ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 18 № 4 (2026). С. 47-55.

УДК 519.2

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К АНАЛИЗУ НЕОДНОРОДНОГО ПУАССОНОВСКОГО ПРОЦЕССА С ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ИНТЕНСИВНОСТЬЮ

А.В. ЗОРИН

Аннотация. В работе рассматриваются вероятностные свойства моментов скачков неоднородного пуассоновского процесса. В предположении, что мгновенная интенсивность является периодической функцией, отделенной от нуля, «фазы» (дробные доли по отношению к длине периода) моментов скачков образуют общую цепь Маркова на отрезке, причем плотность инвариантного распределения вероятностей пропорциональна функции мгновенной интенсивности.

Обсуждаются возможные применения обнаруженного свойства моментов скачков для статистических выводов о неоднородном пуассоновском процессе. С применением центральной предельной теоремы для цепей Маркова доказывается сходимость конечномерных распределений эмпирического процесса к конечномерным распределениям гауссовского процесса того же типа, что и в случае повторной независимой выборки.

Ключевые слова: неоднородный пуассоновский процесс, периодическая интенсивность, общая цепь Маркова, эмпирический процесс, критерии согласия, центральная предельная теорема.

Mathematics Subject Classification: 60G55, 60G17, 62G05, 62G10

1. Введение

В данной работе рассматриваются свойства одного класса точечных процессов на полупрямой $\mathbb{R}_+ = \{t; t \geqslant 0\}$. Во многих реальных приложениях считают, что речь идет о моментах времени $\{\tau_i; i = 0, 1, \ldots\}$ появления последовательности некоторых событий. Эквивалентную модель мы получим, если перейдем к изучению интервалов $(\tau_i - \tau_{i-1})$ между событиями, $i = 1, 2, \ldots$, или считающей функции

$$N(t) = \sum_{i=0}^{\infty} I(\tau_i < t)$$

для числа событий на промежутке $[0, t)$. В классической монографии Д.Р. Кокса и П.А. Льюиса [7] содержится один из первых обстоятельных сводов статистических моделей для точечного процесса на полупрямой. К ним относятся модели пуассоновского процесса и процесса восстановления, модели регрессионного типа для интервалов между событиями. К важным вариациям пуассоновского процесса относятся упоминаемые в этой монографии нестационарный пуассоновский процесс с неслучайной, зависящей от времени мгновенной интенсивностью, и процесс, в котором мгновенная интенсивность сама является случайным процессом (так называемые процессы Кокса). Кроме вопросов оценки числовых характеристик первого и второго порядка в [7] описаны процедуры проверки

A.V. Zorine, Concerning a new approach to statistical inferences about non-homogeneous Poisson processes with periodic intensity.

© Зорин А.В. 2026.

Поступила 25 июля 2025 г.

важных статистических гипотез о принадлежности наблюдаемого отрезка точечного процесса семейству пуассоновских процессов с постоянной интенсивностью, а также семейству процессов восстановления.

Применительно к нестационарным пуассоновским процессам (их также называют неоднородными пуассоновскими процессами) естественно возникают следующие группы задач: разработка критериев для проверки гипотез о постоянной интенсивности против альтернативы в виде функции времени из заданного класса, а также задача оценки для мгновенной интенсивности и для математического ожидания числа событий по причине, которую мы напомним ниже. Проверка гипотезы независимости интенсивности от времени против альтернативы линейной зависимости рассматривалась уже в монографии [7]. В дальнейшем, альтернативная гипотеза о квадратичной зависимости интенсивности от времени изучалась в статье [1].

Переходя к задаче оценки мгновенной интенсивности нестационарного пуассоновского процесса, необходимо помнить следующее. Нестационарный пуассоновский процесс можно определять как случайный процесс $\{N(t); t \geqslant 0\}$, $N(0) = 0$, с независимыми приращениями, причем приращение $N(t) - N(s)$ имеет распределение Пуассона с параметром $\Lambda(t) - \Lambda(s)$, где $\Lambda(t) = \mathbb{E}(N(t))$ — неубывающая функция, $\Lambda(0) = 0$. Функцию $\Lambda(t)$ часто называют *ведущей функцией* или *компенсатором* пуассоновского процесса. При дополнительном предположении, что

