ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 18 № 4 (2026). С. 131-141.

УДК 517.95

РЕДУКЦИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ЛАПЛАСА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО–РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

А.Р. ХАКИМОВА

Аннотация. Метод построения пары Лакса и оператора рекурсии нелинейных интегрируемых уравнений типа синус–Гордона, разработанный в работах И.Т. Хабибуллина и др. (J. Phys. A, Math. Theor. **49**, 035202 (2016)) адаптируется на случай дифференциально–разностных уравнений солитонного типа. В качестве иллюстрации метода рассматривается уравнение

$$u_{n+1,x} = -u_{n,x} - (u_{n+1} - u_n)^2,$$

для которого построены пара Лакса и оператор рекурсии, описывающий иерархию высших симметрий заданного уравнения.

Ключевые слова: последовательность Лапласа, нелинейное интегрируемое уравнение, уравнение солитонного типа, пара Лакса, высшая симметрия, оператор рекурсии.

Mathematics Subject Classification: 37K10, 35Q51, 35Q53

1. Введение

В настоящей работе исследуются редукция последовательности Лапласа дифференциально–разностных уравнений вида

$$u_{n+1,x} = f(u_{n,x}, u_{n+1}, u_n), \tag{1.1}$$

где функция $u_n(x)$ зависит от непрерывной переменной x и дискретной переменной n. Мы рассматриваем уравнения вида (1.1) обладающие следующими свойствами:

1) допускают высшие симметрии порядка три и выше;

2) допускают представление Лакса;

3) не имеют нетривиальных характеристических интегралов,

т.е. являются уравнениями солитонного типа, которые также называют уравнениями типа полудискретного уравнения синус–Гордона (см., например, [30], [29], [22]). Список уравнений вида (1.1), обладающих свойствами 1) – 3) можно найти в работах [11], [3].

Построение решений уравнений вида (1.1), как и любых нелинейных уравнений, связано с определенными трудностями и требует использования вспомогательных объектов таких как пара Лакса ([24], [7], [8], [13], [31]), высшие симметрии [28], [26], инвариантные многообразия (дифференциальные связи) [12], [10], обобщенные инвариантные многообразия [19], [20], [21], уравнения типа Дубровина [5], [21] и др. В работах [18], [15], [16] мы показали, что для построения пар Лакса, операторов рекурсии и обобщенных инвариантных многообразий нелинейных интегрируемых уравнений типа синус–Гордона

$$u_{xy} = F(u, u_x, u_y), \tag{1.2}$$

A.R. Khakimova, Reduction of the Laplace sequence of differential–difference equations.
© Хакимова А.Р. 2026.
Поступила 28 августа 2026 г.

можно использовать метод каскадного интегрирования Лапласа [23]. Напомним суть каскадного метода Лапласа, который известен как один из классических методов построения общего решения линейного гиперболического уравнения вида

$$u_{xy} + a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = 0. \tag{1.3}$$

Основная идея этого метода связана с последовательностью инвариантов Лапласа

$$\ldots, h_{[-2]}, h_{[-1]}, h_{[0]}, h_{[1]}, h_{[2]}, \ldots, \tag{1.4}$$

коэффициенты которых вычисляются по рекуррентной формуле

$$h_{[i+1]} = 2h_{[i]} - h_{[i-1]} - (\ln(h_{[i]}))_{xy}, \quad i \in \mathbb{Z},$$

где $h_{[-1]} = b_y + ab - c$, $h_{[0]} = a_x + ab - c$.

Если последовательность инвариантов Лапласа (1.4) обрывается нулем хотя бы с одной стороны, т.е. если $h_{[k]} = 0$ или $h_{[-k]} = 0$, то уравнение (1.3) интегрируется в квадратурах. Если последовательность инвариантов Лапласа обрывается нулем с обеих сторон, то можно построить общее решение данного уравнения.

