ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 18 № 4 (2026). С. 56-74.

УДК 517.955.8

ОБ АСИМПТОТИКЕ ОСНОВНЫХ СОСТОЯНИЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ $-\varepsilon\Delta_p u = a|u|^{q-2}u - b|u|^{\gamma-2}u$

Я.Ш. ИЛЬЯСОВ, Э.И. ТУРЬЯНОВА

Аннотация. В работе исследуется сингулярно возмущённая краевая задача Дирихле для уравнения

$$-\varepsilon\Delta_p u = a(x)|u|^{q-2}u - b(x)|u|^{\gamma-2}u,$$

где Δ_p — p-лапласиан, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — ограниченная область, $1 < p < q < \gamma < p^*$, $a, b \in L^\infty(\Omega)$, $a(x) \geqslant 0$, $b(x) \geqslant \sigma_b > 0$, а $\varepsilon > 0$ — малый параметр.

С помощью метода нелинейного отношения Рэлея вводятся два критических значения параметра, ε^* и ε_e^*, связанные соответственно с многообразием Нехари и нулевым уровнем энергии. Доказывается, что при $\varepsilon > \varepsilon^*$ задача не имеет нетривиальных слабых решений, тогда как при $0 < \varepsilon < \varepsilon_e^*$ существуют по крайней мере два положительных слабых решения. Одно из них является основным состоянием.

Основной асимптотический результат описывает поведение основных состояний при сингулярном пределе $\varepsilon \to 0^+$. При дополнительном условии $a(x) \geqslant \sigma_a > 0$ доказано, что любое семейство основных состояний u_ε сходится по мере в Ω к явно заданной предельной функции

$$\bar{u}_0(x) = \left(\frac{a(x)}{b(x)}\right)^{\frac{1}{\gamma-q}}.$$

Более того, $u_\varepsilon \to \bar{u}_0$ сильно в $L^r(\Omega)$, $1 \leqslant r < \gamma$, и $u_\varepsilon \rightharpoonup \bar{u}_0$ слабо в $L^\gamma(\Omega)$.

Ключевые слова: отношение Рэлея, многообразие Нехари, основное состояние, сингулярное возмущение, p-лапласиан.

Mathematics Subject Classification: 35J61, 35J20, 35J70, 35D30

1. Введение

В данной работе рассматривается следующая краевая задача Дирихле с малым параметром $\varepsilon > 0$:

$$\begin{cases} -\varepsilon\Delta_p u = a(x)|u|^{q-2}u - b(x)|u|^{\gamma-2}u, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.1}$$

Здесь

$$\Delta_p u = \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right)$$

— p-лапласиан, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — ограниченная область, $1 < p < q < \gamma < p^*$, где

$$p^* = \begin{cases} \dfrac{pN}{N-p}, & \text{если } p < N, \\ +\infty, & \text{если } p \geqslant N. \end{cases}$$

Y.S. Il'yasov, E.I. Tur'yanova, On the asymptotics of ground states for a boundary value problem for the equation $-\varepsilon\Delta_p u = a|u|^{q-2}u - b|u|^{\gamma-2}u$.

© Ильясов Я.Ш., Турьянова Э.И. 2026.

Поступила 31 января 2026 г.

Предполагается, что

$$a, b \in L^\infty(\Omega), \qquad a(x) \geqslant 0, \qquad b(x) \geqslant \sigma_b > 0 \quad \text{для п.в. } x \in \Omega, \tag{1.2}$$

где $\sigma_b > 0$ — некоторая постоянная. Кроме того, всюду ниже предполагается, что $a \not\equiv 0$.

Функция $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ называется *слабым решением* задачи (1.1), если она является критической точкой функционала энергии

$$\Phi_\varepsilon(u) = \frac{\varepsilon}{p} \int\limits_\Omega |\nabla u|^p \, dx - \frac{1}{q} \int\limits_\Omega a|u|^q \, dx + \frac{1}{\gamma} \int\limits_\Omega b|u|^\gamma \, dx. \tag{1.3}$$

Здесь $W_0^{1,p} := W_0^{1,p}(\Omega)$ — замыкание $C_0^\infty(\Omega)$ в пространстве Соболева $W^{1,p}(\Omega)$. Слабое решение $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ называется *основным состоянием* функционала Φ_ε, если

$$\Phi_\varepsilon(u) \leqslant \Phi_\varepsilon(w)$$

для любого слабого решения $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$ задачи (1.1).

Задача (1.1) является сингулярно возмущённой: при $\varepsilon \to 0^+$ порядок уравнения в пределе понижается, и это может приводить к появлению пограничных слоёв в окрестности $\partial\Omega$. Действительно, в одномерном случае при $p = 2$, $a = b = 1$ задача принимает вид

$$\begin{cases} -\varepsilon u''(x) = u^{q-1}(x) - u^{\gamma-1}(x), & x \in (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{1.4}$$

Формальный метод согласованных асимптотических разложений (см., например, [1], [28]) приводит к приближению

$$u(x) \sim U\left(\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + U\left(\frac{1-x}{\sqrt{\varepsilon}}\right) - 1, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

где профиль пограничного слоя U определяется задачей

$$-U'' = U^{q-1} - U^{\gamma-1}, \qquad U(0) = 0, \qquad U(+\infty) = 1.$$

Этот профиль допускает интегральное представление

$$\int\limits_0^{U(\xi)} \frac{dt}{\sqrt{2\left(\frac{t^\gamma}{\gamma} - \frac{t^q}{q} + \frac{1}{q} - \frac{1}{\gamma}\right)}} = \xi.$$

Такое приближение согласуется с граничными условиями в главном порядке: внутри области оба аргумента $\dfrac{x}{\sqrt{\varepsilon}}$ и $\dfrac{(1-x)}{\sqrt{\varepsilon}}$ велики, поэтому $U \approx 1$ и $u(x) \approx 1$, тогда как около концов интервала соответствующий пограничный профиль обеспечивает переход к нулевому значению на границе.

Обобщение такого описания на многомерные области, особенно в случае несимметричной геометрии или переменных коэффициентов, представляет собой существенную математическую трудность. В то же время сингулярно возмущённые нелинейные краевые задачи остаются важным объектом современного анализа в связи с многочисленными приложениями. Они возникают, в частности, в теории популяций, моделях распространения инфекций, теории управления, механике материалов с памятью, оптике, физиологических моделях, а также в системах типа «хищник–жертва»; см., например, [25], [27], [31], [35]. Близкие классы параметрических эллиптических задач, включая задачи с концентрацией решений при критических значениях параметров, активно изучались в работах [4], [5], [7], [14], [15], [19], [26], [29], [33], [24].

Параметрические эллиптические задачи с конкурирующими степенными нелинейностями изучались в нескольких направлениях. Классическая линия исследований восходит к

работе Ambrosetti, Brezis and Cerami [3], где для полулинейных задач с concave–convex нелинейностью были получены пороговые результаты существования, множественности и несуществования положительных решений. Для квазилинейных p-лапласовых задач аналогичные вопросы изучались, в частности, в [10], [18], [8]; см. также [11], [2], [30] для связанных вариационных и бифуркационных подходов. Рассматриваемая ниже задача имеет, однако, иной характер. В отличие от стандартной concave–convex постановки $1 < q < p < r$ с правой частью вида $\lambda u^{q-1} + u^{r-1}$, здесь предполагается

$$1 < p < q < \gamma < p^*$$

и правая часть содержит два конкурирующих сверхлинейных члена с разными знаками:

$$a(x)|u|^{q-2}u - b(x)|u|^{\gamma-2}u.$$

Поэтому естественный предельный режим связан не с концентрацией положительных решений, а с балансом двух нелинейных членов.

