскости $\mu \in \mathbb{C}$

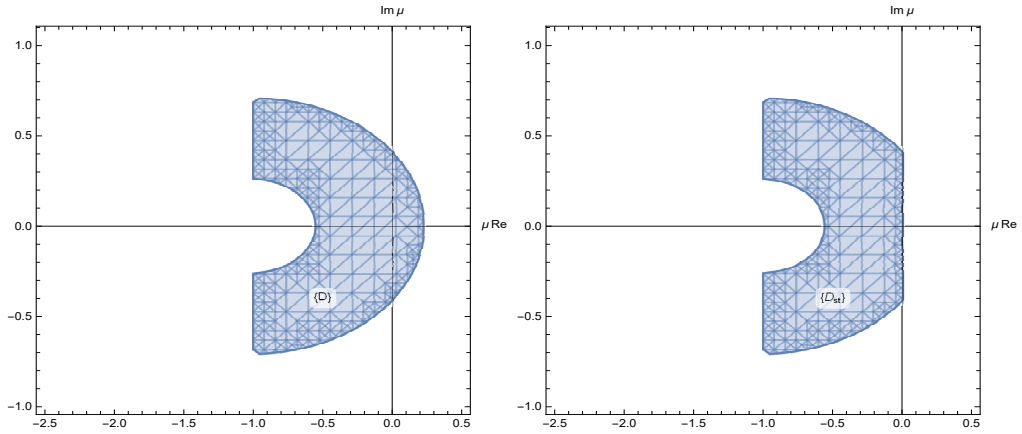


Рис. 4. Область точечного спектра и область спектра устойчивых возмущений на комплексной плоскости $\mu \in \mathbb{C}$

Для формального доказательства разрешимости спектральной задачи надо установить некоторые соотношения между действительными частями разных показателей. Эти соотношения устанавливаются в общем случае в комплексной плоскости $\mu \in \mathbb{C}$. Они аналогичны тем, что усматриваются из графиков на рис. 1 для случая действительных μ.

Лемма 3.2. *Пусть выполнены условия* (1.2) *и* (2.3). *Показатели обладают свойством* $\operatorname{Re}\lambda_{0,1}^{+}(\mu) \geqslant \operatorname{Re}\lambda_{0,1}^{-}(\mu)$ *всюду в комплексной плоскости* $\mu \in \mathbb{C}$.

Доказательство. Для $\mu \in \mathbb{R}$ на действительной оси неравенство очевидно ввиду формул (3.7). В оставшейся части комплексной плоскости для разности показателей имеем выражение:

$$\lambda_{0,1}^{+}(\mu) - \lambda_{0,1}^{-}(\mu) = \sqrt{(1+2\delta\mu)^2\Big(\gamma^2 + \frac{1}{\delta}\Big) + \Big(4f'(0) - \frac{1}{\delta}\Big)}.$$

Предположим, что при некотором $\mu \in \mathbb{C}$ действительная часть разности равна нулю: $\operatorname{Re}(\lambda_{0,1}^{+}(\mu) - \lambda_{0,1}^{-}(\mu)) = 0$. Тогда эта разность будет чисто мнимой величиной. Это возможно, если подкоренное выражение является действительной отрицательной величиной:

$$(1+2\delta\mu)^2\Big(\gamma^2 + \frac{1}{\delta}\Big) + \Big(4f'(0) - \frac{1}{\delta}\Big) < 0.$$

Но такое возможно лишь при $1 + 2\delta \operatorname{Re}\mu = 0$, либо при $\operatorname{Im}\mu = 0$. Однако первое соотношение соответствует граничным точкам $\Gamma_{0,1}$ в которых $\operatorname{Re}\lambda_{0,1}^{\pm}(\mu) = 0$. Второе соотношение соответствует рассмотренному случаю действительной оси. Таким образом, неравенство $\operatorname{Re}\lambda_{0,1}^{+}(\mu) \geqslant \operatorname{Re}\lambda_{0,1}^{-}(\mu)$, имеющее место на действительной оси рис.1, сохраняется в области, $\mu \in D_0^-$. □

