ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 18 № 4 (2026). С. 31-46.

УДК 517.53

ОЦЕНКА УКЛОНЕНИЯ ЛОГАРИФМА МАКСИМАЛЬНОГО ЧЛЕНА РЯДА ДИРИХЛЕ ПРИ КОМПОЗИЦИИ ПО АДАМАРУ

Г.А. ГАЙСИНА, А.М. ГАЙСИН, Т.И. БЕЛОУС

Аннотация. Исследуется задача об оценке степени эквивалентности логарифмов максимальных членов адамаровской композиции (измененного ряда) $\sum\limits_n a_n b_n e^{\lambda_n z}$ рядов Дирихле $\sum\limits_n a_n e^{\lambda_n z}$ и $\sum\limits_n b_n e^{\lambda_n z}$ с положительными показателями, области сходимости которых есть полуплоскость. Аналогичная задача для целых рядов Дирихле впервые изучалась А.М. Гайсиным в 2003 году — им был тогда получен критерий устойчивости максимального члена $\mu(\sigma) = \max\limits_{n\geqslant 1}\{|a_n|e^{\lambda_n\sigma}\}$. Этот результат оказался полезным при изучении асимптотических свойств ряда Дирихле на произвольных кривых, уходящих в бесконечность, а именно при доказательстве известной гипотезы Полиа.

Как в случае целых рядов Дирихле, и в случае рядов, сходящихся лишь в полуплоскости, в задачах такого типа ключевую роль играют формулы А.Ф. Леонтьева для коэффициентов. Функции соответствующей биортогональной системы содержат множитель — обратную величину производной характеристической функции в точках λ_n, $n \geqslant 1$. Это обстоятельство естественным образом и приводит к рассматриваемой здесь постановке задачи о количественной характеристике устойчивости максимального члена. Этот вопрос актуален с точки зрения его приложений к проблеме о минимуме модуля целой трансцендентной функции и к другим близким задачам анализа и комплексной динамики.

В терминах оценки уклонения получено условие того, чтобы логарифм максимального члена ряда Дирихле на асимптотическом множестве был эквивалентным логарифму максимального члена измененного ряда.

Ключевые слова: ряд Дирихле, полуплоскость сходимости, максимальный член, адамаровская композиция, оценка уклонения, асимптотическое множество.

Mathematics Subject Classification: 30D10

1. Введение

Устойчивость максимального члена ряда Дирихле

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n s}, \qquad 0 < \lambda_n \uparrow \infty, \tag{1.1}$$

G.A. Gaisina, A.M. Gaisin, T.I. Belous, Estimate for deviation of logarithm of maximal term in Dirichlet series under Hadamard composition.

© Гайсина Г.А., Гайсин А.М., Белоус Т.И. 2026.

Работа Гайсиной Г.А. (разделы 3, 4) выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России (грант НОМЦ ПФО, соглашение от 20 февраля 2026 года № 075-02-2026-1332).

Поступила 2 февраля 2026 г.

абсолютно сходящегося во всей плоскости, впервые исследована в [4]. При этом свойство устойчивости максимального члена сыграло важную роль при доказательстве проблемы Полиа (более подробно об этом см. в [4]). Позже результаты работы [4] были перенесены на случай полуплоскости (см. [6]–[8]). Так, в [6] была доказана теорема об устойчивости максимального члена ряда (1.1), абсолютно сходящегося в полуплоскости $\Pi_0 = \{s : \operatorname{Re} s < 0\}$; статья [7] была посвящена применениям этой теоремы к исследованию поведения ряда Дирихле (1.1) на кривой, произвольным образом приближающейся к границе полуплоскости Π_0 — прямой сходимости. Для наглядности стоит пояснить суть рассматриваемых в [7] задач в частном случае, а именно для лакунарного степенного ряда

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{p_n}, \qquad 0 < p_n \uparrow \infty, \qquad p_n \in \mathbb{N}, \tag{1.2}$$

область сходимости которого есть единичный круг $D(0,1) = \{z : |z| < 1\}$. Пусть γ — любая кривая, начинающаяся в $D(0,1)$ и оканчивающаяся на границе $D(0,1)$ или асимптотически приближающаяся к ней, например, по спирали. Рассматривается специальный измененный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n Q'(p_n) z^{p_n}, \tag{1.3}$$

где

$$Q(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{{p_n}^2}\right).$$

При выполнении условий на $\{p_n\}$, обеспечивающих эквивалентность логарифмов максимальных членов рядов (1.2), (1.3) (т.е. при устойчивости максимального члена ряда (1.2)), в [7] показано следующее: существует последовательность $\{\xi_n\}$, $\xi_n \in \gamma$, $|\xi_n| \to 1$, такая, что

$$\ln M_f(|\xi_n|) = (1 + o(1)) \ln |f(\xi_n)|,$$

где

$$M_f(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|, \qquad 0 < r < 1.$$

Применениям результатов работы [8] посвящены и более поздние публикации [1], [2], [9], где были доказаны теоремы о более сильной регулярности роста суммы ряда Дирихле (1.1), в частности, ряда (1.2).

Как видно, в [6] устойчивость максимального члена ряда Дирихле (1.1) (или ряда (1.2)) рассматривается в связи с конкретными задачами, исследуемыми в [1], [2], [7]–[9]. По этой причине достаточно было рассматривать только последовательности $\Lambda = \{\lambda_n\}$, где λ_n являются нулями целой функции конечного порядка. Однако проблема устойчивости максимального члена является и самостоятельной задачей. Поэтому условия на показатели λ_n могут быть существенно ослаблены.

Цель настоящей статьи — для достаточно широкого класса последовательностей $\Lambda = \{\lambda_n\}$ получить количественную меру устойчивости максимального члена ряда (1.1) в терминах оценки величины

$$\left|1 - \frac{\ln \mu_b^*(\sigma)}{\ln \mu(\sigma)}\right|,$$

т.е. уклонения отношения $[\ln \mu^*(\sigma)]/[\ln \mu(\sigma)]$ от единицы, где $\mu(\sigma)$ — максимальный член ряда (1.1), а $\mu_b^*(\sigma)$ — максимальный член измененного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n e^{\lambda_n s}$.

2. Определения. Основной результат

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}\,(0 < \lambda_n \uparrow \infty)$ — последовательность, удовлетворяющая условию

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln n}{\lambda_n} = 0. \tag{2.1}$$

Через $D_c(\Lambda)$ обозначим класс всех функций F, представимых в полуплоскости $\Pi_c = \{s : \operatorname{Re} s < c\}$, $-\infty < c \leqslant \infty$, рядами Дирихле

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n s}, \quad s = \sigma + it, \tag{2.2}$$

сходящимися лишь в данной полуплоскости. Из условия (2.1) следует, что ряд (2.2) сходится в полуплоскости Π_c абсолютно, а его сумма F — аналитическая в Π_c функция [11].

Наряду с рядом (2.2) введем в рассмотрение и ряд

$$F^*(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n e^{\lambda_n s}, \qquad s = \sigma + it, \tag{2.3}$$

где $B = \{b_n\}$ — последовательность комплексных чисел b_n ($b_n \neq 0$ при $n \geqslant N$), удовлетворяющая условию

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln |b_n|}{\lambda_n} = 0. \tag{2.4}$$

Тогда ряд (2.3) также абсолютно сходится в полуплоскости Π_c, а F^* — аналитическая в этой полуплоскости функция. Условие (2.4) позволяет рассматривать и ряды Дирихле $\sum\limits_{n=N}^{\infty} a_n b_n^{-1} e^{\lambda_n s}$, абсолютно сходящиеся в полуплоскости Π_c.