Позже каскадный метод Лапласа был адаптирован на случай нелинейных интегрируемых гиперболических уравнений лиувиллевского типа (см., например, [25], [14], [9], [17], [6], [2]). В работе [6] было доказано, что если последовательность инвариантов Лапласа $h_{[i]}$, $i \in \mathbb{Z}$ линеаризации нелинейного гиперболического уравнения вида (1.2)

$$v_{xy} + av_x + bv_y + cv = 0, \tag{1.5}$$

где

$$a = -\frac{\partial F}{\partial u_x}, \qquad b = -\frac{\partial F}{\partial u_y}, \qquad c = -\frac{\partial F}{\partial u}, \tag{1.6}$$

конечна, то заданное нелинейное уравнение интегрируемо по Дарбу. Кроме того, в данной работе было показано, что каскадный метод Лапласа может быть использован для классификации нелинейных уравнений.

В работе [1] метод каскадного интегрирования Лапласа был адаптирован на случай нелинейных дифференциально–разностных и полностью дискретных уравнений.

В работе [4] преобразования Лапласа используются для построения дискретных аналогов интегрируемых систем.

Несмотря на то, что рассматриваемые нами уравнения являются уравнениями другого типа, в работах [18], [15], [16] мы показали, что последовательности Лапласа могут быть полезны при построении операторов рекурсии и пар Лакса нелинейных интегрируемых уравнений гиперболического типа. Отметим также, что недавно рекурсионные операторы, возникающие из преобразований Лапласа линеаризации уравнения синус–Гордона, получили геометрическую интерпретацию в работе [27].

В работах [18], [15], [16] нами доказано, что последовательности Лапласа всех известных нелинейных дифференциальных уравнений типа синус–Гордона допускают конечно–полевые редукции (см. [18], [15], [16]). Другими словами, доказана следующая теорема.

Теорема 1.1 ([18], [15], [16]). *Последовательности Лапласа вида*

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial}{\partial y} + a_{[i]}\right) v_{[i]} = v_{[i+1]}, && \left(\frac{\partial}{\partial x} + b_{[0]}\right) v_{[i+1]} - h_{[i]}v_{[i]} = 0, \\ &\left(\frac{\partial}{\partial x} + b_{[-i]}\right) v_{[-i]} = v_{[-i-1]}, && \left(\frac{\partial}{\partial y} + a_{[0]}\right) v_{[-i-1]} - k_{[-i]}v_{[-i]} = 0, \end{aligned} \tag{1.7}$$

соответствующие линеаризованным уравнениям следующих пяти уравнений

$$\begin{aligned} &u_{xy} = \sin(u);\\ &u_{xy} = f(u)\sqrt{1+u_x^2}, \quad f'' = \gamma f, \quad \gamma = \text{const};\\ &u_{xy} = \sqrt{u_x}\sqrt{u_y^2+1};\\ &u_{xy} = \sqrt{u_x^2+1}\sqrt{u_y^2+1};\\ &u_{xy} = \sqrt{\wp(u)-\mu}\sqrt{u_x^2+1}\sqrt{u_y^2+a}, \end{aligned} \tag{1.8}$$

допускают редукции вида

$$\begin{aligned} v_{[m+1]} &= \alpha_{[-k]}v_{[-k]} + \alpha_{[-k+1]}v_{[-k+1]} + \cdots + \alpha_{[m]}v_{[m]},\\ v_{[-k-1]} &= \beta_{[-k]}v_{[-k]} + \beta_{[-k+1]}v_{[-k+1]} + \cdots + \beta_{[m]}v_{[m]}, \end{aligned} \tag{1.9}$$

где $m = 1$, $k = 1$.

На основе найденных редукций для всех пяти уравнений (1.8) построены операторы рекурсии и пары Лакса, некоторые из которых ранее не были известны.

Целью настоящей статьи является адаптирование метода построения пары Лакса и оператора рекурсии, основанный на редукциях последовательности Лапласа и разработанный в [18] на случай дифференциально–разностных уравнений вида (1.1). В разделе 2 обсуждаются редукции последовательности Лапласа дифференциально–разностных уравнений и приводятся необходимые формулы. В разделе 3 в качестве иллюстрации метода рассматривается известное дифференциально–разностное уравнение, для которого строятся соответствующие редукции, операторы рекурсии и пара Лакса.