Лемма 3.3. *Пусть выполнены условия (1.2) и (2.3). Тогда всюду в комплексной плоскости $\mu \in \mathbb{C}$ показатели обладают свойством:*

$$\operatorname{Re}\lambda_1^{+}(\mu) \leqslant \operatorname{Re}\lambda_0^{+}(\mu), \qquad \operatorname{Re}\lambda_0^{-}(\mu) \leqslant \operatorname{Re}\lambda_1^{-}(\mu).$$

Доказательство. Формулы для показателей (3.7) отличаются лишь действительной частью подкоренного выражения

$$(1+2\delta\mu)^2\Big(\gamma^2 + \frac{1}{\delta}\Big) + \Big(4f'(0) - \frac{1}{\delta}\Big)$$

из-за различий в производных: $f' = f'(0)$ либо $f' = f'(1)$. Поскольку $f'(1) < 0 < f'(0)$, то для действительных частей имеют место соответствующее неравенство. Подобное неравенство сохраняется для действительной части после извлечения квадратного корня (на подходящей ветви)

$$\operatorname{Re}\sqrt{(1+2\delta\mu)^2\Big(\gamma^2 + \frac{1}{\delta}\Big) + \Big(4f'(1) - \frac{1}{\delta}\Big)} \leqslant \operatorname{Re}\sqrt{(1+2\delta\mu)^2\Big(\gamma^2 + \frac{1}{\delta}\Big) + \Big(4f'(0) - \frac{1}{\delta}\Big)}.$$

С учетом формул (3.7) лемма доказана. □

Теорема 3.1. *Пусть выполнены условия (1.2) и (2.3). Если параметр μ принадлежит непустому пересечению областей*

$$\mu \in D = D_0^+ \cap D_1^+,$$

то для уравнения (3.4) краевая задача (3.5) разрешима. Область D, называемая далее «область точечного спектра», в случае $4\delta f'(0) < 1$ представляет собой слой, заключенный между двумя эллипсами $\mathcal{E}_{0,1}$ в полуплоскости $\operatorname{Re}(\mu) > -\frac{1}{2}\delta$. В случае $4\delta f'(0) \geqslant 1$ эллипс $\mathcal{E}_0$ отсутствует.

Доказательство. Рассматриваемая область параметра μ соответствует условию $\mu \in D_0^+$. Поэтому $\operatorname{Re}\lambda_0^{+}(\mu) > 0$. Кроме того, μ принадлежит области D_1^+. Поэтому $\operatorname{Re}\lambda_1^{+}(\mu) < 0$, см. рис. 3. Уравнение (3.4) имеет два линейно независимых решения, которые можно идентифицировать показателями $\lambda_{0,1}^{\pm}(\mu)$. Для наших целей подходит решение, которое определяется асимптотикой при $s \to -\infty$ с показателем $\lambda_0^{+}(\mu) > 0$. Обозначим его $\phi_{-}(s;\mu)$; оно стремится к нулю при $s \to -\infty$. Такое решение представимо в виде линейной комбинации решений, которые определяются асимптотикой на плюс бесконечности с показателями $\lambda_1^{\pm}(\mu)$. Поскольку параметр μ принадлежит области D_1^+, рис. 3, то с учетом леммы 3.3

действительная часть обоих показателей $\operatorname{Re}\lambda_1^{\pm}(\mu) < 0$ отрицательна. Следовательно каждое из этих решений стремится к нулю при $s \to +\infty$. Поэтому стремится к нулю и их линейная комбинация, каковой представляется функция $\phi_-(s;\mu) \to 0,\ s \to +\infty$.

Может случиться, что существуют значения μ, при которых оба показателя $\operatorname{Re}\lambda_0^{\pm}(\mu) > 0$ положительны, см. рис.1 В таком случае любое решение стремится к нулю при $s \to -\infty$. Однако, в силу лемм 3.2 и 3.3

$$0 < \operatorname{Re}\lambda_0^-(\mu) \leqslant \operatorname{Re}\lambda_1^-(\mu) \leqslant \operatorname{Re}\lambda_1^+(\mu)$$

оба показателя в асимптотике на плюс бесконечности будут положительны. Такое решение растет при $s \to +\infty$, и поэтому это значения μ не принадлежит спектру. □

Замечание 3.3. *В случае уравнения КПП, когда $\delta = 0$, область точечного спектра D состоят из слоя между двумя параболами:*

$$-f'(0) < \frac{1}{\gamma^2}(\operatorname{Im}\mu)^2 + \operatorname{Re}\mu < -f'(1).$$