Главная цель настоящей работы состоит в том, чтобы описать этот сингулярный предел для основных состояний и показать, что при $a \geqslant \sigma_a > 0$ они выбирают явный распределённый предельный профиль

$$\bar{u}_0(x) = \left(\frac{a(x)}{b(x)}\right)^{\frac{1}{(\gamma-q)}}.$$

В настоящей работе задача (1.1) исследуется с помощью метода нелинейного отношения Рэлея, развитого в работах [21], [23]. Применение этого метода к параметру ε приводит к следующему нелинейному обобщённому отношению Рэлея:

$$\Upsilon(u) := \frac{\left(\int\limits_\Omega a|u|^q\,dx\right)^{\frac{\gamma-p}{\gamma-q}}}{\int\limits_\Omega |\nabla u|^p\,dx \left(\int\limits_\Omega b|u|^\gamma\,dx\right)^{\frac{q-p}{\gamma-q}}}.$$

Поскольку в общей постановке предполагается лишь $a \geqslant 0$, возможны ненулевые функции $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, для которых

$$\int\limits_\Omega a|u|^q\,dx = 0.$$

Поэтому экстремальные величины естественно задаются на множестве

$$\mathcal{D} := \left\{ u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\} : \int\limits_\Omega a|u|^q\,dx > 0 \right\}.$$

В дальнейшем Υ рассматривается на $\mathcal{D}$.

С этим отношением связаны два экстремальных значения параметра:

$$\varepsilon^* = c_{p,q,\gamma} \sup_{u\in\mathcal{D}} \Upsilon(u), \qquad \varepsilon_e^* = c_{e,p,q,\gamma} \sup_{u\in\mathcal{D}} \Upsilon(u),$$

где

$$c_{p,q,\gamma} = \frac{\gamma-q}{\gamma-p}\left(\frac{q-p}{\gamma-p}\right)^{\frac{q-p}{\gamma-q}}, \qquad c_{e,p,q,\gamma} = \frac{p(\gamma-q)}{q(\gamma-p)}\left(\frac{\gamma(q-p)}{q(\gamma-p)}\right)^{\frac{q-p}{\gamma-q}}. \tag{1.5}$$

При этом

$$0 < \varepsilon_e^* < \varepsilon^* < +\infty.$$

Первый основной результат описывает существование и несуществование положительных решений задачи (1.1) в зависимости от параметра ε.

Теорема 1.1. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — ограниченная область, $1 < p < q < \gamma < p^*$, и выполнены условия (1.2). Тогда справедливы следующие утверждения.*

(1) *Если $\varepsilon > \varepsilon^*$, то задача (1.1) не имеет нетривиальных слабых решений в $W_0^{1,p}(\Omega)$.*

(2) *При каждом $0 < \varepsilon < \varepsilon_e^*$ задача (1.1) имеет слабое положительное решение*

$$u_\varepsilon \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Более того,

(i) *u_ε является основным состоянием;*

(ii)

$$\Phi_\varepsilon(u_\varepsilon) < 0, \qquad \frac{d^2}{dt^2}\Phi_\varepsilon(tu_\varepsilon)\Big|_{t=1} > 0;$$

(iii) *$u_\varepsilon \in C^{1,\kappa}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ для некоторого $\kappa \in (0,1)$.*

(3) *При каждом $0 < \varepsilon < \varepsilon_e^*$ задача (1.1) имеет второе слабое положительное решение*

$$v_\varepsilon \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

При этом

$$\Phi_\varepsilon(v_\varepsilon) > 0, \qquad v_\varepsilon \in C^{1,\kappa}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$$

для некоторого $\kappa \in (0,1)$.

Следствие 1.1 (Классический случай $p = 2$)**.** *Пусть $p = 2$, $\partial\Omega$ класса $C^{2,\alpha}$, и $a, b \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ для некоторого $\alpha \in (0,1)$, причём выполнены условия (1.2). Тогда положительные слабые решения u_ε и v_ε, полученные в теореме 1.1, являются классическими решениями задачи (1.1). В частности,*

$$u_\varepsilon,\ v_\varepsilon \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}).$$

Следующий результат описывает асимптотическое поведение основных состояний при $\varepsilon \to 0^+$.

Теорема 1.2. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — ограниченная область, $1 < p < q < \gamma < p^*$, выполнены условия (1.2), и существует константа $\sigma_a > 0$ такая, что*

$$a(x) \geqslant \sigma_a \quad \text{для п.в. } x \in \Omega.$$

Пусть u_ε — любое семейство основных состояний задачи (1.1), $0 < \varepsilon < \varepsilon_e^*$. Тогда при $\varepsilon \to 0^+$

$$u_\varepsilon \to \bar{u}_0 \quad \text{по мере в } \Omega,$$

где

$$\bar{u}_0(x) = \left(\frac{a(x)}{b(x)}\right)^{\frac{1}{(\gamma-q)}} \quad \text{для п.в. } x \in \Omega. \tag{1.6}$$

Более того,

$$u_\varepsilon - \bar{u}_0 \to 0 \quad \text{сильно в } L^r(\Omega), \qquad 1 \leqslant r < \gamma, \tag{1.7}$$

и

$$u_\varepsilon - \bar{u}_0 \rightharpoonup 0 \quad \text{слабо в } L^\gamma(\Omega).$$

Предельная функция $\bar{u}_0$ удовлетворяет предельному уравнению

$$a(x)\bar{u}_0^{q-1}(x) - b(x)\bar{u}_0^{\gamma-1}(x) = 0 \quad \text{для п.в. } x \in \Omega.$$

Простым масштабированием $u \mapsto tu$ задача (1.1) при $\varepsilon > 0$ приводится к одному из следующих видов:

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda a|u|^{q-2}u - b|u|^{\gamma-2}u, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.8}$$

и

$$\begin{cases} -\Delta_p u = a|u|^{q-2}u - \nu b|u|^{\gamma-2}u, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.9}$$

где $\lambda, \nu > 0$.

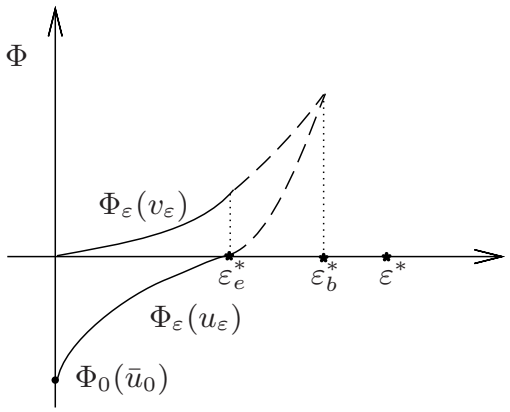


Рис. 1. Эскиз графика уровней энергии ветвей положительных решений до точки ε_e^*, с добавлением ожидаемого поведения (пунктирные линии) и указанием предполагаемой точки бифуркации ε_b^*

Эти задачи взаимно однозначно соответствуют задаче (1.1) при положительных значениях параметров. А именно, если $u_\varepsilon \in W_0^{1,p}(\Omega)$ является слабым решением (1.1), то функции

$$u_\lambda := \varepsilon^{-\frac{1}{(\gamma-p)}} u_\varepsilon, \qquad \lambda = \varepsilon^{-\frac{(\gamma-q)}{(\gamma-p)}}, \tag{1.10}$$

$$u_\nu := \varepsilon^{-\frac{1}{(q-p)}} u_\varepsilon, \qquad \nu = \varepsilon^{\frac{(\gamma-q)}{(q-p)}} \tag{1.11}$$

являются слабыми решениями задач (1.8) и (1.9) соответственно. Обратные преобразования имеют вид

$$u_\varepsilon = \lambda^{-\frac{1}{(\gamma-q)}} u_\lambda, \qquad u_\varepsilon = \nu^{\frac{1}{(\gamma-q)}} u_\nu.$$

Отсюда и из теорем 1.1 и 1.2 получаем следующее утверждение.