2. Последовательности Лапласа для дифференциально–разностных уравнений и их редукции

Приведем необходимые формулы и определения, связанные с каскадным методом Лапласа дифференциально–разностных уравнений вида (1.1) (см. также [1]). Сосредоточимся на линеаризации (или производной Фреше) уравнения (1.1)

$$v_{n+1,x} + a_n v_{n,x} + b_n v_{n+1} + c_n v_n = 0, \tag{2.1}$$

где

$$a_n = -\frac{\partial f}{\partial u_{n,x}}, \qquad b_n = -\frac{\partial f}{\partial u_{n+1}}, \qquad c_n = -\frac{\partial f}{\partial u_n}.$$

Заметим, что уравнение (2.1) может быть представлено в одном из следующих видов

$$\begin{aligned} &(D_n + a_n)(D_x + b_{n-1})v_n + H_{n,0}v_n = 0,\\ &(D_x + b_n)(D_n + a_n)v_n + K_{n,0}v_n = 0, \end{aligned}$$

где D_n — оператор сдвига, действующий по правилу $D_n w(n) = w(n+1)$, D_x — оператор полного дифференцирования по x, функции $H_{n,0}$ и $K_{n,0}$ вычисляются по формулам

$$H_{n,0} = c_n - a_n b_{n-1}, \qquad K_{n,0} = c_n - a_n b_n - D_x(a_n).$$

Введем новые переменные $v_{n,[1]}$, $v_{n,[-1]}$ следующим образом

$$\begin{aligned} &(D_x + b_{n-1})v_n = v_{n,[1]}, && (D_n + a_n)v_{n,[1]} = -H_{n,0}v_n,\\ &(D_n + a_n)v_n = v_{n,[-1]}, && (D_x + b_n)v_{n,[-1]} = -K_{n,0}v_n. \end{aligned}$$

Если функции $H_{n,0}$ и $K_{n,0}$ не равны нулю, тогда введенные функции $v_{n,[1]}$, $v_{n,[-1]}$ будут удовлетворять следующим уравнениям

$$v_{n+1,[1],x} + a_{n,[1]}v_{n,[1],x} + b_{n,[1]}v_{n+1,[1]} + c_{n,[1]}v_{n,[1]} = 0, \tag{2.2}$$
$$v_{n+1,[-1],x} + a_{n,[-1]}v_{n,[-1],x} + b_{n,[-1]}v_{n+1,[-1]} + c_{n,[-1]}v_{n,[-1]} = 0, \tag{2.3}$$

где

$$\begin{aligned}
&a_{n,[1]} = a_n, \qquad b_{n,[1]} = b_{n-1} - D_x(\ln H_{n,[0]}),\\
&c_{n,[1]} = D_x(a_n) + a_n b_{n-1} - a_n D_x(\ln H_{n,[0]}) + H_{n,[0]},\\
&a_{n,[-1]} = \frac{a_n K_{n+1,[0]}}{K_{n,[0]}}, \qquad b_{n,[-1]} = b_{n+1},\\
&c_{n,[-1]} = a_n b_n \frac{K_{n+1,[0]}}{K_{n,[0]}} + K_{n+1,[0]}.
\end{aligned}$$

Преобразования переводящие уравнение (2.1) в уравнения (2.2) называются x– и соответственно n–преобразованиями Лапласа. Многократное повторение описанной процедуры даёт последовательность преобразований Лапласа

$$v_{n+1,[i],x} + a_{n,[i]}v_{n,[i],x} + b_{n,[i]}v_{n+1,[i]} + c_{n,[i]}v_{n,[i]} = 0, \quad i = 0,1,2,\dots, \tag{2.4}$$
$$v_{n+1,[-i],x} + a_{n,[-i]}v_{n,[-i],x} + b_{n,[-i]}v_{n+1,[-i]} + c_{n,[-i]}v_{n,[-i]} = 0, \quad i = 1,2,\dots, \tag{2.5}$$