Замечание 3.4. *При исключительных μ асимптотика решения $\phi_-(s;\mu)$ при $s \to +\infty$ содержит только быстро убывающую экспоненту, показатель которой $\lambda_1^-(\mu)$. В таком случае задача редуцируется к самосопряженной, и поэтому μ обязано быть действительным собственным значением.*

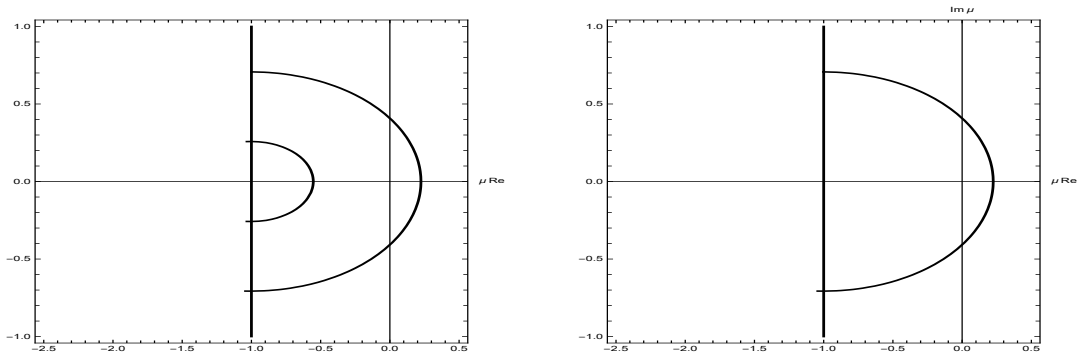


Рис. 5. Линия непрерывного спектра на комплексной области $\mu \in \mathbb{C}$ в случае $4f'(0)\delta < 1$ и в случае $4f'(0)\delta \geqslant 1$

3.5. Непрерывный спектр. Если спектральный параметр находится на границе области точечного спектра $\mu \in \partial D$, то для решений $\phi(s;\mu)$ уравнения (3.4) краевые условия (3.5) при $s \to \pm\infty$ не выполняются. Причиной этого является обращение в нуль действительной части одного из показателей, которые обеспечивали убывание на бесконечности. При таких $\mu \in \partial D$ имеют место: либо $\operatorname{Re}\lambda_0^+(\mu) = 0$, либо $\operatorname{Re}\lambda_1^+(\mu) = 0$. Вместо убывания на бесконечности при $s \to \pm\infty$ обнаруживаются осцилляции, обязанные ненулевой мнимой части показателей. Такое решение линеаризованного уравнения (3.1) не удовлетворяет краевому условию (3.2) и потому не ассоциируется с устойчивостью исходной волны $\Phi(s)$. Тем не менее, интеграл по набору таких функций (по параметру μ) может убывать при $s \to \pm\infty$. Такой эффект усреднения осциллирующих функций лежит в основе использования преобразования Фурье. Соответствующее множество параметра μ связывается с понятием непрерывного спектра.

В рассматриваемой задаче под непрерывным спектром понимается множество $\Gamma \subset \mathbb{C}$, которое складывается из границы области точечного спектра ∂D и примыкающих к ней лучей на прямой $\Gamma_* = \left\{\mu :\ \operatorname{Re}\mu = -\frac{1}{2}\delta\right\}$. Эту линию можно определить соотношением

$$\Gamma = \{\mu \in \mathbb{C} :\ \operatorname{Re}\lambda_0^+(\mu) = 0\} \cup \{\mu \in \mathbb{C} :\ \operatorname{Re}\lambda_1^+(\mu) = 0\}.$$

Она состоит из правых ветвей эллипсов (обозначим их $\mathcal{E}^+_{0,1}$) и прямой Γ_*, рис. 5. Напомним, что на этой прямой показатели обладают свойством $\operatorname{Re}\lambda^\pm_{0,1}(\mu) = 0$, если $4\delta f'(0) < 1$. В случае $4\delta f'(0) \geqslant 1$ имеется промежуток $I_* = \{\mu \in \Gamma_* : |\operatorname{Im}\mu| < \mu_*\}$, на котором $\operatorname{Re}\lambda^+_0(\mu) > 0$

$$\mu_* = \frac{1}{2\delta}\sqrt{\frac{4\delta f'(0) - 1}{\gamma^2\delta + 1}}.$$

На разных компонентах непрерывного спектра спектральная задача (3.4), (3.5) имеет решения с разной асимптотикой на бесконечности.