Если F — функция, заданная в полуплоскости Π_0 рядом (2.2), а

$$G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{\lambda_n s}, \tag{2.5}$$

то ряд (2.3) есть адамаровская композиция рядов (2.2) и (2.5), т.е.

$$(F * G)(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n e^{\lambda_n s} = F^*(s).$$

Ясно, что если $F \in D_0(\Lambda)$, то $F^* \in D_0(\Lambda)$.

Пусть $\mu(\sigma)$ и $\mu^*(\sigma)$ — максимальные члены рядов (2.2) и (2.3) соответственно. Через L обозначим класс всех непрерывных, неограниченно возрастающих на $[0, \infty)$ функций. Рассмотрим классы функций (см.[8])

$$W = \{w \in L : \int_1^{\infty} \frac{w(x)}{x^2} dx < \infty\},$$

$$\underline{W}_{\varphi} = \{w \in W : \varliminf_{t\to\infty} \varphi(t) J(t; w) = 0\},$$

$$W_{\varphi} = \{w \in W : \lim_{t\to\infty} \varphi(t) J(t; w) = 0\},$$

где $\varphi \in L$, а

$$J(t;w) = \int_t^\infty \frac{w(x)}{x^2}dx.$$

Пусть M — класс функций Φ из L, таких, что $x\Phi(x) < \Phi(kx)$ при $x \geqslant x_0$, где k — некоторая постоянная. Ясно, что все функции из M растут быстрее любой степени, т.е. x^n, $n = 1, 2, \ldots$.

Каждой функции Φ из M поставим в соответствие ее обратную функцию φ. Тогда получим новый класс функций, обозначим его через M^{-1}. Таким образом, классы $M = \{\Phi\}$ и $M^{-1} = \{\varphi\}$ состоят из взаимно обратных функций. Легко показать, что если $\varphi \in M^{-1}$, то функция $\omega(x) = \sqrt{x}$ принадлежит классу $\underline{W}_\varphi$.

Пусть $e \subset [-1, 0)$ — измеримое по мере Лебега множество. Верхней De и нижней de плотностями множества e называются величины (см. [3]):

$$De = \overline{\lim_{\sigma\to 0-}} \frac{\operatorname{mes}(e \cap [\sigma, 0))}{|\sigma|}, \qquad de = \underline{\lim_{\sigma\to 0-}} \frac{\operatorname{mes}(e \cap [\sigma, 0))}{|\sigma|}.$$

Если $0 \leqslant q < 1$, $De \leqslant q$, то множество e назовем C_q–множеством, а при $de \leqslant q$ — c_q–множеством. Пусть

$$\underline{D}_0(\Phi) = \left\{ F \in D_0(\Lambda) : \sup_{\tau>0} \underline{\lim_{\sigma\to\ 0-}} \frac{\ln \mu(\sigma)}{|\sigma|\Phi(\frac{\tau}{|\sigma|})} > 0 \right\},$$

где $\mu(\sigma)$ — максимальный член ряда (2.2).

Будем говорить, что максимальный член $\mu(\sigma)$ ряда (2.2) $B(d)$ $(B(D))$–устойчив (см. [6]), если при $\sigma \to 0-$ вне некоторого множества $e \subset [-1, 0)$ нулевой нижней плотности de (нулевой верхней плотности De) имеет место асимптотическое равенство

$$\ln \mu(\sigma) = (1 + o(1)) \ln \mu^*(\sigma).$$

Множество $A = [-1, 0) \setminus e$ называется асимптотическим множеством.

Будем говорить, что последовательность $\{b_n\}$ $(b_n \neq 0 \,\text{при}\, n \geqslant N)$ W_φ–нормальна, если найдется функция $\theta \in W_\varphi$, такая, что

$$-\ln |b_n| \leqslant \theta(\lambda_n), \qquad n \geqslant N.$$

Пусть $n(t) = \sum\limits_{\lambda_n \leqslant t} 1$ — считающая функция последовательности Λ, а $n_l(t)$ — наименьшая вогнутая мажоранта функции $\ln n(t)$. В силу условия (2.1), $n_l(t) = o(t)$ при $t \to \infty$.

В [8] доказана следующая теорема.

Теорема 2.1. *Пусть Φ — некоторая фиксированная функция из класса M, а φ — обратная к Φ функция. Пусть $n_l \in W_\varphi$, а $B = \{b_n\}$ — последовательность, удовлетворяющая условию*

$$|b_n| + \frac{1}{|b_n|} \leqslant e^{w(\lambda_n)}, \qquad n \geqslant N, \tag{2.6}$$

где $w \in W$ и такая, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi(\lambda_n) \ln |b_n|}{\lambda_n} = 0. \tag{2.7}$$

Для того, чтобы для любой функции $F \in \underline{D}_0(\Phi)$ максимальный член представляющего ее ряда (2.2) был $B(d)$ — устойчив, достаточно, а для W_φ–нормальной последовательности $\{b_n\}$ и необходимо, чтобы для некоторой функции $w \in \underline{W}_\varphi$ выполнялись оценки (2.6).

В [6] последовательность Λ была подчинена слишком жесткому условию

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln n}{\ln\lambda_n}<\infty.$$

Это означает, что $\ln n=\ln n(\lambda_n)\leqslant a\ln\lambda_n$, $n\geqslant 1$. Значит, $n_l(t)\leqslant a\ln t$ и потому $n_l\in W_\varphi$. Обратное, очевидно, не верно.

Отметим также, что условие согласования (2.7) в теореме 2.1 существенно (см. [6]).

Пусть $p>0$ — любое число, $\gamma\geqslant 0$, $M_{p\gamma}$ — класс функций $\Phi\in L$, обладающих свойством: для любых $A>1$, $B>1$ существует $K>1$ такое, что при $x\geqslant x_1$

$$AB^{(1+\gamma)p}x^{(1+\gamma)p}\Phi(x)\leqslant\Phi(Kx).$$

Отметим, что при $p=1$, $\gamma=0$ класс $M_{p\gamma}$ совпадает с классом M, который был приведен выше.

Пусть $p>0$,

$$\underline{D}_0^p(\Phi)=\left\{F\in D_0(\Lambda):\sup_{\tau>0}\varliminf_{\sigma\to\ 0-}\frac{\ln\mu(\sigma)}{|\sigma|\Phi\left(\frac{\tau}{|\sigma|^{\frac{1}{p}}}\right)}>0\right\}.$$

Ясно, что $\underline{D}_0^1(\Phi)=\underline{D}_0(\Phi)$.

Введем в рассмотрение следующий класс мажорант:

$$\underline{W}_\varphi^p=\{w\in W:\varliminf_{t\to\infty}\varphi^p(t)J(t;w)=T_p^-<\infty\},$$
$$\overline{W}_\varphi^p=\{w\in W:\overline{\lim_{t\to\infty}}\varphi^p(t)J(t;w)=T_p^+<\infty\}.$$

Последовательность $\{b_n\}$ ($b_n\neq 0$, $n\geqslant N$) назовем W_φ^p–нормальной, если найдется функция $\theta\in W_\varphi^p$, такая, что

$$-\ln|b_n|\leqslant\theta(\lambda_n),\qquad n\geqslant N.$$

Верна следующая теорема (основной результат).