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s)\, ds$$

для некоторой неотрицательной функции $\lambda(s)$, легко придать этой новой функции $\lambda(s)$ простую физическую интерпретацию: вероятность единичного скачка пуассоновского процесса на промежутке $[t, t+h)$ равна $\lambda(t)h + o(h)$, а вероятность отсутствия скачка равна $1 - \lambda(t)h + o(h)$. Величину $\lambda(t)$ называют мгновенной интенсивностью в момент $t \geqslant 0$. Нестационарные пуассоновские процессы находят разнообразные применения в техническом моделировании, в физике, биологии, социологии, и многих других. Разные подходы к непараметрическому оцениванию функции мгновенной интенсивности $\lambda(t)$ предложены в работах [12], [8] — на основе ядерных функций, в [9] — с помощью Гильбертовых пространств с воспроизводящим ядром (Reproducing Kernel Hilbert Space), в [4] — методами асимптотического анализа.

В недавней монографии [10] богато представлены результаты, относящиеся как к параметрической оценке интенсивности нестационарного процесса Пуассона, так и к методам оценки функции среднего $\Lambda(t)$, а также некоторые критерии согласия. При этом изложение общей теории для нестационарного пуассоновского процесса иллюстрируется примерами с периодическими интенсивностями, $\lambda(t+\tau) = \lambda(t)$ при всех $t \geqslant 0$ для некоторого $\tau > 0$. Основными входными данными в книге считаются либо одна реализация $\{N(t); 0 \leqslant t \leqslant \Theta_n\}$ с растущим $\Theta_n \to \infty$, либо n независимых реализаций $\{N_j(t); 0 \leqslant t \leqslant \tau\}$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Для случая периодических интенсивностей выбирается $\Theta_n = n\tau$. По-видимому, признавая всё богатство полученных конкретных практических результатов и разнообразие рассмотренных статистических задач, можно сделать одно замечание о том, когда данный подход может приводит к недостаточному использованию всех наличных данных, хотя бы из «физических соображений». А именно, если период функции интенсивности сравним с математическим ожиданием интервала между событиями, или даже меньше его, то большая доля реализаций окажется «пустой». Также, разрезание нестационарного пуассоновского процесса на периоды, пусть даже и статистически независимые, может приводить к потере важных сведений о функции $\lambda(t)$ из-за разрывов на несвязанные части одного цельного промежутка между событиями, попавшими в разные периоды.

В настоящей статье указано одно неожиданное свойство нестационарного пуассоновского процесса, которое позволяет проводить статистический анализ даже таких «редких» событий. При этом основными данными будут не независимые реализации процесса $\{N(t); t \geqslant 0\}$, а сами моменты τ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

2. Одно свойство точечного процесса и его возможные использования. Сводка новых результатов

Не уменьшая общности, будем считать, что интенсивность $\lambda(t)$ периодическая с периодом $\tau = 1$ (этого всегда можно достичь заменой времени), т.е., $\lambda(t+1) = \lambda(t)$ для всех $t \geqslant 0$. Заметим, что не требуется, чтобы число 1 было наименьшим с таким свойством. Предположим также, что функция мгновенной интенсивности отделена от нуля, то есть $\lambda(t) \geqslant \delta$ для некоторого $\delta > 0$.

Пусть $T_0 = 0$ и T_i, $i = 1, 2, \ldots$ — моменты скачков процесса $\{N(t); t \geqslant 0\}$. Нам потребуются также следующие две последовательности случайных величин: $X_i = \{T_i\}$, $i = 0, 1, \ldots$ — последовательность дробных частей и $M_i = [T_i - T_{i-1}]$, $i = 1, 2, \ldots$ — последовательность целых частей от величин промежутков между скачками.

Теорема 2.1. *Последовательность* $\{X_i; i = 0, 1, \ldots\}$ *является общей цепью Маркова на отрезке* $[0, 1]$ *с переходной плотностью вида*

$$p(u, v) = \begin{cases} \dfrac{\lambda(v) e^{-(\Lambda(1+v)-\Lambda(u))}}{1 - e^{-\Lambda(1)}}, & 0 \leqslant v \leqslant u \leqslant 1, \\ \dfrac{\lambda(v) e^{-(\Lambda(v)-\Lambda(u))}}{1 - e^{-\Lambda(1)}}, & 0 \leqslant u < v \leqslant 1. \end{cases} \tag{2.1}$$

Соответствующее инвариантное распределение вероятностей задается плотностью вида $\pi(u) = \dfrac{\lambda(u)}{\Lambda(1)}$.