где коэффициенты имеют вид

$$\begin{aligned}
&a_{n,[0]} = a_n, \qquad b_{n,[0]} = b_n, \qquad c_{n,[0]} = c_n,\\
&a_{n,[i]} = a_{n,[i-1]} = a_{n,[0]}, \qquad b_{n,[i]} = b_{n-1,[i-1]} - D_x(\ln H_{n,[i-1]}),\\
&c_{n,[i]} = D_x(a_{n,[i-1]}) + a_{n,[i-1]}b_{n-1,[i-1]} - a_{n,[i-1]}D_x(\ln H_{n,[i-1]}) + H_{n,[i-1]},\\
&H_{n,[i]} = H_{n,[i-1]} + D_x(a_{n,[0]}) + a_{n,[0]}(b_{n,[i]} - b_{n-1,[i]}),\\
&a_{n,[-i]} = \frac{a_{n,[-i+1]}K_{n+1,[-i+1]}}{K_{n,[-i+1]}}, \qquad b_{n,[-i]} = b_{n+1,[-i+1]} = b_{n+i,[0]},\\
&c_{n,[-i]} = a_{n,[-i+1]}b_{n,[-i+1]}\frac{K_{n+1,[-i+1]}}{K_{n,[-i+1]}} + K_{n+1,[-i+1]},\\
&K_{n,[-i]} = K_{n+1,[-i+1]} - D_x(a_{n,[-i]}) - a_{n,[-i]}(b_{n+i,[0]} - b_{n+i-1,[0]}).
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Уравнения (2.4) могут быть представлены как системы вида

$$(D_x + b_{n-1,[i]})v_{n,[i]} = v_{n,[i+1]}, \qquad (D_n + a_{n,[i]})v_{n,[i+1]} = -H_{n,[i]}v_{n,[i]}, \tag{2.7}$$
$$(D_n + a_{n,[-i]})v_{n,[-i]} = v_{n,[-i-1]}, \qquad (D_x + b_{n,[-i]})v_{n,[-i-1]} = -K_{n,[-i]}v_{n,[-i]}. \tag{2.8}$$

Сформулируем гипотезу.

Гипотеза 2.1. *Для любого нелинейного интегрируемого уравнения вида (1.1), не имеющего нетривиальных интегралов, последовательность преобразований Лапласа ассоциированная с ее линеаризацией допускает конечно–полевую редукцию, т.е. совместна с ограничением вида*

$$v_{n,[m+1]} = \alpha_{n,[-k]}v_{n,[-k]} + \alpha_{n,[-k+1]}v_{n,[-k+1]} + \dots + \alpha_{n,[m]}v_{n,[m]}, \tag{2.9}$$
$$v_{n,[-k-1]} = \beta_{n,[-k]}v_{n,[-k]} + \beta_{n,[-k+1]}v_{n,[-k+1]} + \dots + \beta_{n,[m]}v_{n,[m]}, \tag{2.10}$$

где $m = 1,2,3,\dots$, $k = 1,2,3,\dots$, *коэффициенты* $\alpha_{n,[i]}$, $\beta_{n,[i]}$ *зависят от динамических переменных* u_n, u_{n+1}, $u_{n,x}$, u_{n+2}, $u_{n,xx}$, $\dots$ *и спектрального параметра* λ, *а также* $\alpha_{n,[-k]} \neq 0$, $\beta_{n,[-k]} \neq 0$.

Предложение 2.1. *Предположим, что функции $H_{n,[i]}$ и $K_{n,[-i]}$ не равны нулю для любого i и последовательность преобразований Лапласа (2.7), (2.8) совместна с ограничением (2.9). Тогда для произвольного j функция $v_{n,[j]}$ может быть представлена в виде*

$$v_{n,[j]} = \alpha^j_{n,[-k]} v_{n,[-k]} + \alpha^j_{n,[-k+1]} v_{n,[-k+1]} + \ldots + \alpha^j_{n,[m]} v_{n,[m]}.$$

Другими словами, ограничение (2.9) определяет редукцию всей последовательности Лапласа.