Теорема 2.2. *Пусть $p>0$, $\beta>0$, $\gamma>0$, $\nu=1+\beta+\gamma$, $\alpha\in(0,1]$, $\Phi\in M_{p\gamma}$, $n_l(t)$ — функция, введенная выше. Предположим, что $n_l\in W_\varphi^{p\nu}$, причем $n_l(t)\varphi^{p\nu}(t)=o(t)$ при $t\to\infty$.*

Пусть $\{b_n\}$ — последовательность ($b_n\neq 0$ при $n\geqslant N$), удовлетворяющая условию

$$|\ln|b_n||\leqslant w(\lambda_n),\quad n\geqslant N,\tag{2.8}$$

где $w\in W$, причем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\varphi^{p\nu}(\lambda_n)\ln|b_n|}{\lambda_n}=0.\tag{2.9}$$

Предположим, что $|\sigma|^\gamma\ln\mu(\sigma)\uparrow$, $|\sigma|^\gamma\ln\mu^*(\sigma)\uparrow$ при $\sigma\to 0-$. Если для некоторой мажоранты $w\in\underline{W}_\varphi^{p\nu}$ выполняются оценки (2.8), то для любой функции $F\in\underline{D}_0^p(\Phi)$ при $\sigma\to 0-$ вне некоторого c_q–множества $e_{\alpha\beta\gamma}^p\subset[-1,0)$, $q=q(\alpha)=O(\alpha)$, $\alpha\to 0$, верна оценка

$$\left|1-\frac{\ln\mu^*(\sigma)}{\ln\mu(\sigma)}\right|\leqslant\mathrm{Const}\,|\sigma|^\gamma.\tag{2.10}$$

Вопрос: будет ли условие (2.8) с мажорантой $w\in\underline{W}_\varphi^{p\nu}$ и необходимым для того, чтобы для любой функции $F\in\underline{D}_0^{p\nu}$ вне некоторого c_q–множества $e_{\alpha\beta\gamma}^p\subset[-1,0)$ была верна оценка (2.10)?

Для любой W^p_φ–нормальной последовательности $\{b_n\}$, для которой условие (2.8) с мажорантой w из $\underline{W}^{p\nu}_\varphi$ не выполнено, существует пример функции $F \in \underline{D}^{p\nu}_0(\Phi)$, $\nu > 1$, для которой неравенство (2.10) не имеет места (этот пример строится точно так же, что и соответствующий пример из класса $\underline{D}_0(\Phi)$ (см. [8])). Однако вопрос о существовании аналогичного примера для класса $\underline{D}^p_0(\Phi)$ пока остается открытым.

3. Необходимые сведения и факты

3.1. Выпуклый полигон Ньютона. Для доказательства теоремы 2.2 нам понадобятся некоторые свойства максимального члена ряда Дирихле. Хорошо известно геометрическое описание максимального члена степенного ряда или ряда Дирихле, задающего целую функцию, через выпуклый полигон Ньютона (см., например, [8]). Аналогичная интерпретация максимального члена степенного ряда, сходящегося лишь в единичном круге, дается также в ряде работ (см., например, [12]).

Построим выпуклый полигон Ньютона для ряда Дирихле (2.2), абсолютно сходящегося лишь в полуплоскости Π_0. Для этого, предполагая, что $\sup\limits_n |a_n| = \infty$ (можно также считать, что $a_1 \neq 0$), отметим на плоскости точки $P_n = (\lambda_n, g_n)$, где $g_n = -\ln|a_n|$ (если $a_n = 0$, то полагаем $g_n = \infty$). Поскольку $F \in D_0(\Lambda)$, имеем

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln|a_n|}{\lambda_n} = 0. \tag{3.1}$$

Учитывая это, через $Q(F)$ обозначим выпуклую оболочку точек P_n, $n \geqslant 1$. Пусть $\gamma(x) = \inf\{y : (x,y) \in Q(F)\}$. Линия, описываемая уравнением $y = \gamma(x)$, $x \geqslant \lambda_1$, называется диаграммой или выпуклым полигоном Ньютона [8]. Из (3.1) следует, что диаграмма Ньютона, обозначим ее $L(F)$, есть выпуклая вниз ломаная линия.

Пусть $F \in D_0(\Lambda)$,

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n s}, \qquad \sup_n |a_n| = \infty.$$

Положим

$$\widehat{F}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n e^{\lambda_n s}, \qquad T_n = e^{-\gamma(\lambda_n)}, \quad n \geqslant 1. \tag{3.2}$$

Функция $\widehat{F}$ называется мажорантой Ньютона функции $F \in D_0(\Lambda)$.

Пусть $\gamma(\lambda_n) = G_n$, $n \geqslant 1$. Тогда $(\lambda_n, G_n) \in L(F)$. Для бесконечного множества значений λ_n, в частности, для абсцисс λ_{n_i}, $i \geqslant 1$, $n_1 = 1$, всех вершин полигона $L(F)$ имеем: $G_n = -\ln|a_n|$ (n_i называются основными индексами). Отметим, что точка $P_n = (\lambda_n, -\ln|a_n|)$ лежит либо на полигоне $L(F)$ (точка P_{n_i} обязательно лежит на полигоне), либо над ним. Угловой коэффициент отрезка, соединяющего вершины P_{n_i} и $P_{n_{i+1}}$ полигона $L(F)$, равен

$$R_i = \frac{G_{n_{i+1}} - G_{n_i}}{\lambda_{n_{i+1}} - \lambda_{n_i}}, \qquad i \geqslant 1, \quad \lambda_1 = 1.$$

Ясно, что $R_i \uparrow 0$ при $i \to \infty$. Следовательно, при $R_{i-1} \leqslant \sigma < R_i$ центральный индекс $\nu(\sigma) = n_i = \text{const}$, а $\ln\mu(\sigma) = \ln|a_{n_i}| + \lambda_{n_i}\sigma$ (см. [8], [11, гл.II, §6, п.2]). Отсюда, в частности, следует, что $\mu(\sigma) = \widehat{\mu}(\sigma)$, $\nu(\sigma) = \widehat{\nu}(\sigma)$, где $\widehat{\mu}(\sigma)$ и $\widehat{\nu}(\sigma)$ — максимальный член и центральный индекс ряда (3.2). Известно также, что функция $\ln\mu(\sigma)$ как выпуклая функция непрерывна, а при $\sup\limits_n |a_n| = \infty$ неограниченно возрастает на интервале $[-1, 0)$ (см. [8]).

Выясним, когда функции $a(\sigma) = |\sigma|^\gamma \ln \mu(\sigma)$ и $a^*(\sigma) = |\sigma|^\gamma \ln \mu^*(\sigma)$, $\gamma \geqslant 0$, будут возрастающими на некотором полуинтервале $[\sigma_0, 0) \subset [-1, 0)$ (случай $\gamma = 0$ очевиден, поскольку $\ln \mu(\sigma)$ — выпуклая возрастающая функция).

Пусть $\nu(\sigma)$ — центральный индекс ряда (2.2), а $k(\sigma)$ — центральный индекс ряда (2.3). При $R_{i-1} \leqslant \sigma < R_i$ имеем: $\nu(\sigma) = n_i$, $\ln \mu(\sigma) = -G_{n_i} + \lambda_{n_i}\sigma$, где $G_{n_i} = -\ln |a_{n_i}|$ ($G_{n_i} \downarrow -\infty$ при $i \to \infty$). Тогда $a(\sigma) = -G_{n_i}|\sigma|^\gamma - \lambda_{n_i}|\sigma|^{1+\gamma}$. Отсюда следует, что при

$$R_i \leqslant \frac{G_{n_i}}{\lambda_{n_i}} \frac{\gamma}{1+\gamma}$$

функция $a(\sigma)$ будет возрастающей на $[R_{i-1}, R_i)$, $i \geqslant 2$. Условие возрастания $a(\sigma)$ на полуинтервале $[R_1, 0)$ можно записать таким образом: для любого $i \geqslant 1$

$$\frac{G_{n_{i+1}}}{G_{n_i}} \geqslant \frac{\gamma}{1+\gamma} \left[\frac{\lambda_{n_{i+1}}}{\lambda_{n_i}} + \frac{1}{\gamma} \right] \stackrel{\text{def}}{=} c_i,$$

или, что тоже самое,

$$\frac{\ln |a_{n_{i+1}}|}{\ln |a_{n_i}|} \geqslant c_i, \quad i = 1, 2, \ldots.$$

Соответствующее условие возрастания функции $a^*(\sigma)$ на полуинтервале $[R_1^*, 0)$ ($\{R_i^*\}$, $R_i^* \uparrow 0$, $i \to \infty$, — аналогичная последовательность для ряда (2.3)) такое: для любого $i \geqslant 1$

$$\frac{\ln |a_{k_{i+1}} b_{k_{i+1}}|}{\ln |a_{k_i} b_{k_i}|} \geqslant \frac{\gamma}{1+\gamma} \left[\frac{\lambda_{k_{i+1}}}{\lambda_{k_i}} + \frac{1}{\gamma} \right] \stackrel{\text{def}}{=} c_i^*,$$

где $k_i = k(\sigma)$ при $R_{i-1}^* \leqslant \sigma < R_i^*$.