Теорема 2.1 связывает мгновенную интенсивность $\lambda(t)$ на периоде исходного неоднородного пуассоновского процесса со стационарной мерой некоторой цепи Маркова. Причем нормирующий коэффициент вида $\Lambda(1)$ тоже определяется по значениям интенсивности на этом периоде. Данное наблюдение позволяет предложить процедуры статистических выводов относительно этой, обычно неизвестной, мгновенной интенсивности. Перечислим некоторые возможные статистические приложения указанного свойства неоднородного пуассоновского процесса.

1. *Оценивание неизвестной интенсивности* $\lambda(t)$, $0 \leqslant t < 1$. Для решения этой задачи достаточно по имеющейся реализации $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ случайного вектора $(T_1, T_2, \ldots, T_n)$ выбранной заранее длины n оценить стационарную плотность распределения $\hat{\pi}(t)$, $0 \leqslant t < 1$ цепи Маркова с переходной вероятностью, заданной функцией (2.1) и, кроме того, оценить нормирующую константу $\Lambda(1)$. И если в качестве оценок $\hat{\pi}(t)$ естественно рассматривать эмпирическую плотность распределения или ядерную оценку плотности, то оценку для $\Lambda(1)$ можно получить на основе следующего утверждения.

Лемма 2.1. *Случайные величины* M_i, $i = 1, 2, \ldots$ *независимы и распределены по геометрическому закону:*

$$\mathbb{P}(M_i = m) = e^{-m\Lambda(1)}(1 - e^{-\Lambda(1)}), \qquad m = 0, 1, \ldots. \tag{2.2}$$

Несложно проверить, что оценка по методу моментов будет иметь вид:

$$\widehat{\Lambda(1)} = \ln(1 + \overline{m}) - \ln \overline{m},$$

где

$$\overline{m} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[t_i - t_{i-1}].$$

Тогда мгновенную интенсивность можно оценить как $\hat{\lambda}(t) = \widehat{\Lambda(1)}\hat{\pi}(t)$, $0 \leqslant t < 1$.

2. *Проверка гипотезы о согласии с данной функцией интенсивности* $\lambda(t)$. Функция распределения, соответствующая стационарной плотности $\dfrac{\lambda(t)}{\Lambda(1)}$, есть $\dfrac{\Lambda(t)}{\Lambda(1)}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Именно с ней будем сравнивать выборочную функцию распределения, построенную по реализации $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ случайного вектора $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Введем эмпирический процесс

$$w_n(t) = \sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(X_n < t) - \frac{\Lambda(t)}{\Lambda(1)}\right), \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Эмпирический процесс $\{w_n(t); 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ является основным при построении таких популярных критериев согласия как критерий χ^2 Пирсона, критерий Колмогорова, критерий ω^2 Крамера — фон Мизеса, критерий Андерсона — Дарлинга (см. [2], [5]). В классической теории, где выборочные значения X_1, X_2, …, X_n независимы, доказана слабая сходимость совместных распределений для приращений эмпирического процесса к гауссовскому распределению с нулевым вектором средних и ковариационной матрицей известного вида. Замечательно, что и для введенной выше общей цепи Маркова $\{X_i; i = 0, 1, \ldots\}$ остается в силе результат о предельном распределении для эмпирического процесса. Сформулируем этот результат.

Рассмотрим разбиение

$$[0,1] = [z_0, z_1) \cup [z_1, z_2) \cup \ldots \cup [z_{r-1}, z_r], \qquad 0 = z_0 < z_1 < \ldots < z_r = 1,$$
$$\Delta_j = \frac{(\Lambda(z_j) - \Lambda(z_{j-1}))}{\Lambda(1)}.$$

Здесь величина Δ_j есть вероятность, приписываемая интервалу $[z_{j-1}, z_j)$ стационарным распределением.