Следствие 1.2. *Пусть выполнены условия теоремы 1.1. Тогда:*

(1) *Задачи (1.8) и (1.9) обладают основными состояниями u_λ и u_ν при*

$$\lambda \in (\lambda_e^*, +\infty), \qquad \nu \in (0, \nu_e^*),$$

соответственно, где

$$\lambda_e^* = (\varepsilon_e^*)^{-\frac{(\gamma-q)}{(\gamma-p)}}, \qquad \nu_e^* = (\varepsilon_e^*)^{\frac{(\gamma-q)}{(q-p)}}.$$

(2) *Если дополнительно выполнены условия теоремы 1.2, то при $\lambda \to +\infty$*

$$\lambda^{-\frac{1}{(\gamma-q)}} u_\lambda \to \bar{u}_0 \quad \text{по мере в } \Omega,$$

$$\lambda^{-\frac{1}{(\gamma-q)}} u_\lambda - \bar{u}_0 \to 0 \quad \text{сильно в } L^r(\Omega), \qquad 1 \leqslant r < \gamma,$$

и

$$\lambda^{-\frac{1}{(\gamma-q)}} u_\lambda - \bar{u}_0 \rightharpoonup 0 \quad \textit{слабо в } L^\gamma(\Omega).$$

Аналогично, при $\nu \to 0^+$

$$\nu^{\frac{1}{(\gamma-q)}} u_\nu \to \bar{u}_0 \quad \textit{по мере в } \Omega,$$

$$\nu^{\frac{1}{(\gamma-q)}} u_\nu - \bar{u}_0 \to 0 \quad \textit{сильно в } L^r(\Omega), \qquad 1 \leqslant r < \gamma,$$

и

$$\nu^{\frac{1}{(\gamma-q)}} u_\nu - \bar{u}_0 \rightharpoonup 0 \quad \textit{слабо в } L^\gamma(\Omega).$$

Замечание 1.1. *Следствие 1.2 показывает, что один и тот же сингулярный предел может быть записан в двух стандартных параметризациях: как предел* $\lambda \to +\infty$ *в задаче* (1.8) *и как предел* $\nu \to 0^+$ *в задаче* (1.9). *В обеих формах после естественной нормировки основное состояние стремится к одному и тому же профилю*

$$\bar{u}_0(x) = \left(\frac{a(x)}{b(x)}\right)^{\frac{1}{(\gamma-q)}}.$$

Тем самым асимптотика определяется балансом двух конкурирующих нелинейных членов, а не конкретным способом введения параметра.

2. Предварительные сведения

В дальнейшем через $L^r := L^r(\Omega)$, $1 \leqslant r < +\infty$, обозначается пространство измеримых функций с конечной нормой

$$\|u\|_r = \left(\int\limits_\Omega |u|^r \, dx\right)^{\frac{1}{r}}.$$

В силу неравенства Пуанкаре — Фридрихса норму в $W_0^{1,p}(\Omega)$ можно задавать эквивалентной формулой

$$\|u\|_{1,p} = \left(\int\limits_\Omega |\nabla u|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Положим

$$T(u) := \int\limits_\Omega |\nabla u|^p \, dx, \qquad A(u) := \int\limits_\Omega a(x)|u|^q \, dx, \qquad B(u) := \int\limits_\Omega b(x)|u|^\gamma \, dx.$$

Поскольку $b(x) \geqslant \sigma_b > 0$ для п.в. $x \in \Omega$, имеем

$$B(u) > 0 \quad \text{для всех } u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}.$$

Так как $a \not\equiv 0$, множество

$$\mathcal{D} := \left\{u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\} : A(u) > 0\right\}$$

непусто.

Многообразие Нехари, соответствующее задаче (1.1), имеет вид

$$\mathcal{N}_\varepsilon := \left\{u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\} : \varepsilon T(u) - A(u) + B(u) = 0\right\}.$$

Тогда для любого $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}$

$$D_u \Phi_\varepsilon(u)(u) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad u \in \mathcal{N}_\varepsilon.$$

Заметим, что при $\varepsilon > 0$ всякая функция $u \in \mathcal{N}_\varepsilon$ удовлетворяет

$$A(u) = \varepsilon T(u) + B(u) > 0.$$

Поэтому при изучении положительных значений параметра естественно ограничиться направлениями $u \in \mathcal{D}$.

Следуя подходу, основанному на нелинейных обобщённых отношениях Рэлея [23], введём два отношения Рэлея, связанные соответственно с многообразием Нехари и нулевым уровнем энергии. Первое отношение задаётся формулой

$$R_{\mathcal{N}}(u) := \frac{A(u) - B(u)}{T(u)}, \qquad u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}.$$

Тогда

$$\mathcal{N}_\varepsilon = \left\{ u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\} : R_{\mathcal{N}}(u) = \varepsilon \right\}.$$

Зафиксируем $u \in \mathcal{D}$ и рассмотрим функцию

$$s \mapsto R_{\mathcal{N}}(su), \qquad s > 0.$$

Имеем

$$R_{\mathcal{N}}(su) = \frac{s^q A(u) - s^\gamma B(u)}{s^p T(u)} = \frac{A(u) s^{q-p} - B(u) s^{\gamma-p}}{T(u)}.$$

Поскольку $1 < p < q < \gamma$, эта функция имеет единственную положительную критическую точку, причём она является точкой глобального максимума. Непосредственное вычисление даёт

$$s_{\mathcal{N}}(u) = \left(\frac{(q-p)A(u)}{(\gamma-p)B(u)} \right)^{\frac{1}{(\gamma-q)}}. \tag{2.1}$$

Подставляя $s = s_{\mathcal{N}}(u)$ в $R_{\mathcal{N}}(su)$, получаем *нелинейное обобщённое отношение Рэлея*

$$\varepsilon(u) := R_{\mathcal{N}}(s_{\mathcal{N}}(u)u) = c_{p,q,\gamma} \frac{A(u)^{\frac{\gamma-p}{\gamma-q}}}{T(u) B(u)^{\frac{q-p}{\gamma-q}}} = c_{p,q,\gamma} \Upsilon(u), \qquad u \in \mathcal{D}, \tag{2.2}$$

где

$$c_{p,q,\gamma} = \frac{\gamma - q}{\gamma - p} \left(\frac{q-p}{\gamma-p} \right)^{\frac{q-p}{\gamma-q}}. \tag{2.3}$$

Рассмотрим экстремальное значение

$$\varepsilon^* := \sup_{u \in \mathcal{D}} \varepsilon(u). \tag{2.4}$$

Так как $\mathcal{D}$ непусто, имеем

$$\varepsilon^* > 0.$$

Покажем, что $\varepsilon^* < +\infty$. Из неравенств Гёльдера, Пуанкаре — Фридрихса и Соболева следует, что существует константа $C > 0$, не зависящая от u, такая что

$$A(u) = \int_\Omega a(x)|u|^q \, dx \leqslant C T(u)^{\frac{\gamma-q}{\gamma-p}} B(u)^{\frac{q-p}{\gamma-p}}.$$

Действительно, поскольку $q \in (p, \gamma)$, L^q–норма интерполируется между L^p– и L^γ–нормами, а L^p–норма контролируется нормой $\|\nabla u\|_p$. Условие $b(x) \geqslant \sigma_b > 0$ позволяет заменить L^γ–норму соответствующим $B(u)$–членом. Подставляя эту оценку в (2.2), получаем

$$0 < \varepsilon^* < +\infty. \tag{2.5}$$

Второе отношение Рэлея соответствует нулевому уровню энергии (ср. [12], [13], [21], [23]):

$$R_e(u) := \frac{\frac{1}{q}A(u) - \frac{1}{\gamma}B(u)}{\frac{1}{p}T(u)}, \qquad u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}.$$

Тогда

$$R_e(u) = \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad \Phi_\varepsilon(u) = 0.$$

Для фиксированного $u \in \mathcal{D}$ функция

$$s \mapsto R_e(su), \qquad s > 0,$$

имеет единственную положительную критическую точку. Она задаётся формулой

$$s_e(u) = \left(\frac{\gamma(q-p)A(u)}{q(\gamma-p)B(u)} \right)^{\frac{1}{(\gamma-q)}}. \tag{2.6}$$

Подставляя $s = s_e(u)$ в $R_e(su)$, получаем

$$\varepsilon_e(u) := R_e(s_e(u)u) = c_{e,p,q,\gamma} \frac{A(u)^{\frac{\gamma-p}{\gamma-q}}}{T(u)B(u)^{\frac{q-p}{\gamma-q}}} = c_{e,p,q,\gamma} \Upsilon(u), \qquad u \in \mathcal{D}, \tag{2.7}$$

где

$$c_{e,p,q,\gamma} = \frac{p(\gamma-q)}{q(\gamma-p)} \left(\frac{\gamma(q-p)}{q(\gamma-p)} \right)^{\frac{q-p}{\gamma-q}}. \tag{2.8}$$