3.2. Лемма типа Бореля — Неванлинны. Пусть L — класс всех непрерывных, неограниченно возрастающих на $[0, \infty)$ функций, а W — класс сходимости, введенный выше. Для функции w из W введем обозначение

$$J(t; w) = \int_t^\infty \frac{w(x)}{x^2} dx.$$

Через обозначим подкласс L, состоящий из функций Ф, для которых (см. [3]):

$$\varphi(2t) \leqslant c\varphi(t), \quad 0 < c < \infty; \qquad \varphi(t) t^{-1} \ln t = o(1), \quad t \to \infty,$$

где функция φ является обратной к Ф.

Хорошо известна следующая теорема Бореля — Неванлинны, которая широко используется для исследования асимптотических свойств функций, заданных рядами Дирихле (см. [5], [10]).

Теорема 3.1 (Теорема Бореля — Неванлинны). *Пусть на $[r_0, \infty)$ задана непрерывная функция $u(r)$, неубывающая, стремящаяся к $+\infty$ при $r \to \infty$. Пусть $\varphi(u)$ — непрерывная, положительная функция, заданная на $[u_0, +\infty)$ ($u_0 = u(r_0)$), невозрастающая, стремящаяся к 0 при $u \to \infty$, причем*

$$\int_{u_0}^\infty \varphi(u) du < \infty.$$

Тогда для любого $r > r_0$, кроме, возможно, конечной меры[1], *выполняется неравенство*

$$u(r + \varphi(u(r))) < u(r) + 1.$$

Имеются разные версии этой теоремы (см. [5]). Здесь нам понадобятся утверждения такого типа для полуинтервала $[-1, 0)$.

В работе [3] доказан следующий вариант теоремы Бореля — Неванлинны.

Лемма 3.1. *Пусть $u(t)$ — непрерывная, неубывающая на $[-1, 0)$ функция, $u(t) \to \infty$ при $t \to 0-$, причем для некоторой функции Φ из класса H выполняется условие*

$$\overline{\lim_{t\to 0-}} e^{u(t)}\Phi^{-1}\left(\frac{1}{|t|}\right) > 0.$$

Если для некоторой функции w из W имеет место асимптотическое соотношение

$$\varphi(t)J(t; w) = o(1), \quad t \to \infty,$$

то при $t \to 0-$ вне некоторого множества $e \subset [-1, 0)$, $de = 0$, справедливо равенство

$$u(t + \delta(t)) = u(t) + o(1), \quad \delta(t) = \frac{w(v(t))}{v(t)},$$

где $v = v(t)$ — решение уравнения

$$w(v) = e^{u(t)}. \tag{3.3}$$

В работе [6] доказан более общий вариант леммы 3.1 (см. ниже), в которой мы уточним основное асимптотическое равенство, а именно, получим конкретную оценку величины $o(1)$.

Лемма 3.2. *Пусть $u(t)$ — непрерывная, неубывающая на $[-1, 0)$ функция, $u(t) \to \infty$ при $t \to 0-$. Пусть $w \in W$, а $v = v(t)$ — решение уравнения (3.3).*

Если

$$\frac{w(v(t))}{|t|v(t)} = o(1), \quad t \to 0-,$$

а для некоторой последовательности $\{\tau_j\}$, $\tau_j \uparrow 0$, выполняется условие

$$\lim_{\tau_j\to 0-} \frac{1}{|\tau_j|}J(v_j; w) = 0, \qquad v_j = v(\tau_j), \tag{3.4}$$

то при $t \to 0-$ вне некоторого множества $e \subset [-1, 0)$,

$$\operatorname{mes}(e \cap [\tau_j, 0)) = o(|\tau_j|), \quad \tau_j \to 0-,$$

имеет место асимптотическое равенство

$$u\left(t + \frac{w(v(t))}{v(t)}\right) = u(t) + o(1).$$

Доказательство теоремы 2.2 основано на качественно новой версии леммы 3.2 типа Бореля — Неванлинны.

[1] В теоремах типа Бореля — Неванлинны исключительные множества $E \subset \mathbb{R}_+$ или $e \subset [-1, 0)$ – в случае полуинтервала, представляют собой объединение отрезков вида $[a_n, a'_n]$, попарно не имеющих общих внутренних точек (см. [5]).

Лемма 3.3. *Пусть $u(t)$ — непрерывная, неубывающая на $[-1,0)$ функция, $u(t)\to\infty$ при $t\to 0-$, $w\in W$, а $v=v(t)$ — решение уравнения*

$$w(v)=e^{u(t)}. \tag{3.5}$$

Зафиксируем $\beta\geqslant 0$, $\gamma\geqslant 0$. Пусть $\nu=1+\beta+\gamma$, $\alpha\in(0,1]$.

Если

$$\frac{w(v(t))}{|t|^{1+\gamma}v(t)}=o(1),\quad t\to 0-,$$

а для некоторой последовательности $\{\tau_j\}$, $\tau_j\uparrow 0$,

$$\lim_{\tau_j\to 0-}\frac{1}{|\tau_j|^{\nu}}J(v_j;w)=\widehat{T}_{\nu}^{-}<\infty,\qquad v_j=v(\tau_j),\qquad \nu=1+\beta+\gamma, \tag{3.6}$$

то при $t\to 0-$ вне некоторого c_q–множества $e_{\alpha\beta\gamma}\subset[-1,0)$, $q=q(\alpha)=O(\alpha)$, $\alpha\to 0$,

$$\overline{\lim_{\tau_j\to 0-}}\frac{\operatorname{mes}(e_{\alpha\beta\gamma}\cap[\tau_j,0])}{|\tau_j|}\leqslant q<1$$

при $0<\alpha\leqslant\alpha_0<1$, верна оценка[1]

$$u\left(t+d|t|^{-\gamma}\frac{w(v(t))}{v(t)}\right)<u(t)+\frac{|t|^{\beta}}{\alpha}.$$

Отметим, что условие (3.4) из леммы 3.2 в лемме 3.3 заменено на $\widehat{T}_{\nu}^{-}<\infty$.

Доказательство. Имеем $w\in W$, $w(v(t))=o(|t|^{1+\gamma}v(t))$, $t\to 0-$, и выполняется условие (3.6). Покажем, что вне некоторого c_q–множества $e_{\alpha\beta\gamma}\subset[-1,0)$ верно неравенство

$$u(t+d|t|^{-\gamma}\delta(t))<u(t)+\frac{|t|^{\beta}}{\alpha}, \tag{3.7}$$

где $\delta(t)=\dfrac{w(v(t))}{v(t)}$, $0<d<\infty$.