Теорема 2.2. *При* $n \to \infty$ *распределение случайного вектора*

$$(w_n(z_1) - w_n(z_0), w_n(z_2) - w_n(z_1), \ldots, w_n(z_r) - w_n(z_{r-1}))$$

слабо сходится к r*-мерному нормальному распределению с нулевым средним и ковариационной матрицей* $\Sigma = (\sigma_{j,l})$, *где*

$$\sigma_{j,j} = \Delta_j(1 - \Delta_j), \qquad \sigma_{j,l} = -\Delta_j\Delta_l, \quad j \neq l.$$

Таким образом, предельное распределение для приращений

$$(w_n(z_1) - w_n(z_0), w_n(z_2) - w_n(z_1), \ldots, w_n(z_r) - w_n(z_{r-1}))$$

при $n \to \infty$ такое же, как и в случае повторной независимой выборки с функцией распределения $\dfrac{\Lambda(t)}{\Lambda(1)}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ (см., напр., [2]). Как говорилось выше, этот факт является замечательным, так как несложно построить примеры общей цепи Маркова, также со значениями на промежутке $[0, 1]$, для которых предельное распределение вектора приращений эмпирического процесса будет обладать другой ковариационной матрицей.

Обозначим

$$\nu_j = \frac{\Lambda(1)}{n}\sum_{i=1}^{n} I(z_{j-1} \leqslant X_i < z_j), \qquad j = 1, 2, \ldots, r. \tag{2.3}$$

Теорема 2.3. *Статистика*

$$\frac{n}{\Lambda(1)}\sum_{j=1}^{r}\frac{(\nu_j-(\Lambda(z_j)-\Lambda(z_{j-1})))^2}{\Lambda(z_j)-\Lambda(z_{j-1})} \tag{2.4}$$

при $n\to\infty$ *сходится по распределению к* χ^2_{r-1}.

Данная теорема очевидным образом, с точностью до обозначений, выводится из теоремы 2.2, поэтому ее доказательство оставляем читателю.

3. *Проверка сложной гипотезы об однородности данного пуассоновского процесса.* Действительно, пусть $\lambda(t)=\lambda=\mathrm{const}$, тогда стационарное распределение обязано иметь постоянную плотность на промежутке $[0,1]$, следовательно, это стандартное равномерное распределение. Таким образом, задача свелась к проверке простой нулевой гипотезы о виде стационарного распределения, которая обсуждалась в предыдущем пункте.

Необходимо отметить основное отличие от имеющихся в литературе методов: вместо наблюдения части считающего процесса $\{N(t);0\leqslant t\leqslant T\}$ при некотором $T>0$ наблюдается фиксированное число n моментов скачков $\{T_i;i=1,2,\dots,n\}$. При этом, выбор фиксированного T дает выборку случайного объема $n=N(T)$ для моментов скачков, а фиксирование n дает случайное время наблюдения $T=T_n$.

3. Доказательства теорем

В настоящем разделе будут приведены доказательства теорем 2.1, 2.2 и леммы 2.1, а также сформулированы и доказаны необходимые вспомогательные предложения. Обозначения раздела 2 полностью сохранены.

Доказательство теоремы 2.1. Марковское свойство следует из того, что распределение величины $T_{i+1}-T_i$ при условии $T_i=t$ не зависит от величин T_{i-1}, T_{i-2}, …, T_1; напомним, что оно имеет функцию распределения вида

$$\mathbb{P}(T_{i+1}-T_i<s\mid T_i=t)=1-\exp\Big\{-\int_t^{s+t}\lambda(u)\,du\Big\},\qquad s\geqslant 0.$$