Положим

$$\varepsilon_e^* := \sup_{u \in \mathcal{D}} \varepsilon_e(u). \tag{2.9}$$

Из той же оценки, что и выше, следует

$$0 < \varepsilon_e^* < +\infty.$$

Лемма 2.1. *Для каждого $u \in \mathcal{D}$ и любого $s > 0$ справедлива эквивалентность*

$$R_e(su) = R_{\mathcal{N}}(su) \quad \Longleftrightarrow \quad s = s_e(u).$$

Доказательство. Зафиксируем $u \in \mathcal{D}$ и положим

$$\psi(s) := R_e(su), \qquad s > 0.$$

Тогда

$$\psi(s) = \frac{p}{T(u)} \left(\frac{A(u)}{q} s^{q-p} - \frac{B(u)}{\gamma} s^{\gamma-p} \right),$$

и

$$\psi'(s) = \frac{p}{T(u)} \left(\frac{q-p}{q} A(u) s^{q-p-1} - \frac{\gamma-p}{\gamma} B(u) s^{\gamma-p-1} \right).$$

С другой стороны,

$$R_{\mathcal{N}}(su) - R_e(su) = \frac{1}{T(u)} \left(\frac{q-p}{q} A(u) s^{q-p} - \frac{\gamma-p}{\gamma} B(u) s^{\gamma-p} \right).$$

Отсюда

$$\psi'(s) = \frac{p}{s} \left(R_{\mathcal{N}}(su) - R_e(su) \right).$$

Следовательно,

$$R_e(su) = R_{\mathcal{N}}(su) \quad \Longleftrightarrow \quad \psi'(s) = 0.$$

Поскольку уравнение $\psi'(s) = 0$ имеет единственное положительное решение $s = s_e(u)$, лемма доказана. □

Лемма 2.2. *Для каждого $u \in \mathcal{D}$ выполняется строгое неравенство*

$$\varepsilon(u) > \varepsilon_e(u).$$

Более того,

$$\varepsilon^* > \varepsilon_e^*.$$

Доказательство. Из формул (2.2) и (2.7) видно, что $\varepsilon(u)$ и $\varepsilon_e(u)$ отличаются только постоянными множителями. Поэтому достаточно доказать, что

$$c_{p,q,\gamma} > c_{e,p,q,\gamma}.$$

Имеем

$$\frac{c_{p,q,\gamma}}{c_{e,p,q,\gamma}} = \frac{q}{p}\left(\frac{q}{\gamma}\right)^{\frac{q-p}{\gamma-q}}.$$

Покажем, что эта величина больше 1. Обозначим

$$\theta := \frac{p}{q} \in (0,1), \qquad x := \frac{\gamma}{q} > 1.$$

Тогда требуемое неравенство эквивалентно

$$x^{\frac{1-\theta}{x-1}} < \frac{1}{\theta}.$$

После логарифмирования достаточно проверить

$$\frac{1-\theta}{x-1}\ln x < -\ln\theta.$$

Так как $x > 1$, имеем $\ln x < x-1$, а так как $0 < \theta < 1$, имеем $1-\theta < -\ln\theta$. Следовательно,

$$\frac{1-\theta}{x-1}\ln x < 1-\theta < -\ln\theta.$$

Отсюда

$$c_{p,q,\gamma} > c_{e,p,q,\gamma}.$$

Значит,

$$\varepsilon(u) > \varepsilon_e(u) \quad \text{для всех } u \in \mathcal{D}.$$

Поскольку ε^* и ε_e^* определены формулами (2.4) и (2.9) с положительными множителями $c_{p,q,\gamma}$ и $c_{e,p,q,\gamma}$ при одном и том же положительном конечном супремуме, получаем

$$\varepsilon^* > \varepsilon_e^*.$$

Лемма доказана. □

3. Доказательство теоремы 1.1

Докажем **(1)**. Предположим от противного, что при $\varepsilon > \varepsilon^*$ задача (1.1) имеет нетривиальное слабое решение $\bar{u} \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $\bar{u} \not\equiv 0$. Тогда

$$D_u\Phi_\varepsilon(\bar{u})(\bar{u}) = 0,$$

то есть

$$\varepsilon\int\limits_\Omega |\nabla\bar{u}|^p\,dx - \int\limits_\Omega a|\bar{u}|^q\,dx + \int\limits_\Omega b|\bar{u}|^\gamma\,dx = 0.$$

Поскольку $\varepsilon > 0$, $\bar{u} \not\equiv 0$, и $b \geqslant \sigma_b > 0$, отсюда следует, что

$$\int\limits_\Omega a|\bar{u}|^q\,dx > 0.$$

Следовательно, $\bar{u} \in \mathcal{D}$. Кроме того,

$$R_{\mathcal{N}}(\bar{u}) = \varepsilon.$$

Поэтому, с учётом (2.2),

$$\varepsilon = R_{\mathcal{N}}(\bar{u}) \leqslant \varepsilon(\bar{u}) \leqslant \varepsilon^* < \varepsilon,$$

что невозможно. Значит, при $\varepsilon > \varepsilon^*$ задача (1.1) не имеет нетривиальных слабых решений.

Докажем **(2)**.

Лемма 3.1. *При каждом $\varepsilon > 0$ функционал Φ_ε коэрцитивен на $W_0^{1,p}(\Omega)$.*

Доказательство. В силу условий на a и b, а также неравенств Гёльдера и Соболева, существуют константы $C_1, C_2 > 0$, не зависящие от u, такие что

$$\int\limits_\Omega a|u|^q\,dx \leqslant C_1\|u\|_\gamma^q, \qquad \int\limits_\Omega b|u|^\gamma\,dx \geqslant C_2\|u\|_\gamma^\gamma.$$

Следовательно,

$$\Phi_\varepsilon(u) \geqslant \frac{\varepsilon}{p}\|\nabla u\|_p^p - C_1\|u\|_\gamma^q + \frac{C_2}{\gamma}\|u\|_\gamma^\gamma.$$

Пусть $\|u_n\|_{W_0^{1,p}} \to +\infty$. Если $\|u_n\|_\gamma$ ограничена, то из-за первого члена правая часть стремится к $+\infty$. Если же $\|u_n\|_\gamma \to +\infty$, то, поскольку $q < \gamma$, положительный член порядка $\|u_n\|_\gamma^\gamma$ доминирует над отрицательным членом порядка $\|u_n\|_\gamma^q$. В обоих случаях

$$\Phi_\varepsilon(u_n) \to +\infty.$$

Лемма доказана. □

Пусть теперь $0 < \varepsilon < \varepsilon_e^*$. Рассмотрим

$$\hat{\Phi}_\varepsilon := \inf_{u\in W_0^{1,p}(\Omega)} \Phi_\varepsilon(u).$$

Из определения ε_e^* следует, что существует $u_0 \in \mathcal{D}$ такое, что

$$\varepsilon < \varepsilon_e(u_0).$$

Положим

$$w_0 := s_e(u_0)u_0.$$

Тогда по определению $\varepsilon_e(u_0)$

$$R_e(w_0) = \varepsilon_e(u_0) > \varepsilon.$$

Так как

$$R_e(w_0) = \frac{\frac{1}{q}\int\limits_\Omega a|w_0|^q\,dx - \frac{1}{\gamma}\int\limits_\Omega b|w_0|^\gamma\,dx}{\frac{1}{p}\int\limits_\Omega |\nabla w_0|^p\,dx},$$

неравенство $R_e(w_0) > \varepsilon$ эквивалентно

$$\Phi_\varepsilon(w_0) < 0.$$

Следовательно,

$$\hat{\Phi}_\varepsilon < 0. \tag{3.1}$$

Пусть $(u_m) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ — минимизирующая последовательность:

$$\Phi_\varepsilon(u_m) \to \hat{\Phi}_\varepsilon.$$

По лемме 3.1 последовательность (u_m) ограничена в $W_0^{1,p}(\Omega)$. Поэтому, переходя к подпоследовательности, можно считать, что существует $u_\varepsilon \in W_0^{1,p}(\Omega)$ такое, что

$$u_m \rightharpoonup u_\varepsilon \quad \text{слабо в } W_0^{1,p}(\Omega),$$

и

$$u_m \to u_\varepsilon \quad \text{сильно в } L^r(\Omega), \qquad 1 < r < p^*.$$

В частности,

$$u_m \to u_\varepsilon \quad \text{сильно в } L^q(\Omega) \quad \text{и} \quad u_m \to u_\varepsilon \quad \text{сильно в } L^\gamma(\Omega).$$

Используя слабую полунепрерывность нормы $\|\nabla u\|_p$ и сильную сходимость нелинейных членов, получаем

$$\Phi_\varepsilon(u_\varepsilon) \le \liminf_{m\to+\infty} \Phi_\varepsilon(u_m) = \hat{\Phi}_\varepsilon.$$

Следовательно,

$$\Phi_\varepsilon(u_\varepsilon) = \hat{\Phi}_\varepsilon.$$

В частности, по (3.1),

$$\Phi_\varepsilon(u_\varepsilon) < 0 = \Phi_\varepsilon(0),$$

и потому $u_\varepsilon \not\equiv 0$.