Пусть $e_{\alpha\beta\gamma}$ — замкнутое множество, содержащееся в $[-1,0)$, на котором

$$u(t+d|t|^{-\gamma}\delta(t))\geqslant u(t)+\frac{|t|^{\beta}}{\alpha}. \tag{3.8}$$

Пусть $e(t)=e_{\alpha\beta\gamma}\cap[t,0)$. Если $e(t)=\emptyset$ при некотором $t\in[-1,0)$, то все доказано. В противном случае положим

$$t_1=\inf\{t:t\in e_{\alpha\beta\gamma}\},\qquad t_1'=\inf\left\{t:u(t)=u(t_1)+\frac{|t_1|^{\beta}}{\alpha}\right\}.$$

Тогда $0<t_1'-t_1\leqslant d|t_1|^{-\gamma}\delta(t_1)$.

Пусть

$$t_2=\inf\{t:t\in e(t_1')\},\qquad t_2'=\inf\left\{t:u(t)=u(t_2)+\frac{|t_2|^{\beta}}{\alpha}\right\}.$$

Тогда с учетом (3.8) получим, что

$$0<t_2'-t_2\leqslant d|t_2|^{-\gamma}\delta(t_2),\qquad u(t_2)-u(t_1)\geqslant\frac{|t_1|^{\beta}}{\alpha}.$$

Рассуждая по индукции, находим последовательности $\{t_n\}$, $\{t_n'\}$ такие, что

$$0<t_{n+1}'-t_{n+1}\leqslant d|t_{n+1}|^{-\gamma}\delta(t_{n+1}),\qquad u(t_{n+1})-u(t_n)\geqslant\frac{|t_n|^{\beta}}{\alpha}, \tag{3.9}$$

[1]Так как $w(v(t))=o(|t|^{1+\gamma}v(t))$ при $t\to 0-$, выражение в круглых скобках из левой части этого неравенства отрицательно при $t_0\leqslant t<0$.

причем

$$e_{\alpha\beta\gamma} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} [t_n, t'_n].$$

Пусть $t \in (t_n, t_{n+1}]$. Тогда с учетом (3.9) имеем

$$\operatorname{mes}(e_{\alpha\beta\gamma} \cap [t, 0)) = \begin{cases} t'_n - t + \sum\limits_{i=n+1}^{\infty} d|t_i|^{-\gamma}\delta_i, & \text{если} \quad t \in (t_n, t'_n], \\ \sum\limits_{i=n+1}^{\infty} d|t_i|^{-\gamma}\delta_i, & \text{если} \quad t \in (t'_n, t_{n+1}], \end{cases} \tag{3.10}$$

где $\delta_i = \dfrac{w(v_i)}{v_i}$, $v_i = v(t_i)$, $i \geqslant 1$.

Если $2v_i \leqslant v_{i+1}$, то

$$\delta_i \leqslant w(v_i) 2 \int_{v_i}^{v_{i+1}} \frac{dx}{x^2} \leqslant 2 \int_{v_i}^{v_{i+1}} \frac{w(x)}{x^2} dx \leqslant 2\left(\frac{w(v_{i+1})}{v_{i+1}} - \frac{w(v_i)}{v_i}\right) + 4 \int_{v_i}^{v_{i+1}} \frac{w(x)}{x^2} dx.$$

В противном случае, учитывая (3.5), (3.9), получаем, что

$$\begin{aligned} \delta_i &\leqslant \alpha|t_i|^{-\beta} \frac{w(v_i)}{v_i}(u(t_{i+1}) - u(t_i)) \leqslant \alpha|t_i|^{-\beta} \frac{w(v_i)}{v_i}(\ln w(v_{i+1}) - \ln w(v_i)) \\ &\leqslant 2\alpha|t_i|^{-\beta} \int_{v_i}^{v_{i+1}} \frac{w(x)}{x} d\ln w(x) = 2\alpha|t_i|^{-\beta}\left(\frac{w(v_{i+1})}{v_{i+1}} - \frac{w(v_i)}{v_i} + \int_{v_i}^{v_{i+1}} \frac{w(x)}{x^2} dx\right). \end{aligned}$$

Значит, всегда имеет место оценка

$$\delta_i \leqslant 2d_i\left(\frac{w(v_{i+1})}{v_{i+1}} - \frac{w(v_i)}{v_i} + 2\int_{v_i}^{v_{i+1}} \frac{w(x)}{x^2} dx\right), \quad i \geqslant 1, \tag{3.11}$$

где $d_i = \max(1, \alpha|t_i|^{-\beta})$.

Оценим теперь величину $\operatorname{mes}(e_{\alpha\beta\gamma} \cap [\tau_j, 0))$. Если $t_n < \tau_j \leqslant t_{n+1}$, то из (3.10), (3.11) вытекает, что

$$\begin{aligned} &\frac{1}{|\tau_j|}\operatorname{mes}(e_{\alpha\beta\gamma} \cap [\tau_j, 0)) \leqslant \frac{t'_n - \tau_j}{|\tau_j|} + \frac{4dd_j|\tau_j|^{-\gamma}}{|\tau_j|} J(v_j; w), \quad \text{если } \tau_j \in (t_n, t'_n]; \\ &\frac{1}{|\tau_j|}\operatorname{mes}(e_{\alpha\beta\gamma} \cap [\tau_j, 0)) \leqslant \frac{4dd_j|\tau_j|^{-\gamma}}{|\tau_j|} J(v_j; w), \qquad \text{если } \tau_j \in (t'_n, t_{n+1}]. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Напомним, что здесь $v_j = v(\tau_j)$, $v = v(t)$, — решение уравнения (3.5). Поскольку

$$0 < t'_n - t_n < d|t_n|^{-\gamma} \frac{w(v(t_n))}{v(t_n)},$$

при $t_n \to 0-$ имеем

$$0 < 1 - \left|\frac{t'_n}{t_n}\right| < d\frac{w(v(t_n))}{|t_n|^{1+\gamma} v(t_n)} \to 0.$$

Следовательно, $t'_n = (1 + o(1))t_n$ при $t_n \to 0-$. Значит, $t'_n - \tau_j = o(|\tau_j|)$ при $\tau_j \to 0-$. Следовательно, принимая во внимание условие (3.6), из (3.12) получаем, что при $0 < \alpha \leqslant \alpha_0 < 1$ вне множества $e_{\alpha\beta\gamma} \subset [-1, 0)$,

$$de_{\alpha\beta\gamma} \leqslant \varlimsup_{\tau_j \to 0-} \frac{\operatorname{mes}(e_{\alpha\beta\gamma} \cap [\tau_j, 0))}{|\tau_j|} \leqslant 4\alpha d \lim_{\tau_j \to 0-} \frac{1}{|\tau_j|^{\nu}} J(v_j; w) = 4\alpha d\widehat{T}_{\nu}^{-} \leqslant q < 1,$$

верна требуемая оценка

$$u(t+d|t|^{-\gamma}\delta(t)) < u(t) + \frac{|t|^{\beta}}{\alpha}, \quad \beta \geqslant 0, \quad \gamma \geqslant 0.$$

Лемма доказана. □

4. Доказательство теоремы 2.2

Доказательство теоремы 2.2. Пусть $\nu = 1+\beta+\gamma$ и выполняется условие (2.9) и

$$|b_n| + \frac{1}{|b_n|} \leqslant e^{w(\lambda_n)}, \quad n \geqslant N, \tag{4.1}$$

где $w = w(x)$ — некоторая функция из $\underline{W}^{p\nu}_{\varphi}$. Можно считать, что $w(x)\varphi^{p\nu}(x) = o(x)$ при $x \to \infty$ (это следует из (2.9), если в (4.1) мажоранту выбрать подходящим образом). Положим $w^*(x) = n_l(x) + w(x)$. Ясно, что $w^* \in \underline{W}^{p\nu}_{\varphi}$, $w^*(x)\varphi^{p\nu}(x) = o(x)$ при $x \to \infty$. Пусть $v = v(\sigma)$ — решение уравнения

$$w^*(v) = |\sigma|^{\gamma} \ln \mu(\sigma), \quad \gamma > 0. \tag{4.2}$$

Ясно, что $v(\sigma) \uparrow \infty$ при $\sigma \uparrow 0$. Поскольку $w^* \in \underline{W}^{p\nu}_{\varphi}$, найдется последовательность $\{\tau_j\}$, $\tau_j \uparrow 0$, такая, что

$$\lim_{v_j \to \infty} \varphi^{p\nu}(v_j) J(v_j; w^*) = T^{-}_{p\nu} < \infty, \tag{4.3}$$