При $u<v$ соотношения $\{T_i\}=u$ и $v\leqslant\{T_{i+1}\}<v+dv$ означают, что разность $T_{i+1}-T_i$ может принимать значения только из промежутков

$$[v-u,v+dv-u),\quad [1+v-u,1+v+dv-u),\quad [2+v-u,2+v+dv-u),\quad \dots.$$

Поэтому,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(X_{i+1}\in[v,v+dv)\mid X_i=u\right)\\
&\quad=\sum_{m=0}^{\infty}\left(\exp\left(-\int_u^{u+m+(v-u)}\lambda(s)\,ds\right)-\exp\left(-\int_u^{u+m+(v-u)+dv}\lambda(s)\,ds\right)\right)\\
&\quad=\sum_{m=0}^{\infty}\exp(-m\Lambda(1))\exp\left(-\int_u^{v}\lambda(s)\,ds\right)\left(1-\exp\left(-\int_v^{v+dv}\lambda(s)\,ds\right)\right)\\
&\quad=(1-e^{-\Lambda(1)})^{-1}\exp\left(-\int_u^{v}\lambda(s)\,ds\right)\left(1-\exp\left(-\int_v^{v+dv}\lambda(s)\,ds\right)\right).
\end{aligned}$$

При $u > v$ исключается случай $m = 0$. Остальные вычисления аналогичны. Отсюда следуют формулы (2.1) для плотности переходной вероятности.

Непосредственной подстановкой легко убедиться, что стационарная плотность вида $\pi(u) = \dfrac{\lambda(u)}{\Lambda(1)}$, $0 \leqslant u \leqslant 1$, удовлетворяет интегральному уравнению

$$\pi(v) = \int_0^1 \pi(u)p(u,v)\,du, \qquad 0 \leqslant v \leqslant 1.$$

Доказательство завершено. □

Для доказательства предельных теорем нам придется применять центральную предельную теорему к цепи Маркова. Используемый в настоящей работе вариант центральной предельной теоремы предполагает, что цепь Маркова является возвратной по Харрису [6]. Установим это.

Теорема 3.1. *В предположении, что $\lambda(t) \geqslant \delta > 0$ для некоторого δ и всех $t \geqslant 0$, цепь Маркова $\{X_i; i = 0, 1, \ldots\}$ является возвратной по Харрису.*

Доказательство. Воспользуемся следующим признаком возвратности по Харрису: если любая ограниченная гармоническая функция — константа, то данная цепь либо диссипативна, либо возвратна по Харрису (см. [6, теорема 3.8 (ii)]). Нам потребуется исключить диссипативность (см. [6, определение 3.3]).

Пусть $h(u)$, $0 \leqslant u \leqslant 1$ — ограниченная гармоническая функция. Это значит, применительно к нашей цепи Маркова, что она удовлетворяет уравнению

$$h(u) = \int_0^1 p(u,v)h(v)\,dv.$$

Допустим, что эта функция не равна тождественно константе. Она непрерывна, так как правая часть имеет вид

$$\int_0^u h(v)\lambda(v)\frac{e^{-(\Lambda(v)-\Lambda(u))}}{1-e^{-\Lambda(1)}}\,dv + \int_u^1 h(v)\lambda(v)\frac{e^{-(\Lambda(1+v)-\Lambda(u))}}{1-e^{-\Lambda(1)}}\,dv$$
$$= \frac{e^{\Lambda(u)}}{1-e^{-\Lambda(1)}}\left(\int_0^u h(v)\lambda(v)e^{-\Lambda(v)}\,dv + \int_u^1 h(v)\lambda(v)e^{-\Lambda(1+v)}\,dv\right)$$

и это есть произведение двух непрерывных функций. Пусть

$$\min_{0\leqslant u\leqslant 1} h(u) = h_*, \qquad H_* = \{u\colon h(u) = h_*\},$$

тогда для любого $u \in H_*$ имеем неравенство:

$$h_* = h(u) = \left(\int_{H_*} + \int_{[0,1]\setminus H_*}\right)p(u,v)h(v)\,dv = h_* + \int_{[0,1]\setminus H_*} p(u,v)(h(v)-h_*)\,dv > h_*.$$

Здесь учтено, что плотность $p(u,v)$ всюду не равна нулю. Получено противоречие вида $h_* < h_*$.