Так как

$$\Phi_\varepsilon(|u|) = \Phi_\varepsilon(u), \qquad |u| \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

мы можем заменить u_ε на $|u_\varepsilon|$ и считать, что

$$u_\varepsilon \geqslant 0 \quad \text{в } \Omega.$$

Поскольку u_ε является точкой глобального минимума Φ_ε на $W_0^{1,p}(\Omega)$, имеем

$$D_u\Phi_\varepsilon(u_\varepsilon) = 0.$$

Следовательно, u_ε является слабым решением задачи (1.1).

Покажем, что это решение положительно. Из стандартных априорных оценок для слабых решений квазилинейных эллиптических уравнений с субкритическим ростом следует, что

$$u_\varepsilon \in L^\infty(\Omega).$$

Действительно, поскольку

$$1 < p < q < \gamma < p^*,$$

правая часть уравнения (1.1) имеет субкритический рост, и стандартная схема итераций Мозера (см., например, [16]) даёт ограниченность u_ε. Следовательно,

$$a(x)u_\varepsilon^{q-1} - b(x)u_\varepsilon^{\gamma-1} \in L^\infty(\Omega).$$

По внутренним результатам регулярности для вырожденных квазилинейных эллиптических уравнений [15], [32] получаем

$$u_\varepsilon \in C^{1,\kappa}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$$

для некоторого $\kappa \in (0,1)$.

Покажем, что $u_\varepsilon > 0$ в Ω. Поскольку $u_\varepsilon \geqslant 0$, $u_\varepsilon \not\equiv 0$, и $u_\varepsilon \in L^\infty(\Omega)$, существует $M > 0$ такое, что

$$0 \leqslant u_\varepsilon(x) \leqslant M \quad \text{для п.в. } x \in \Omega.$$

Так как $\gamma > p$, имеем

$$u_\varepsilon^{\gamma-1} = u_\varepsilon^{\gamma-p}u_\varepsilon^{p-1} \leqslant M^{\gamma-p}u_\varepsilon^{p-1}.$$

Следовательно,

$$a(x)u_\varepsilon^{q-1} - b(x)u_\varepsilon^{\gamma-1} \geqslant -\|b\|_\infty M^{\gamma-p}u_\varepsilon^{p-1} \quad \text{для п.в. } x \in \Omega.$$

Отсюда и из уравнения для u_ε получаем, что с некоторой константой $C > 0$

$$-\varepsilon\Delta_p u_\varepsilon + Cu_\varepsilon^{p-1} \geqslant 0 \quad \text{в слабом смысле в } \Omega.$$

По сильному принципу максимума для p-лапласиана (см., например, [34]) и поскольку Ω является областью, заключаем, что

$$u_\varepsilon > 0 \quad \text{в } \Omega.$$

Таким образом, u_ε является положительным слабым решением задачи (1.1). Кроме того, поскольку u_ε является глобальным минимумом функционала Φ_ε, это решение является основным состоянием.

Остаётся проверить знак второй производной функции $t \mapsto \Phi_\varepsilon(tu_\varepsilon)$ при $t = 1$. Положим

$$T_\varepsilon := \int\limits_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^p \, dx, \qquad A_\varepsilon := \int\limits_\Omega a u_\varepsilon^q \, dx, \qquad B_\varepsilon := \int\limits_\Omega b u_\varepsilon^\gamma \, dx.$$

Так как u_ε является критической точкой, имеем

$$\varepsilon T_\varepsilon - A_\varepsilon + B_\varepsilon = 0.$$

Кроме того,

$$\Phi_\varepsilon(u_\varepsilon) < 0.$$

Используя $A_\varepsilon = \varepsilon T_\varepsilon + B_\varepsilon$, получаем

$$0 > \Phi_\varepsilon(u_\varepsilon) = \varepsilon T_\varepsilon \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) + B_\varepsilon \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{q}\right).$$

Отсюда

$$B_\varepsilon > \frac{\gamma(q-p)}{p(\gamma-q)} \, \varepsilon T_\varepsilon.$$

Следовательно,

$$\frac{d^2}{dt^2} \Phi_\varepsilon(tu_\varepsilon)\bigg|_{t=1} = (p-q)\varepsilon T_\varepsilon + (\gamma - q) B_\varepsilon > 0.$$

Пункт **(2)** доказан.

Докажем **(3)**. Введём усечённый функционал

$$\Phi_\varepsilon^+(u) = \frac{\varepsilon}{p} \int\limits_\Omega |\nabla u|^p \, dx - \frac{1}{q} \int\limits_\Omega a (u^+)^q \, dx + \frac{1}{\gamma} \int\limits_\Omega b (u^+)^\gamma \, dx, \qquad u^+ := \max\{u, 0\}.$$

Функционал Φ_ε^+ имеет те же оценки коэрцитивности, что и Φ_ε, и удовлетворяет условию Пале — Смейла.

Действительно, пусть $(u_n) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ является последовательностью Пале — Смейла для Φ_ε^+, то есть

$$\Phi_\varepsilon^+(u_n) \text{ ограничена}, \qquad D\Phi_\varepsilon^+(u_n) \to 0 \quad \text{в } (W_0^{1,p}(\Omega))^*.$$

Из коэрцитивности Φ_ε^+ следует, что (u_n) ограничена в $W_0^{1,p}(\Omega)$. Поэтому, переходя к подпоследовательности, можно считать, что

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{слабо в } W_0^{1,p}(\Omega),$$

и

$$u_n \to u \quad \text{сильно в } L^r(\Omega), \qquad 1 < r < p^*.$$

В частности,

$$u_n \to u \quad \text{сильно в } L^q(\Omega) \quad \text{и} \quad u_n \to u \quad \text{сильно в } L^\gamma(\Omega).$$

Так как отображение $\mathbb{R} \ni z \mapsto z^+$ липшицево, то

$$u_n^+ \to u^+ \quad \text{сильно в } L^q(\Omega) \quad \text{и} \quad u_n^+ \to u^+ \quad \text{сильно в } L^\gamma(\Omega).$$

Подставляя $u_n - u$ в производную $D\Phi_\varepsilon^+(u_n)$, получаем

$$\begin{aligned} o(1) &= D\Phi_\varepsilon^+(u_n)(u_n - u) \\ &= \varepsilon \int\limits_\Omega |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \cdot (\nabla u_n - \nabla u) \, dx \\ &\quad - \int\limits_\Omega a (u_n^+)^{q-1} (u_n - u) \, dx + \int\limits_\Omega b (u_n^+)^{\gamma-1} (u_n - u) \, dx. \end{aligned}$$

Последние два интеграла стремятся к нулю. Например,

$$\left| \int\limits_\Omega a(u_n^+)^{q-1}(u_n - u)\,dx \right| \leqslant \|a\|_\infty \|u_n^+\|_q^{q-1} \|u_n - u\|_q \to 0,$$

и аналогично

$$\int\limits_\Omega b(u_n^+)^{\gamma-1}(u_n - u)\,dx \to 0.$$

Следовательно,

$$\int\limits_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \cdot (\nabla u_n - \nabla u)\,dx \to 0.$$

Используем стандартное свойство типа S^+ оператора p-лапласиана: если

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{слабо в } W_0^{1,p}(\Omega)$$

и

$$\limsup_{n\to+\infty} \int\limits_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n(\nabla u_n - \nabla u)\,dx \leqslant 0,$$

то

$$u_n \to u \quad \text{сильно в } W_0^{1,p}(\Omega).$$

Это свойство является стандартным следствием монотонности оператора p-лапласиана и равномерной выпуклости пространства $W_0^{1,p}(\Omega)$; см., например, результаты о монотонных операторах типа S^+ в [17]. Применяя его к (u_n), получаем

$$u_n \to u \quad \text{сильно в } W_0^{1,p}(\Omega).$$

Следовательно, Φ_ε^+ удовлетворяет условию Пале — Смейла.