где $v_j = v(\tau_j) \to \infty$ при $\tau_j \to 0-$,

$$J(v_j; w^*) = \int\limits_{v_j}^{\infty} \frac{w^*(x)}{x^2} dx.$$

Далее, уравнение (4.2) можно записать в виде

$$w^*(v) = e^{u(\sigma)}, \qquad u(\sigma) = \ln|\sigma|^{\gamma} + \ln\ln\mu(\sigma). \tag{4.4}$$

По условию теоремы $u(\sigma) \uparrow \infty$ при $\sigma \uparrow 0$. Далее, поскольку $F \in \underline{D}^{p}_{0}(\Phi)$, тогда, кроме того, для некоторого $\tau > 0$

$$\varliminf_{\sigma \to\ 0-} \frac{e^{u(\sigma)}}{|\sigma|\Phi\left(\frac{\tau}{|\sigma|^{\frac{1}{p}}}\right)} > 0, \quad p > 0.$$

Следовательно, учитывая (4.4) и то, что $\Phi \in M_{p\gamma}$, отсюда при некоторых достаточно малых $\varepsilon_o > 0$, $\varepsilon_1 > 0$ и $\sigma' < \sigma < 0$ имеем

$$w^*(v(\sigma)) = |\sigma|^{\gamma} \ln \mu(\sigma) > \varepsilon_o |\sigma|^{1+\gamma} \Phi\left(\frac{\tau}{|\sigma|^{\frac{1}{p}}}\right) > \varepsilon_o \Phi\left(\frac{\varepsilon_1}{|\sigma|^{\frac{1}{p}}}\right).$$

Поскольку $w^*(x) = o(x)$ при $x \to \infty$, из этих оценок получаем, что

$$\frac{1}{|\sigma|} < \varepsilon_1^{-p} \varphi^{p}(v), \tag{4.5}$$

где $v = v(\sigma)$, $\sigma' < \sigma'' < \sigma < 0$. Последняя оценка верна, в частности, для $\sigma = \tau_j$, $j \geqslant j_0$. Так что из (4.2)–(4.4) видим, что для функции w^* условия (3.5), (3.6) леммы 3.3 выполнены.

Кроме того, из (4.5) следует, что

$$0 < \frac{w^*(v(\sigma))}{|\sigma|^{1+\gamma}v(\sigma)} < \varepsilon_1^{-p\nu}\frac{\varphi^{p\nu}(v(\sigma))w^*(v(\sigma))}{v(\sigma)} \to 0$$

при $\sigma \to 0-$. Поэтому, применяя лемму 3.3 для $h = \dfrac{3|\sigma|^{-\gamma}w^*(v)}{v}$, $v = v(\sigma)$, при $0 < \alpha \leqslant \alpha_1 < 1$ и $\sigma \to 0-$ вне некоторого множества $e_1 \subset [-1, 0)$, $e_1 = e_1^p(\alpha, \beta, \gamma)$,

$$\overline{\lim_{\tau_j \to 0-}} \frac{\operatorname{mes}(e_1 \cap [\tau_j, 0))}{|\tau_j|} \leqslant q_1 < \frac{1}{4},$$

получаем асимптотическую оценку

$$\ln|\sigma + h|^\gamma + \ln\ln\mu(\sigma + h) < \ln|\sigma|^\gamma + \ln\ln\mu(\sigma) + \frac{|\sigma|^\beta}{\alpha},$$

где $\beta > 0$, $\gamma > 0$. Так как $w^*(v(\sigma)) = o(|\sigma|^{1+\gamma})v(\sigma)$ при $\sigma \to 0-$, имеем

$$-\gamma\ln|\sigma + h| + \gamma\ln|\sigma| = -\gamma\ln\left|1 - \frac{h}{|\sigma|}\right| = 3\gamma\frac{w^*(v)}{|\sigma|^{1+\gamma}v} = r_\gamma(\sigma),$$

$r_\gamma(\sigma) \to 0$ при $\sigma \to 0-$, $v = v(\sigma)$. Отсюда получаем, что при $\sigma \to 0-$ вне e_1

$$\mu(\sigma + h) < \mu(\sigma)^{1+o(1)}, \qquad h = 3|\sigma|^{-\gamma}\frac{w^*(v)}{v}, \qquad v = v(\sigma). \tag{4.6}$$

Пусть

$$R_v = \sum_{\lambda_n > v} |a_n|e^{\lambda_n\sigma}.$$

Далее, имеем $\ln n = \ln n(\lambda_n) \leqslant n_l(\lambda_n)$. Поскольку функция $n_l(t)$ вогнутая, и кроме того,

$$n_l(\lambda_n) \leqslant \frac{w^*(v)}{v}\lambda_n \tag{4.7}$$

при $\lambda_n \geqslant v$, при $\sigma \in [\sigma_0, 0) \setminus e_1$ находим

$$R_v \leqslant \mu(\sigma + h)\sum_{\lambda_n > v} e^{-h\lambda_n} \leqslant C_0\mu(\sigma + h)\exp[\max_{t \geqslant v}\psi(t)], \qquad h = 3|\sigma|^{-\gamma}\frac{w^*(v)}{v}, \qquad v = v(\sigma),$$

где

$$\psi(t) = 2n_l(t) - ht, \qquad C_0 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Отсюда, если учесть оценку (4.7), при $\sigma \to 0-$ будем иметь

$$\max_{t \geqslant v}(\psi(t)) \leqslant 2\frac{w^*(v)}{v}t - ht \leqslant -3|\sigma|^{-\gamma}w^*(v)(1 + o(1)) < -2|\sigma|^{-\gamma}w^*(v), \quad v = v(\sigma).$$

Тогда с учетом (4.2), (4.6) при $\sigma \to 0-$ вне e_1 получаем, что при $\sigma \in [\sigma_1, 0) \setminus e_1$

$$R_v \leqslant C_0[\mu(\sigma)]^{1+o(1)}\exp[-2|\sigma|^{-\gamma}w^*(v)] = [\mu(\sigma)]^{-1+o(1)} < 1. \tag{4.8}$$

Значит, при $\sigma \in [\sigma_1, 0) \setminus e_1$ получаем, что $\lambda_{\nu(\sigma)} \leqslant v(\sigma)$, где $\nu = \nu(\sigma)$ — центральный индекс ряда (2.2). Тогда при $\sigma \to 0-$ вне e_1 с учетом (4.1), (4.2) имеем

$$\mu(\sigma) = |a_\nu|e^{\lambda_\nu\sigma} = |a_\nu b_\nu|e^{\lambda_\nu\sigma}|b_\nu|^{-1} \leqslant \mu^*(\sigma)e^{w^*(v)} = \mu^*(\sigma)\mu(\sigma)^{|\sigma|^\gamma}, \quad 0 < \gamma.$$

Следовательно, при $\sigma \to 0-$ вне $e_1 \subset [-1, 0)$ получаем оценку

$$(1 - |\sigma|^\gamma)\ln\mu(\sigma) \leqslant \ln\mu^*(\sigma). \tag{4.9}$$

С другой стороны, поскольку $|b_n| \leqslant e^{w^*(\lambda_n)}$, $n \geqslant 1$, имеем

$$\mu^*(\sigma) = |a_k b_k| e^{\lambda_k \sigma} \leqslant \mu(\sigma) e^{w^*(\lambda_k)}, \tag{4.10}$$

где $k = k(\sigma)$ — центральный индекс ряда (2.3).