Нам осталось исключить диссипативность. Для этого исследуем свойства потенциала

$$G(u,A) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_i \in A \mid X_0 = u), \qquad A \in \mathcal{B}([0,1]), \quad 0 \leqslant u \leqslant 1,$$

где $\mathcal{B}([0,1])$ — σ-алгебра борелевских подмножеств отрезка $[0,1]$. Наша цепь Маркова была бы диссипативной, если бы удалось найти такую строго положительную измеримую функцию $g(u)$, $0 \leqslant u \leqslant 1$, что

$$\int_0^1 g(v)G(u,dv) < \infty \quad \text{для всех } u \in [0,1].$$

Пусть $p_i(u,v)$ — плотность вероятности перехода за i шагов,

$$p_1(u,v) = p(u,v), \qquad p_{i+1}(u,v) = \int_0^1 p_i(u,t)p(t,v)\,dt.$$

Тогда, по индукции,

$$p_{i+1}(u,v) \geqslant \int_0^1 p_i(u,t)\delta\,dt = \delta, \qquad i = 0,1,\ldots.$$

Значит, для любого множества $A \in \mathcal{B}([0,1])$ положительной меры Лебега соответствующий потенциал $G(u,A) = \infty$, т.к.

$$\mathbb{P}(X_i \in A \mid X_0 = u) \geqslant \delta \int_A du = \text{const}$$

и ряд расходится.

Допустим, что найдется такая измеримая функция $g(u) > 0$, что $\int_0^1 G(u,dv)g(v) < \infty$. Обязано существовать такое положительное ε, что $g(u) \geqslant \varepsilon$ для некоторых u и мера Лебега $\text{mes}\{u\colon g(u) \geqslant \varepsilon\} > 0$. Но тогда

$$\int_0^1 G(u,dv)g(v) \geqslant \int_{u\colon g(u)\geqslant\varepsilon} G(u,dv)g(v) \geqslant \varepsilon G(u,\{u\colon g(u)\geqslant\varepsilon\}) = \infty.$$

Полученное противоречие доказывает теорему. □

Доказательство теоремы 2.2 состоит в применении многомерного варианта центральной предельной теоремы для марковской случайной последовательности (не обязательно стационарной). Приведем здесь необходимые обозначения и формулировку результата, поскольку многомерный вариант центральной предельной теоремы для цепи Маркова нам в литературе не встречался, но он легко получается известным приемом Крамера — Уолда (см., напр., [3, §6, Гл. 8]) из одномерной центральной предельной теоремы [11].

Теорема 3.2. *Пусть $\{\Phi_n; n = 0,1,\ldots\}$ — возвратная по Харрису цепь Маркова с переходным ядром $\tilde{P}(\cdot,\cdot)$ и инвариантной вероятностной мерой $\tilde{\pi}(\cdot)$, а функции $f_1(\cdot)$, $f_2(\cdot)$, $\ldots$, $f_r(\cdot)$ из E в $\mathbb{R}$ таковы, что решения $g_j(\cdot)$ соответствующего уравнения Пуассона*

$$g_j(x) - \int_E g_j(y)\tilde{P}(x,dy) = f_j(x) - \int_E f_j(y)\tilde{\pi}(dy) \tag{3.1}$$

существуют и матрица $\Sigma = (\sigma_{j,k})_{j,k=\overline{1,r}}$ *с элементами*

$$\sigma_{j,j} = \int\limits_E \left(g_j^2(x) - \left(\int\limits_E g_j(y)\tilde{P}(x,dy) \right)^2 \right) \tilde{\pi}(dx),$$
$$\sigma_{j,k} = \int\limits_E \left(g_j(x)g_k(x) - \left(\int\limits_E g_j(y)\tilde{P}(x,dy) \right) \left(\int\limits_E g_k(y)\tilde{P}(x,dy) \right) \right) \tilde{\pi}(dx), \quad j \neq k,$$

положительно определена, тогда

$$\sqrt{n} \begin{pmatrix} \frac{1}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1} f_1(\Phi_i) - \int\limits_E f_1(y)\tilde{\pi}(dy) \\ \frac{1}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1} f_2(\Phi_i) - \int\limits_E f_2(y)\tilde{\pi}(dy) \\ \vdots \\ \frac{1}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1} f_r(\Phi_i) - \int\limits_E f_r(y)\tilde{\pi}(dy) \end{pmatrix} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(\mathbf{0}, \Sigma).$$

Доказательство теоремы 2.2. Применим многомерную центральную предельную теорему для набора функций

$$f_j(u) = I(z_{j-1} \leqslant u < z_j), \quad j = 1, 2, \ldots, r.$$

Заметим, что

$$w_n(z_j) - w_n(z_{j-1}) = \sqrt{n}\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{j} f_j(X_i) - \int\limits_0^1 f_j(u)\pi(u)\,du \Big).$$