Теорема 3.2. *Пусть выполнены условия* (1.2) *и* (2.3).

1. *В случае* $4\delta f'(0) < 1$ *при* $\mu \in \Gamma_*$ *уравнение* (3.4) *имеет два линейно независимых решения* $\phi_\pm(s;\mu)$, *каждое из которых осциллирует на обеих бесконечностях* $s \to \pm\infty$.
2. *В случае* $4\delta f'(0) \geqslant 1$ *для* μ *на отрезке* $|\operatorname{Im}\mu| < \mu_*$ *существует не больше одного ограниченного решения, которое при* $s \to -\infty$ *экспоненциально убывает, а при* $s \to +\infty$ *осциллирует.*
3. *На оставшейся части непрерывного спектра (на правых ветвях эллипсов) для* $\mu \in \mathcal{E}^+_{0,1}$ *существует одно ограниченное решение, которое на одной бесконечности (при* $s \to \mp\infty$*) осциллируют, а на другой бесконечности (при* $s \to \pm\infty$*) экспоненциально убывает.*
4. *Экспоненциальное убывание на обеих бесконечностях может быть лишь при* $\mu = \mu^+_{0,1}$ *на действительной оси, в нулях показателей* $\lambda^+_{0,1}(\mu)$, *когда эти точки принадлежат дискретному спектру задачи, приведенной к самосопряженной форме.*

Доказательство. Если $4\delta f'(0) < 1$, то для $\mu \in \Gamma_*$ все показатели $\lambda^\pm_{0,1}(\mu)$ чисто мнимые, поскольку прямая Γ_* — часть линий нулей $\Gamma_{0,1}$. Поэтому любая пара линейно независимых решений уравнения (3.4) осциллирует на бесконечностях $s \to \pm\infty$.

В случае $4\delta f'(0) \geqslant 1$ меняется линия нулей Γ_0. Теперь отрезок I_* не пересекается с Γ_0 и входит в область знакоопределенности $I_* \subset D^+_0$. Поэтому один из показателей имеет $\operatorname{Re}\lambda^+_0(\mu) > 0$. Второй показатель либо имеет $\operatorname{Re}\lambda^-_0(\mu) < 0$, либо $\operatorname{Re}\lambda^-_0(\mu) > 0$ и тогда спектральная задаче не разрешима, как показано в предыдущей теореме. Поэтому существует не больше одного линейно независимого ограниченного решения $\phi_-(s;\mu)$ которое будет экспоненциально убывать при $s \to -\infty$. В асимптотике на другой бесконечности при $s \to +\infty$ отрезок I_* остается на линии нулей $I_* \subset \Gamma_* \subset \Gamma_1$, так что оба показателя $\operatorname{Re}\lambda^\pm_1(\mu) = 0$. Поэтому решение $\phi_-(s;\mu)$ осциллирует при $s \to +\infty$.

Похожая ситуация имеет место на правой ветви эллипса $\mu \in \mathcal{E}^+_1$. Здесь решение $\phi_-(s;\mu)$ экспоненциально убывает при $s \to -\infty$, поскольку эта ветвь лежит в области D^+_0, где $\operatorname{Re}\lambda^+_0(\mu) > 0$. В асимптотике на другой бесконечности один показатель имеет $\operatorname{Re}\lambda^+_1(\mu) = 0$, второй имеет оценку в силу леммы 3.3 $\operatorname{Re}\lambda^+_1(\mu) \leqslant 0$. Поэтому в общем случае решение $\phi_-(s;\mu)$ осциллирует при $s \to +\infty$. Экспоненциальное убывание этого (либо линейно независимого) решения при $s \to +\infty$ с показателем $\operatorname{Re}\lambda^-_1(\mu) < 0$ возможно при некотором μ. Но тогда задача сводится к самосопряженной, так что параметр μ (взятый на эллипсе) должен быть действительным $\mu = \mu^+_1 \in \mathbb{R}$ и совпадать с собственным значением.