Пусть $\chi = \chi(\sigma)$ — решение уравнения

$$w^*(\chi) = 2|\sigma|^\gamma \ln \mu^*(\sigma), \tag{4.11}$$

а

$$R^*_\chi = \sum_{\lambda_n > \chi} |a_n||b_n| e^{\lambda_n \sigma}.$$

Получим для R^*_χ оценку типа (4.8).

Пусть $\{\tau_j\}$ — последовательность, введенная выше. Из (4.9) при $\sigma \in [\sigma_2, 0) \setminus e_1$ имеем:

$$\ln \mu(\sigma) < 2 \ln \mu^*(\sigma). \tag{4.12}$$

Если для некоторой подпоследовательности $\{\tau_{j_n}\}$ последовательности $\{\tau_j\}$ имеют место оценки $\ln \mu(\tau_{j_n}) < 2 \ln \mu^*(\tau_{j_n})$, то, учитывая (4.2), (4.11), получаем, что

$$w^*(v(\tau_{j_n})) = |\tau_{j_n}|^\gamma \ln \mu(\tau_{j_n}) < 2|\tau_{j_n}|^\gamma \ln \mu^*(\tau_{j_n}) = w^*(\chi(\tau_{j_n})), \quad n \geqslant 1.$$

Следовательно, $v(\tau_{j_n}) < \chi(\tau_{j_n})$, $n \geqslant 1$. Далее, поскольку $F \in \underline{D}^p_0(\Phi)$, $\Phi \in M_{p\gamma}$, при $\sigma_3 < \sigma < 0$ получаем

$$\frac{1}{|\sigma|} \leqslant A_p \varphi^p(v), \quad v = v(\sigma).$$

Отсюда, в частности, имеем

$$\frac{1}{|\tau_{j_n}|} < A_p \varphi^p(v(\tau_{j_n})), \quad n \geqslant n_1. \tag{4.13}$$

Но $v(\tau_{j_n}) < \chi(\tau_{j_n})$, $n \geqslant 1$. Следовательно, из (4.3), (4.13) получаем

$$\varlimsup_{\tau_{j_n} \to 0-} \frac{1}{|\tau_{j_n}|^\nu} J(\chi(\tau_{j_n}); w^*) \leqslant A_p^\nu \lim_{\tau_{j_n} \to 0-} \varphi^{p\nu}(v_{j_n}) J(v_{j_n}; w^*) = A_p^\nu T^-_{p\nu} < \infty.$$

Учитывая это, применим лемму 3.3 к функции $u(\sigma) = \ln[2|\sigma|^\gamma \ln \mu^*(\sigma)]$. Тогда при $\sigma \to 0-$ вне некоторого множества $e_2 \subset [-1, 0)$, $e_2 = e_2^p(\alpha, \beta, \gamma)$, $0 < \alpha \leqslant \alpha_2 < 1$,

$$\varlimsup_{\tau_{j_n} \to 0-} \frac{\operatorname{mes}(e_2 \cap [\tau_{j_n}, 0))}{|\tau_{j_n}|} \leqslant q_2 < \frac{1}{4}, \tag{4.14}$$

получаем оценку

$$\mu^*(\sigma + h) < [\mu^*(\sigma)]^{1+o(1)}, \quad h = 6|\sigma|^\gamma \frac{w^*(\chi)}{\chi}, \quad \chi = \chi(\sigma). \tag{4.15}$$

Отсюда тем же способом, каким была получена оценка (4.8), получаем, что при $\sigma \to 0-$ вне e_2, $e_2 = e_2^p(\alpha, \beta, \gamma)$,

$$R^*_\chi < [\mu^*(\sigma)]^{-1+o(1)} < 1. \tag{4.16}$$

Пусть теперь для любого τ_j, $j \geqslant j_1$, выполняется неравенство $2 \ln \mu^*(\tau_j) \leqslant \ln \mu(\tau_j)$. Тогда рассмотрим множество $A_j \subset [-1, 0)$,

$$A_j = \{x : x \geqslant \tau_j, \quad |\tau_j|^\gamma \ln \mu(\tau_j) < |x|^\gamma \ln \mu^*(x)\}, \quad j \geqslant j_1.$$

Поскольку $\tau_j \notin A_j$ при $j \geqslant j_1$, из непрерывности функции $|x|^\gamma \ln \mu^*(x)$ следует, что

$$|\tau_j|^\gamma \ln \mu(\tau_j) = 2|x_j|^\gamma \ln \mu^*(x_j), \qquad x_j = \inf\{x : x \in A_j\}, \quad x_j \geqslant \tau_j.$$

Следовательно, из (4.2), (4.11) следует, что $w^*(v(\tau_j)) = w^*(\chi(x_j))$, т.е. $v(\tau_j) = \chi(x_j)$, $j \geqslant j_1$. Ясно, что $\tau_j \in e_1$, при достаточно больших j. Действительно, с одной стороны $2\ln\mu^*(\tau_j) \leqslant \ln\mu(\tau_j)$, $j \geqslant j_1$. С другой стороны, при $\sigma \in [\sigma_2, 0) \setminus e_1$ имеет место неравенство (4.12). Если бы для какой-то последовательности $j_n \to \infty$ точки τ_{j_n} не принадлежали e_1, то имели бы оценку (4.12) при $\sigma = \tau_{j_n}$, что невозможно. Итак, $\tau_j \in e_1$ при $j \geqslant j_2$. Убедимся теперь, что $x_j \in e_1$ при $j \geqslant j_3$. Действительно, для любого $x_j \in [\sigma_2, 0) \setminus e_1$ верна оценка (4.12), что равносильно двойному соотношению

$$|x_j|^\gamma \ln\mu(x_j) < 2|x_j|^\gamma \ln\mu^*(x_j) = |\tau_j|^\gamma \ln\mu(\tau_j).$$

Так как $|x|^\gamma \ln\mu(x) \uparrow$ при $x \uparrow 0$, отсюда видно, что $\tau_j > x_j$ ($|\tau_j| < |x_j|$). Но по определению A_j имеем неравенство $x_j \geqslant \tau_j$. Полученное означает, что $x_j \in e_1$ при $j \geqslant j_3$.

Далее, так $|\tau_j| > |x_j|$, а τ_j, x_j принадлежат e_1, тогда

$$\varlimsup_{\tau_j \to 0-} \frac{\operatorname{mes}(e_1 \cap [\tau_j, 0))}{|\tau_j|} \leqslant q_1 < \frac{1}{4}, \quad \varlimsup_{\tau_j \to 0-} \frac{x_j - \tau_j}{|\tau_j|} \leqslant q_1 < \frac{1}{4}. \tag{4.17}$$

Отсюда следует, что $|x_j| \geqslant (1 - q_1)(1 + o(1))|\tau_j|$, $j \to \infty$. Следовательно, если учесть равенство $\chi(x_j) = v(\tau_j)$, $j \geqslant j_1$, (4.13) и (4.3),

$$\frac{1}{|x_j|^\nu} J(\chi(x_j); w^*) \leqslant \frac{1}{(1 - q_1)(1 + o(1))|\tau_j|^\nu} J(v(\tau_j); w^*) = O(1), \quad j \to \infty.$$