Покажем, что Φ_ε^+ имеет геометрию горного перевала. Из вложения Соболева следует, что

$$\Phi_\varepsilon^+(u) \geqslant \left(\frac{\varepsilon}{p} - C\|u\|_{W_0^{1,p}}^{q-p} \right) \|u\|_{W_0^{1,p}}^p.$$

Выбирая $\rho > 0$ достаточно малым, получаем

$$\Phi_\varepsilon^+(u) > 0 \quad \text{при} \quad 0 < \|u\|_{W_0^{1,p}} \leqslant \rho.$$

В частности, существует $\delta > 0$ такое, что

$$\Phi_\varepsilon^+(u) \geqslant \delta \quad \text{при} \quad \|u\|_{W_0^{1,p}} = \rho.$$

С другой стороны, найденное выше основное состояние u_ε неотрицательно и удовлетворяет

$$\Phi_\varepsilon^+(u_\varepsilon) = \Phi_\varepsilon(u_\varepsilon) < 0.$$

Поэтому $\|u_\varepsilon\|_{W_0^{1,p}} > \rho$, и функционал Φ_ε^+ имеет геометрию горного перевала.

По теореме о горном перевале [6] существует критическая точка $v_\varepsilon \in W_0^{1,p}(\Omega)$ такая, что

$$\Phi_\varepsilon^+(v_\varepsilon) = c_\varepsilon := \inf_{\xi\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} \Phi_\varepsilon^+(\xi(t)) \geqslant \delta > 0,$$

где

$$\Gamma = \left\{ \xi \in C([0,1]; W_0^{1,p}(\Omega)) : \xi(0) = 0,\ \xi(1) = u_\varepsilon \right\}.$$

В частности,

$$v_\varepsilon \not\equiv 0.$$

Покажем, что $v_\varepsilon \geqslant 0$. Поскольку

$$D\Phi_\varepsilon^+(v_\varepsilon) = 0,$$

берём в качестве пробной функции $-v_\varepsilon^-$, где

$$v_\varepsilon^- := \max\{-v_\varepsilon, 0\}.$$

Тогда нелинейные члены, содержащие v_ε^+, исчезают, и получаем

$$\varepsilon \int\limits_\Omega |\nabla v_\varepsilon^-|^p \, dx = 0.$$

Следовательно,

$$v_\varepsilon^- = 0, \qquad v_\varepsilon \geqslant 0 \quad \text{в } \Omega.$$

Поэтому $v_\varepsilon^+ = v_\varepsilon$, и v_ε является критической точкой исходного функционала Φ_ε. Значит, v_ε является слабым решением задачи (1.1).

Так как

$$\Phi_\varepsilon(v_\varepsilon) = \Phi_\varepsilon^+(v_\varepsilon) = c_\varepsilon > 0,$$

это решение отлично от основного состояния u_ε, поскольку

$$\Phi_\varepsilon(u_\varepsilon) < 0.$$

Как и выше, из априорных оценок и внутренних результатов регулярности для p-лапласиана следует, что

$$v_\varepsilon \in C^{1,\kappa}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$$

для некоторого $\kappa \in (0,1)$. Наконец, поскольку $v_\varepsilon \geqslant 0$, $v_\varepsilon \not\equiv 0$, и

$$-\varepsilon \Delta_p v_\varepsilon + C v_\varepsilon^{p-1} \geqslant 0 \quad \text{в слабом смысле в } \Omega$$

с некоторой константой $C > 0$, то по сильному принципу максимума для p-лапласиана (см., например, [34]) получаем

$$v_\varepsilon > 0 \quad \text{в } \Omega.$$

Пункт **(3)** доказан.

4. Доказательство теоремы 1.2

Положим

$$J(u) := -\frac{1}{q} \int\limits_\Omega a(x)|u|^q \, dx + \frac{1}{\gamma} \int\limits_\Omega b(x)|u|^\gamma \, dx.$$

Для $s \geqslant 0$ обозначим

$$j_x(s) := -\frac{a(x)}{q} s^q + \frac{b(x)}{\gamma} s^\gamma.$$

Тогда

$$J(u) = \int\limits_\Omega j_x(|u(x)|) \, dx.$$

Поскольку $a(x) \geqslant \sigma_a > 0$ и $b(x) \geqslant \sigma_b > 0$ для п.в. $x \in \Omega$, для таких x функция $s \mapsto j_x(s)$ имеет единственную положительную точку глобального минимума

$$\bar{u}_0(x) = \left(\frac{a(x)}{b(x)} \right)^{\frac{1}{(\gamma - q)}}.$$

Отсюда

$$J(u) \geqslant J(\bar{u}_0) \tag{4.1}$$

для всякой $u \in L^\gamma(\Omega)$. Кроме того, из условий $a, b \in L^\infty(\Omega)$, $a \geqslant \sigma_a > 0$, $b \geqslant \sigma_b > 0$ следует, что

$$\bar{u}_0 \in L^\infty(\Omega), \qquad \bar{u}_0 > 0 \quad \text{для п.в. } x \in \Omega.$$

Пусть u_ε — основное состояние задачи (1.1), $0 < \varepsilon < \varepsilon_e^*$. В доказательстве теоремы 1.1 было построено положительное слабое решение, являющееся глобальным минимумом функционала Φ_ε на $W_0^{1,p}(\Omega)$. Поскольку этот глобальный минимум сам является слабым решением, значение энергии любого основного состояния совпадает с глобальным минимумом Φ_ε. Поэтому u_ε также можно рассматривать как глобальный минимум Φ_ε на $W_0^{1,p}(\Omega)$. Следовательно, из (4.1) получаем

$$\Phi_\varepsilon(u_\varepsilon) \geqslant J(u_\varepsilon) \geqslant J(\bar{u}_0). \tag{4.2}$$

С другой стороны, поскольку $C_0^\infty(\Omega)$ плотно в $L^\gamma(\Omega)$, для любого $\delta > 0$ можно выбрать функцию $w_\delta \in C_0^\infty(\Omega)$, $w_\delta \geqslant 0$, такую что

$$\|w_\delta - \bar{u}_0\|_\gamma < \delta.$$

Тогда по минимальности u_ε

$$\Phi_\varepsilon(u_\varepsilon) \leqslant \Phi_\varepsilon(w_\delta) = \frac{\varepsilon}{p} \int\limits_\Omega |\nabla w_\delta|^p \, dx + J(w_\delta).$$

Следовательно,

$$\limsup_{\varepsilon \to 0^+} \Phi_\varepsilon(u_\varepsilon) \leqslant J(w_\delta).$$

Так как $q < \gamma$ и Ω ограничена, функционал J непрерывен относительно сильной сходимости в $L^\gamma(\Omega)$. Переходя к пределу при $\delta \to 0$, получаем

$$\limsup_{\varepsilon \to 0^+} \Phi_\varepsilon(u_\varepsilon) \leqslant J(\bar{u}_0). \tag{4.3}$$

Из (4.2) и (4.3) следует

$$\Phi_\varepsilon(u_\varepsilon) \to J(\bar{u}_0) \quad \text{при } \varepsilon \to 0^+. \tag{4.4}$$

Более того,

$$0 \leqslant J(u_\varepsilon) - J(\bar{u}_0) \leqslant \Phi_\varepsilon(u_\varepsilon) - J(\bar{u}_0),$$

и поэтому

$$J(u_\varepsilon) \to J(\bar{u}_0) \quad \text{при } \varepsilon \to 0^+. \tag{4.5}$$

Докажем теперь, что $u_\varepsilon \to \bar{u}_0$ по мере. Сначала заметим, что семейство $\{u_\varepsilon\}$ ограничено в $L^\gamma(\Omega)$ при $\varepsilon \to 0^+$. Действительно, поскольку $a, b \in L^\infty(\Omega)$, $b \geqslant \sigma_b > 0$ и $q < \gamma$, существуют константы $c_1, c_2 > 0$, не зависящие от x и $s \geqslant 0$, такие что

$$j_x(s) = -\frac{a(x)}{q} s^q + \frac{b(x)}{\gamma} s^\gamma \geqslant c_1 s^\gamma - c_2.$$

Из этой оценки и (4.5) следует ограниченность $\{u_\varepsilon\}$ в $L^\gamma(\Omega)$ для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

Так как $u_\varepsilon \geqslant 0$, из (4.5) имеем

$$\int\limits_\Omega \big(j_x(u_\varepsilon(x)) - j_x(\bar{u}_0(x))\big) \, dx \to 0. \tag{4.6}$$

Поскольку при п.в. $x \in \Omega$ функция $s \mapsto j_x(s)$ имеет единственную положительную точку глобального минимума $\bar{u}_0(x)$, подынтегральная функция в (4.6) неотрицательна.