В нашем случае,

$$\Delta_j = \int\limits_0^1 f_j(u)\pi(u)\,du.$$

Рассмотрим соответствующее уравнение Пуассона (3.1), в нашем случае имеющее вид:

$$g_j(u) = I(z_{j-1} \leqslant u < z_j) - \Delta_j + (1 - e^{-\Lambda(1)})^{-1} \left(\int\limits_0^u \lambda(v) g_j(v) e^{-(\Lambda(1+v)-\Lambda(u))}\,dv + \int\limits_u^1 \lambda(v) g_j(v) e^{-(\Lambda(v)-\Lambda(u))}\,dv \right).$$

Поскольку интегралы в правой части суть непрерывные функции от u, функция $g_j(u)$ в точках z_{j-1} и z_j испытывает скачок на величину 1 и -1 соответственно. Дифференцированием по u (исключая сумму интегралов с помощью исходного уравнения) получим:

$$g_j'(u) = \lambda(u)(\Delta_j - I(z_{j-1} \leqslant u < z_j)).$$

При $j > 1$, с учетом скачка в точке z_{j-1} и z_j, имеем

$$g_j(u) = \begin{cases} \Delta_j \Lambda(u), & 0 \leqslant u < z_{j-1}, \\ \Lambda(u)(\Delta_j - 1) + 1 + \Lambda(z_{j-1}), & z_{j-1} \leqslant u < z_j, \\ (\Lambda(u) - \Lambda(1))\Delta_j, & z_j \leqslant u \leqslant 1. \end{cases}$$

Второй и третий случаи будем использовать также и для $j = 1$. Имея теперь явный вид функций $g_j(u)$ и замечая, например, что

$$\int_0^1 \Big(\int_0^1 p(u,v) g_j(v)\, dv \Big)^2 \pi(u)\, du = \int_0^1 (g_j(u) - I(z_{j-1} \leqslant u < z_j) + \Delta_j)^2 \pi(u)\, du,$$

после рутинных алгебраических упрощений получим утверждение теоремы. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Н.К. Бакиров, М.В. Сначев. *Тест: растет ли интенсивность потока заявок в СМО?* // Уфимск. матем. журн. **2**:3, 17–30 (2010).
2. А.А. Боровков. *Математическая статистика: Учебник. 4-е изд., стер.* Спб.: Лань. 2010.
3. А.А. Боровков. *Теория вероятностей: Учебное пособие. Изд. 5-е, сущ. перераб. и доп.* М.: Либроком. 2009.
4. И.А. Ибрагимов. *Одна задача оценки плотности интенсивности пуассоновского процесса* // Зап. научн. сем. ПОМИ **474**, 139–148 (2018).
5. Г.В. Мартынов. *Критерии омега-квадрат.* М.: Наука. 1978.
6. Э. Нуммелин. *Общие неприводимые цепи Маркова и неотрицательные операторы.* М.: Мир. 1988.
7. D.R. Cox, P.A.W. Lewis. *The statistical analysis of series of events.* New York: John Wiley. 1966.
8. P. Diggle. *A kernel method for smoothing point process data* // J. R. Stat. Soc., Ser. C **34**:2, 138–147 (1985).
9. S. Flaxman, Y.W. Teh, D. Sejdinovic. *Poisson intensity estimation with reproducing kernels* // Electron. J. Stat. **11**:2, 5081–5104 (2017).
10. Yu. Kutoyants. *Introduction to the statistics of Poisson processes and applications.* Springer, Cham. 2023.
11. S. Meyn, R.L. Tweedie, P.W. Glynn. *Markov Chains and Stochastic Stability.* Cambridge University Press, New York. 2009.
12. H. Ramlau-Hansen. *Smoothing counting process intensities by means of kernel functions* // Ann. Statist. **11**:2, 453–466 (1983).

Зорин Андрей Владимирович,
Нижегородский национальный исследовательский
университет им. Н.И. Лобачевского,
пр. Гагарина, 23,
603022, г. Нижний Новгород, Россия
E-mail: andrei.zorine@itmm.unn.ru