Таким образом, функции $w^* = w^*(t)$ и $u(\sigma) = \ln[2|\sigma|^\gamma \ln\mu^*(\sigma)]$ удовлетворяют условиям (3.5), (3.6) леммы 3.3. Кроме того, $w^*(x)\varphi^{p\nu}(x) = o(x)$, $x \to \infty$. Из (4.5) тогда получим $w^*(v(t_j) = o(|t|^{1+\gamma} v(t))$ при $t \to 0-$. Так что все условия леммы 3.3 выполнены. Согласно этой лемме оценка (4.15), а следовательно, и (4.16) имеют место при $\sigma \to 0-$ вне некоторого множества $e_3 \subset [-1, 0)$, $e_3 = e_3^p(\alpha, \beta, \gamma)$, $0 < \alpha \leqslant \alpha_3 < 1$,

$$\varlimsup_{x_j \to 0-} \frac{\operatorname{mes}(e_3 \cap [x_j, 0))}{|x_j|} < \frac{1}{8}.$$

С учетом (4.17) тогда получим

$$\varlimsup_{\tau_j \to 0-} \frac{\operatorname{mes}(e_3 \cap [\tau_j, 0))}{|\tau_j|} \leqslant q_3 < \frac{3}{8}. \tag{4.18}$$

Таким образом, согласно (4.14), (4.18) при $\sigma \to 0-$ вне некоторого множества $e_4 = e_2 \cup e_3$,

$$\varlimsup_{\tau_{j_n} \to 0-} \frac{\operatorname{mes}(e_4 \cap [\tau_{j_n}, 0))}{|\tau_{j_n}|} \leqslant q_4 < \frac{5}{8},$$

справедлива оценка (4.16). Это означает, $\lambda_{k(\sigma)} < \chi(\sigma)$, если $\sigma \in [\sigma_3, 0) \setminus e_4$. Следовательно, из (4.10) получаем, что для таких σ

$$\mu^*(\sigma) \leqslant \mu(\sigma) e^{w^*(\chi(\sigma))} = \mu(\sigma)[\mu^*(\sigma)]^{2|\sigma|^\gamma},$$

т.е.

$$(1 - 2|\sigma|^\gamma) \ln\mu^*(\sigma) \leqslant \ln\mu(\sigma). \tag{4.19}$$

Из оценок (4.9), (4.19) окончательно получаем, что при $\sigma \to 0-$ вне множества $e = e_1 \cup e_4$, $de \leqslant \dfrac{7}{8}$, выполняется требуемая оценка

$$\left|1 - \frac{\ln\mu^*(\sigma)}{\ln\mu(\sigma)}\right| \leqslant 5|\sigma|^\gamma.$$

Теорема 2.2 полностью доказана. □

Пусть область сходимости степенного ряда

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n z^n \tag{4.20}$$

— единичный круг $\{z : |z|<1\}$. Сделаем замену $z=e^s$ и рассмотрим функцию $F(s)=f(e^s)$. Ясно, что $F\in D_0(\Lambda)$, где $\Lambda=\{0,1,2,\dots,n,\dots\}$. При $\operatorname{Re} s=\sigma\to 0-$ имеем

$$|z|=r\to 1-,\quad |\sigma|=|\ln r|=1-r+o(1-r).$$

Следовательно, если $F\in \underline{D}_0^p(\Phi)$, то $f\in \underline{K}^p(\Phi)$, где

$$\underline{K}^p(\Phi)=\left\{f:\sup_{\tau>0}\varliminf_{r\to\ 1-}\frac{\ln\mu_f(r)}{(1-r)\Phi\left(\frac{\tau}{(1-r)^{\frac{1}{p}}}\right)}>0\right\},\quad p>0,$$

а $\mu_f(r)$ — максимальный член ряда (4.20). Далее, если e_1 — образ множества $e\subset[-1,0)$ при отображении $r=e^{\sigma}$, то $de<1$ означает, что $d_1e_1<1$, где

$$d_1e_1=\varliminf_{r\to\ 1-}\frac{\operatorname{mes}(e_1\cap[r,1))}{1-r}.$$

Из теоремы 2.2 вытекает следующее утверждение.

Теорема 4.1. *Пусть $p>0$, $\beta>0$, $\gamma>0$, $\nu=1+\beta+\gamma$, $\Phi\in M_{p\gamma}$, φ — обратная к Φ функция, а $\{b_n\}$ — последовательность, удовлетворяющая условиям (2.8) и (2.9). Предположим, что $n_l\in W_{\varphi}^{p\nu}$, причем $n_l(t)\varphi^{p\nu}(t)=o(t)$ при $t\to\infty$. Пусть $(\ln r)^{\gamma}\ln\mu_f(r)$ и $(\ln r)^{\gamma}\ln\mu_f^*(r)$ — функции, возрастающие при $r\uparrow 1$.*

Если последовательность $\{b_n\}$ удовлетворяет оценкам (2.8) с некоторой мажорантой $w\in\underline{W}_{\varphi}^{p\nu}$, то для любой функции $f\in\underline{K}^p(\Phi)$ при $r\to 1-$ вне некоторого множества $e_1\subset[0,1)$ нижней плотности $d_1e_1<1$ справедлива оценка

$$\left|1-\frac{\ln\mu_f^*(r)}{\ln\mu_f(r)}\right|\leqslant \operatorname{Const}(1-r)^{\gamma}.$$

Здесь $\mu_f^*(r)$ — максимальный член измененного степенного ряда

$$f^*(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_nz^n.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Т.И. Белоус, А.М. Гайсин, Р.А. Гайсин. *Оценка суммы ряда Дирихле на дуге ограниченного наклона* // Изв. высш. учебн. завед. Математика. **1**, 3–13 (2024).
2. Т.И. Белоус, А.М. Гайсин, Р.А. Гайсин. *Уточнение асимптотической оценки типа Полиа для рядов Дирихле, сходящегося в полуплоскости* // Уфим. мат. ж. **16**:4, 14–21 (2024).
3. А.М. Гайсин. *Поведение логарифма модуля суммы ряда Дирихле, сходящегося в полуплоскости* // Изв. росс. акад. наук, Сер. мат. **53**:4, 173–185 (1994).
4. А.М. Гайсин. *Оценки роста и убывания целой функции бесконечного порядка на кривых* // Мат. сб. **194**:8, 55–82 (2003).
5. А.М. Гайсин. *Теорема типа Бореля — Неванлинны. Применения.* Уфа: РИЦ Баш ГУ. 2010.
6. А.М. Гайсин, Т.И. Белоус. *B-устойчивость максимального члена адамаровской композиции двух рядов Дирихле* // Сиб. мат. ж. **43**:6, 1271–1282 (2002).

7. А.М. Гайсин, Т.И. Белоус. *Оценка на кривых функций, представленных в полуплоскости рядами Дирихле* // Сиб. мат. ж. **44**:1, 27–43 (2003).
8. А.М. Гайсин, Т.И. Белоус. *Максимальный член ряда Дирихле, сходящегося в полуплоскости: теорема об устойчивости* // Уфим. мат. ж. **14**:3, 23–34 (2022).
9. А.М. Гайсин, Р.А. Гайсин, Т.И. Белоус. *Регулярность роста ряда Дирихле по усиленно не полной системе экспонент* // Сиб. мат. ж. **64**:4, 742–752 (2023).
10. А.А. Гольдберг, И.В. Островский. *Распределение значений мероморфных функций.* М.: Наука. 1970.
11. А.Ф. Леонтьев. *Ряды экспонент.* М.: Наука. 1976.
12. Г.Г. Цегелик. *Свойства мажоранты и диаграммы Ньютона функции,аналитической в круге* // Укр. мат. ж. **29**:4, 560–562 (1997).

Галия Ахтяровна Гайсина,
Уфимский университет науки и технологий,
ул. З. Валиди, 32,
450076, г. Уфа, Россия
E-mail: gaisinaga@mail.ru

Ахтяр Магазович Гайсин,
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: gaisinam@mail.ru

Татьяна Ивановна Белоус,
Уфимский университет науки и технологий,
ул. З. Валиди, 32,
450076, г. Уфа, Россия
E-mail: belousti@yandex.ru