Когда параметр принадлежит правой ветви другого эллипса $\mu \in \mathcal{E}^+_0$, выбирается решение $\phi_-(s;\mu)$, осциллирующее при $s \to -\infty$. На другой бесконечности при $s \to -\infty$ это решение экспоненциально убывает, поскольку эллипс $\mathcal{E}^+_0 \subset D^+_1$ лежит в области, где $\operatorname{Re}\lambda^+_1(\mu) < 0$. Так же, как в предыдущем пункте, при $\mu = \mu^+_0 \in \mathbb{R}$ может существовать дополнительное решение, если μ^+_0 является собственным значением задачи, приведенной к самосопряженной форме. □

Замечание 3.5. *В случае уравнения КПП, когда* $\delta = 0$, *непрерывный спектр состоит из двух парабол*

$$\frac{1}{\gamma^2}(\operatorname{Im}\mu)^2 + \operatorname{Re}\mu + f' = 0; \qquad f' = f'(0), \quad \textit{либо} \quad f' = f'(1).$$

4. Приложение к устойчивости бегущей волны

Функция, построенная на основе решения спектральной задачи (3.4), (3.5):

$$u(x,t;\mu) = \phi_-(s;\mu)\exp(\mu\, t), \qquad \mu \in D, \qquad s = \frac{x - Vt}{\sqrt{\delta V^2 - 1}}$$

является решением краевой задачи (3.1), (3.2) для поправки в линейном приближении. Решение определяется с точностью до постоянного множителя. Если параметр μ принадлежит подобласти точечного спектра в левой полуплоскости $\mu \in D_{st} := D \cap \{\mu < 0\}$, рис. 4, то поправка экспоненциально мала при $t \to \infty$. Тем самым определяется частный набор начальных возмущений (3.3), в виде пары согласованных между собой функций:

$$u_0(x;\mu) = \phi_-(x;\mu), \qquad u_1(x;\mu) = \mu\,\phi_-(x;\mu) - \gamma\,\partial_x\phi_-(x;\mu),$$

относительно которых устойчива исходная волна $\Phi(s)$. Эти функции экспоненциально убывают при $x \to \pm\infty$.

Ввиду линейности задачи (3.1), (3.2) линейная комбинация решений, взятых при разных μ, обладает тем же свойством. Такие комбинации представляются рядами и интегралами вида:

$$u(x,t) = \sum_n \hat{u}(\mu_n)\,\phi_-(s;\mu_n)\exp(\mu_n\, t); \qquad u(x,t) = \int\limits_{\mathcal{L}} \hat{u}(\mu)\,\phi_-(s;\mu)\exp(\mu\, t)\,d\mu.$$

Коэффициенты $\hat{u}(\mu)$ выбираются достаточно гладкими, чтобы обеспечить гладкость и убывание на бесконечности, получаемых решений. Путем сужения множества $\mathcal{L}$ можно контролировать скорость убывания при $t \to \infty$.

Таким образом, начальные возмущения, относительно которых волна устойчива, описываются рядами либо интегралами вида:

$$u_0(x) = \int\limits_{\mathcal{L}} \hat{u}(\mu)\,\phi_-(x;\mu)\,d\mu, \qquad u_1(x) = \int\limits_{\mathcal{L}} \hat{u}(\mu)[\mu\,\phi_-(x;\mu) - \gamma\,\partial_x\phi_-(x;\mu)]\,d\mu. \tag{4.1}$$

В качестве $\mathcal{L}$ может быть взята гладкая линия (либо подобласть) в области устойчивости точечного спектра D_{st}.

Введем класс функций $\mathcal{N}_\gamma$ которые имеют разложение (4.1). Заметим, что от параметра γ зависит как исходная волна $\Phi(s)$ так и базис $\phi_-(s;\mu)$. Итогом этих построений является

Предложение 4.1. *Пусть выполнены условия* (1.2) *и* (2.3). *Тогда бегущая волна с параметром* γ *устойчива по начальным возмущениям из класса* $\mathcal{N}_\gamma$.