Положим

$$\hat{a} := \|a\|_\infty, \qquad \hat{b} := \|b\|_\infty.$$

Тогда для п.в. $x \in \Omega$

$$0 < \rho_- := \left(\frac{\sigma_a}{\hat{b}}\right)^{\frac{1}{(\gamma - q)}} \leqslant \bar{u}_0(x) \leqslant \left(\frac{\hat{a}}{\sigma_b}\right)^{\frac{1}{(\gamma - q)}} =: \rho_+ < +\infty.$$

Зафиксируем $\eta > 0$. Покажем, что существует $\kappa_\eta > 0$ такое, что

$$j_x(s) - j_x(\bar{u}_0(x)) \geqslant \kappa_\eta \tag{4.7}$$

для всех $s \geqslant 0$, удовлетворяющих

$$|s - \bar{u}_0(x)| \geqslant \eta,$$

и для п.в. $x \in \Omega$.

Рассмотрим семейство функций

$$j_{\alpha,\beta}(s) := -\frac{\alpha}{q}s^q + \frac{\beta}{\gamma}s^\gamma, \qquad (\alpha,\beta) \in [\sigma_a, \hat{a}] \times [\sigma_b, \hat{b}].$$

Для каждой пары (α,β) функция $j_{\alpha,\beta}$ имеет единственную положительную точку глобального минимума

$$\rho(\alpha,\beta) = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{1}{(\gamma-q)}},$$

причём

$$\rho(\alpha,\beta) \in [\rho_-, \rho_+].$$

Сначала заметим, что

$$j_{\alpha,\beta}(s) - j_{\alpha,\beta}(\rho(\alpha,\beta)) \to +\infty \quad \text{при } s \to +\infty$$

равномерно по

$$(\alpha,\beta) \in [\sigma_a, \hat{a}] \times [\sigma_b, \hat{b}].$$

В самом деле,

$$j_{\alpha,\beta}(s) \geqslant -\frac{\hat{a}}{q}s^q + \frac{\sigma_b}{\gamma}s^\gamma,$$

а функция

$$(\alpha,\beta) \mapsto j_{\alpha,\beta}(\rho(\alpha,\beta))$$

непрерывна на компактном множестве

$$[\sigma_a, \hat{a}] \times [\sigma_b, \hat{b}].$$

Следовательно, существует $M_0 > 0$ такое, что

$$\left|j_{\alpha,\beta}(\rho(\alpha,\beta))\right| \leqslant M_0$$

для всех $(\alpha,\beta) \in [\sigma_a, \hat{a}] \times [\sigma_b, \hat{b}]$. Поэтому

$$j_{\alpha,\beta}(s) - j_{\alpha,\beta}(\rho(\alpha,\beta)) \geqslant \frac{\sigma_b}{\gamma}s^\gamma - \frac{\hat{a}}{q}s^q - M_0.$$

Так как $\gamma > q$, правая часть стремится к $+\infty$ при $s \to +\infty$, причём эта нижняя оценка не зависит от (α,β). Значит, можно выбрать $M > 0$ так, что

$$j_{\alpha,\beta}(s) - j_{\alpha,\beta}(\rho(\alpha,\beta)) \geqslant 1 \tag{4.8}$$

для всех $s \geqslant M$ и всех

$$(\alpha,\beta) \in [\sigma_a, \hat{a}] \times [\sigma_b, \hat{b}].$$

Остаётся рассмотреть область $0 \leqslant s \leqslant M$. Пусть

$$K_\eta := \left\{(\alpha,\beta,s) : \alpha \in [\sigma_a, \hat{a}],\ \beta \in [\sigma_b, \hat{b}],\ s \in [0, M],\ |s - \rho(\alpha,\beta)| \geqslant \eta\right\}.$$

Если $K_\eta \neq \varnothing$, то это множество компактно. Функция

$$(\alpha,\beta,s) \mapsto j_{\alpha,\beta}(s) - j_{\alpha,\beta}(\rho(\alpha,\beta))$$

непрерывна и строго положительна на K_η, поскольку равенство нулю возможно только при $s = \rho(\alpha, \beta)$, а такие точки исключены условием $|s - \rho(\alpha, \beta)| \geqslant \eta$. Поэтому

$$\kappa'_\eta := \min_{K_\eta} \big(j_{\alpha,\beta}(s) - j_{\alpha,\beta}(\rho(\alpha, \beta)) \big) > 0.$$

Если же $K_\eta = \varnothing$, положим, например, $\kappa'_\eta = 1$. В обоих случаях можно задать

$$\kappa_\eta := \min\{\kappa'_\eta, 1\} > 0.$$

Тогда из (4.8) и определения κ'_η следует, что

$$j_{\alpha,\beta}(s) - j_{\alpha,\beta}(\rho(\alpha, \beta)) \geqslant \kappa_\eta$$

для всех $s \geqslant 0$ и всех $(\alpha, \beta) \in [\sigma_a, \hat{a}] \times [\sigma_b, \hat{b}]$, таких что

$$|s - \rho(\alpha, \beta)| \geqslant \eta.$$

Применяя это утверждение при

$$\alpha = a(x), \qquad \beta = b(x), \qquad \rho(\alpha, \beta) = \bar{u}_0(x),$$

получаем (4.7).

Следовательно,

$$\kappa_\eta \operatorname{mes}\{x \in \Omega : \ |u_\varepsilon(x) - \bar{u}_0(x)| \geqslant \eta\} \leqslant \int\limits_\Omega \big(j_x(u_\varepsilon(x)) - j_x(\bar{u}_0(x)) \big)\, dx.$$

В силу (4.6) правая часть стремится к нулю. Поэтому для каждого $\eta > 0$

$$\operatorname{mes}\{x \in \Omega : \ |u_\varepsilon(x) - \bar{u}_0(x)| \geqslant \eta\} \to 0,$$

то есть

$$u_\varepsilon \to \bar{u}_0 \quad \text{по мере в } \Omega. \tag{4.9}$$

Покажем теперь сильную сходимость в $L^r(\Omega)$ при $1 \leqslant r < \gamma$. Поскольку семейство $\{u_\varepsilon\}$ ограничено в $L^\gamma(\Omega)$ и $\bar{u}_0 \in L^\gamma(\Omega)$, семейство $\{u_\varepsilon - \bar{u}_0\}$ также ограничено в $L^\gamma(\Omega)$. Следовательно, для каждого $1 \leqslant r < \gamma$ семейство $\{|u_\varepsilon - \bar{u}_0|^r\}$ ограничено в $L^{\gamma/r}(\Omega)$, где $\gamma/r > 1$. Поэтому оно равномерно интегрируемо. Учитывая (4.9), из теоремы Лебега-Витали о сходимости (см., например, [9, Th. 4.5.4]) получаем

$$\int\limits_\Omega |u_\varepsilon - \bar{u}_0|^r\, dx \to 0.$$

Тем самым

$$u_\varepsilon \to \bar{u}_0 \quad \text{сильно в } L^r(\Omega)$$

для всех $1 \leqslant r < \gamma$.