Похожие конструкции выполняются на непрерывном спектре. Здесь вводится класс функций $\mathcal{M}_\gamma$ через интегралы по линии Γ. В качестве базиса берется пара линейно независимых решений спектральной задачи, описанная теореме 3.2. Одна из этих функций $\phi_-(s;\mu)$ используется на всей линии $\mu \in \Gamma$. Вторая функция $\phi_+(s;\mu)$ используется только на прямой Γ_*. Решение линеаризованной задачи (3.1), (3.2) выписывается через интегралы

$$u(x,t) = \int\limits_{\Gamma} \hat{u}^-(\mu)\phi_-(s;\mu)\exp(\mu t)\,d\mu + \int\limits_{\Gamma_*} \hat{u}^+(\mu)\phi_+(s;\mu)\exp(\mu t)\,d\mu. \tag{4.2}$$

с весовыми функциями $\hat{u}^{\pm}(\mu)$. Если интеграл берется на части спектра $\Gamma_{st} = \{\mu \in \Gamma : \ \mathrm{Re}\,\mu < 0\}$, рис. 5, то решение стремится к нулю при $t \to \infty$. Значения при $t = 0$ определяют класс начальных данных $\mathcal{M}_\gamma$, относительно которых волна устойчива. Для этого класса имеет место аналог Предложения 4.1.

Замечание 4.1. *Использование базиса $\phi_{\pm}(s;\mu)$ на основе решений уравнения (3.4) дает исчерпывающее описание множества начальных возмущений, относительно которых бегущая волна устойчива. Однако это описание остается малоэффективным. Неэффективность связана с происхождением базиса из спектральной задачи для несамосопряженного уравнения. Его невозможно использовать для обращения формул разложения (4.2) в отличии, например, от разложения Фурье. Для функций из классов $\mathcal{N}_\gamma$, $\mathcal{M}_\gamma$ отсутствует описание в привычных терминах гладкости и асимптотики на бесконечности. Некоторое представление о классе устойчивых возмущений можно получить из численных экспериментов* [12].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. В.Г. Барьяхтар, Б.А. Иванов, М.В. Четкин. *Динамика доменных границ в слабых ферромагнетиках* // Усп. физ. наук **146**, 417–458 (1985).
2. А.К. Звездин. *О динамике доменных границ в слабых ферромагнетиках* // Письма в ЖЭТФ **29**:10, 605–610 (1979).
3. Л.А. Калякин. *Асимптотика выхода на волну, бегущую из седла в узел* // Усп. мат. наук **80**:3(483), 67–112 (2025).
4. Л.А. Калякин. *Асимптотика выхода на бегущую волну решения уравнения КПП* // Теор. мат. физ. **223**:1, 39–55 (2025).
5. Л.А. Калякин. *Устойчивость бегущей волны на траектории седло-узел* // Мат. заметки **115**:6, 862–878 (2024).
6. А.Н. Колмогоров, И.Г. Петровский, Н.С. Пискунов. *Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием вещества, и его применение к одной биологической проблеме* // Бюл. МГУ. Матем., мех. **1**:6, 1–25 (1937).
7. В.П. Маслов, В.Г. Данилов, К.А. Волосов. *Математическое моделирование процессов тепломассопереноса*. М.: Наука (1987).
8. В.В. Немыцкий, В.В. Степанов. *Качественная теория дифференциальных уравнений*. М.-Л.: ОГИЗ (1947).
9. М.В. Федорюк. *Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений*. М.: Наука (1983).
10. U. Ebert, W. van Saarloos. *Front propagation into unstable states: Universal algebraic convergence towards uniformly translating pulled fronts* // Physica D **146**:1-4, 1–99 (2000).
11. D.D. Joseph, L. Preziosi. *Heat waves* // Rev. Mod. Phys. **61**:1, 47–71 (1989).
12. L.A. Kalyakin. *Achieving a Travelling Wave in a Hyperbolic Equation* // Russ. J. Math. Phys. **32**:4, 704–712 (2025).
13. K. Uchiyama. *The behavior of solutions of some non-linear diffusion equations for large time* // Kyoto J. Math. **8**:3, 453–508 (1978).
14. A.I. Volpert, V.A. Volpert, V.A. Volpert. *Traveling Wave Solutions of Parabolic Systems*. Providence, RI: Amer. Math. Soc. (1994).

Леонид Анатольевич Калякин,
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН,
Чернышевского, 112,
450008, Уфа, Россия
E-mail: klenru@mail.ru