Кроме того,

$$u_\varepsilon \rightharpoonup \bar{u}_0 \quad \text{слабо в } L^\gamma(\Omega).$$

Действительно, из ограниченности u_ε в $L^\gamma(\Omega)$ и рефлексивности этого пространства следует, что всякая последовательность u_{ε_m}, $\varepsilon_m \to 0^+$, содержит подпоследовательность, слабо сходящуюся в $L^\gamma(\Omega)$. Пусть

$$u_{\varepsilon_m} \rightharpoonup w \quad \text{слабо в } L^\gamma(\Omega)$$

по такой подпоследовательности. С другой стороны, уже доказанная сильная сходимость в $L^r(\Omega)$, $1 \leqslant r < \gamma$, в частности даёт

$$u_{\varepsilon_m} \to \bar{u}_0 \quad \text{сильно в } L^1(\Omega).$$

Следовательно, для всякой $\varphi \in L^\infty(\Omega)$

$$\int\limits_\Omega u_{\varepsilon_m}\varphi\,dx \to \int\limits_\Omega \bar{u}_0\varphi\,dx.$$

Но из слабой сходимости в $L^\gamma(\Omega)$ также следует

$$\int\limits_\Omega u_{\varepsilon_m}\varphi\,dx \to \int\limits_\Omega w\varphi\,dx.$$

Значит, $w = \bar{u}_0$ почти всюду в Ω. Поэтому всякая слабая предельная точка семейства u_ε в $L^\gamma(\Omega)$ совпадает с $\bar{u}_0$, и, следовательно, всё семейство слабо сходится к $\bar{u}_0$ в $L^\gamma(\Omega)$. Иными словами,

$$u_\varepsilon - \bar{u}_0 \rightharpoonup 0 \quad \text{слабо в } L^\gamma(\Omega).$$

Наконец, по определению $\bar{u}_0$ имеем

$$a(x)\bar{u}_0^{q-1}(x) - b(x)\bar{u}_0^{\gamma-1}(x) = 0 \quad \text{для п.в. } x \in \Omega.$$

Тем самым $\bar{u}_0$ удовлетворяет предельному уравнению задачи (1.1) при $\varepsilon = 0$:

$$a(x)\bar{u}_0^{q-1} = b(x)\bar{u}_0^{\gamma-1} \quad \text{п.в. в } \Omega.$$

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А.М. Ильин. *Согласование асимптотических разложений решений краевых задач*. М.:Наука. 1989.
2. Я.Ш. Ильясов. *О кривой критических показателей для нелинейных эллиптических уравнений в случае нулевой массы* // Ж. вычисл. мат. мат. физ. **57**:3, 491–509 (2017).
3. A. Ambrosetti, H. Brezis, G. Cerami. *Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems* // J. Funct. Anal. **122**:2, 519–543 (1994).
4. A. Ambrosetti, A. Malchiodi. *Perturbation Methods and Semilinear Elliptic Problems on* $\mathbb{R}^n$. Birkhäuser, Basel (2006).
5. A. Ambrosetti, A. Malchiodi, W.-M. Ni. *Singularly perturbed elliptic equations with symmetry: existence of solutions concentrating on spheres. I* // Commun. Math. Phys. **235**:3, 427–466 (2003).
6. A. Ambrosetti, P.H. Rabinowitz. *Dual variational methods in critical point theory and applications* // J. Funct. Anal. **14**:4, 349–381 (1973).
7. M. Badiale, J. García Azorero, I. Peral. *Perturbation results for an anisotropic Schrödinger equation via a variational method* // NoDEA, Nonlinear Differ. Equ. Appl. **7**:2, 201–230 (2000).
8. T. Bartsch, M. Willem. *On an elliptic equation with concave and convex nonlinearities* // Proc. Amer. Math. Soc. **123**:11, 3555–3561 (1995).
9. V.I. Bogachev. *Measure Theory. Vol. I.* Springer, Berlin (2007).
10. V. Bobkov, P. Drábek, J. Hernández. *Existence and multiplicity results for a class of semilinear elliptic equations* // Nonlinear Anal., Theory Methods Appl., Ser. A, Theory Methods **200**, 112017, 24 p. (2020).
11. V. Bobkov, Y. Il'yasov. *Asymptotic behaviour of branches for ground states of elliptic systems* // Electron. J. Differ. Equ. **2013**, 212 (2013).
12. R. Carles, Y. Il'yasov. *On ground states for the 2D Schrödinger equation with combined nonlinearities and harmonic potential* // Stud. Appl. Math. **150**:1, 92–118 (2023).
13. M.L. Carvalho, Y. Il'yasov, C.A. Santos. *Existence of S-shaped type bifurcation curve with dual cusp catastrophe via variational methods* // J. Differ. Equations **334**, 256–279 (2022).
14. E.N. Dancer, S. Yan. *Multipeak solutions for a singularly perturbed Neumann problem* // Pac. J. Math. **189**:2, 241–262 (1999).
15. E. DiBenedetto. $C^{1,\alpha}$ *local regularity of weak solutions of degenerate elliptic equations* // Nonlinear Anal., Theory Methods Appl. **7**:8, 827–850 (1983).

16. P. Drábek, A. Kufner, F. Nicolosi. *Quasilinear Elliptic Equations with Degenerations and Singularities.* Walter de Gruyter, Berlin (1997).
17. P. Drábek, J. Milota. *Methods of Nonlinear Analysis: Applications to Differential Equations.* Springer, Basel (2013).
18. J. García Azorero, I. Peral Alonso. *Some results about the existence of a second positive solution in a quasilinear critical problem* // Indiana Univ. Math. J. **43**:3, 941–957 (1994).
19. F.A. Howes. *Singularly perturbed semilinear elliptic boundary value problems* // Commun. Partial Differ. Equations **4**:1, 1–39 (1979).
20. Y. Il'yasov. *On nonlocal existence results for elliptic equations with convex–concave nonlinearities* // Nonlinear Anal., Theory Methods Appl., Ser. A, Theory Methods **61**:1–2, 211–236 (2005).
21. Y.S. Il'yasov. *On extreme values of Nehari manifold method via nonlinear Rayleigh quotient* // Topol. Methods Nonlinear Anal. **49**:2, 683–714 (2017).
22. Y. Il'yasov, K. Silva. *On branches of positive solutions for p-Laplacian problems at the extreme value of the Nehari manifold method* // Proc. Am. Math. Soc. **146**:7, 2925–2935 (2018).
23. Y.S. Il'yasov. *Rayleigh quotients of the level set manifolds related to the nonlinear PDE* // Minimax Theory Appl. **7**:2, 277–302 (2022).
24. E.M. de Jager, F. Jiang. *The Theory of Singular Perturbations.* North–Holland, Amsterdam (1996).
25. M.K. Kadalbajoo, K.C. Patidar. *Singularly perturbed problems in partial differential equations: a survey* // Appl. Math. Comput. **134**:2–3, 371–429 (2003).
26. C.S. Lin, W.-M. Ni, I. Takagi. *Large amplitude stationary solutions to a chemotaxis system* // J. Differ. Equations **72**:1, 1–27 (1988).
27. J.D. Murray. *Mathematical Biology. I: An Introduction.* Springer, New York (2007).
28. A.H. Nayfeh. *Perturbation Methods.* John Wiley & Sons, New York (1973).
29. W.-M. Ni, J. Wei. *On the location and profile of spike-layer solutions to singularly perturbed semilinear Dirichlet problems* // Commun. Pure Appl. Math. **48**:7, 731–768 (1995).
30. H. Ramos Quoirin, G. Siciliano, K. Silva. *Critical points with prescribed energy for a class of functionals depending on a parameter: existence, multiplicity and bifurcation results* // Nonlinearity **37**:6, 065010 (2024).
31. H.-G. Roos, M. Stynes, L. Tobiska. *Robust Numerical Methods for Singularly Perturbed Differential Equations. Convection–diffusion–reaction and flow problems.* Springer, Berlin (2008).
32. P. Tolksdorf. *Regularity for a more general class of quasilinear elliptic equations* // J. Differ. Equations **51**:1, 126–150 (1984).
33. A.B. Vasil'eva, V.F. Butuzov, L.V. Kalachev. *The Boundary Function Method for Singular Perturbation Problems.* SIAM, Philadelphia (1995).
34. J.L. Vázquez. *A strong maximum principle for some quasilinear elliptic equations* // Appl. Math. Optimization **12**:1, 191–202 (1984).
35. A. Volpert, V. Volpert, V. Volpert. *Traveling Wave Solutions of Parabolic Systems.* Amer. Math. Soc., Providence, RI (1994).

Явдат Шавкатович Ильясов,
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН,
ул.Чернышевского, 112
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: ilyasov02@gmail.com

Эльвира Ильдаровна Турьянова,
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН,
ул.Чернышевского, 112
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: elviratur820@gmail.com