Доказательство. Применим оператор $(D_x + b_{n-1,[m+1]})$ к первому уравнению (2.9) и пользуясь представлением (2.7) найдем

$$v_{n,[m+2]} = \tilde{\alpha}^1_{n,[-k]} v_{n,[-k]} + \tilde{\alpha}^1_{n,[-k+1]} v_{n,[-k+1]} + \ldots + \tilde{\alpha}^1_{n,[m+1]} v_{n,[m+1]}.$$

В полученном равенстве исключим переменную $v_{n,[m+1]}$ в силу первого уравнения (2.9) и в итоге придем к

$$v_{n,[m+2]} = \alpha^1_{n,[-k]} v_{n,[-k]} + \alpha^1_{n,[-k+1]} v_{n,[-k+1]} + \ldots + \alpha^1_{n,[m]} v_{n,[m]}.$$

Продолжая подобным образом можно получить требуемое представление для любого $v_{n,[m+s]}$, $s \geqslant 2$. Аналогично доказывается представление в противоположном направлении, путем применения оператора $(D_n + a_{n,[-k-1]})$ ко второму уравнению (2.9). □

Как показано в работах [18], [15], [16] редукции вида (2.9) позволяют строить операторы рекурсии и пару Лакса дифференциального уравнения гиперболического типа. Покажем, что подход работает и в случае дифференциально–разностных уравнений.

3. Пример

В настоящем разделе мы апробируем метод построения операторов рекурсии и пары Лакса для дифференциально–разностных уравнений вида (1.1) на примере следующего уравнения

$$u_{n+1,x} = -u_{n,x} - (u_{n+1} - u_n)^2. \tag{3.1}$$

Данное уравнение является известным интегрируемым уравнением солитонного типа (см., например, [11], [3]). Её высшие симметрии минимального порядка имеют вид

$$u_t = u_{xxx} + 6u_x^2,$$
$$u_\tau = \frac{1}{u_{n+1} - u_{n-1}}.$$

3.1. Редукция последовательности преобразований Лапласа. Сосредоточимся на линеаризации уравнения (3.1), которая имеет вид

$$v_{n+1,x} + v_{n,x} + 2(u_{n+1} - u_n)v_{n+1} - 2(u_{n+1} - u_n)v_n = 0. \tag{3.2}$$

Рассмотрим конечную систему, полученную из (2.7), (2.8) при $i = 0, 1$

$$\begin{aligned}
&(D_x + b_{n-1,[0]})v_{n,[0]} = v_{n,[1]}, && (D_n + a_{n,[0]})v_{n,[1]} = -H_{n,[0]}v_{n,[0]},\\
&(D_x + b_{n-1,[1]})v_{n,[1]} = v_{n,[2]}, && (D_n + a_{n,[1]})v_{n,[2]} = -H_{n,[1]}v_{n,[1]},\\
&(D_n + a_{n,[0]})v_{n,[0]} = v_{n,[-1]}, && (D_x + b_{n,[0]})v_{n,[-1]} = -K_{n,[0]}v_{n,[0]},\\
&(D_n + a_{n,[-1]})v_{n,[-1]} = v_{n,[-2]}, && (D_x + b_{n,[-1]})v_{n,[-2]} = -K_{n,[-1]}v_{n,[-1]}.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Теорема 3.1. *Последовательности преобразований Лапласа* (3.3), *соответствующие уравнению* (3.2), *допускают редукцию вида* (2.9) *с параметрами* $k=1$, $m=1$:

$$\begin{aligned} v_{n,[2]} &= \alpha_{n,[-1]}v_{n,[-1]} + \alpha_{n,[0]}v_{n,[0]} + \alpha_{n,[1]}v_{n,[1]},\\ v_{n,[-2]} &= \beta_{n,[-1]}v_{n,[-1]} + \beta_{n,[0]}v_{n,[0]} + \beta_{n,[1]}v_{n,[1]}, \end{aligned} \tag{3.4}$$

где коэффициенты имеют вид

$$\begin{aligned} \alpha_{n,[-1]} &= \frac{2}{\lambda},\\ \alpha_{n,[0]} &= -2(u_{n+1}-u_{n-1})^2 - \frac{4}{\lambda},\\ \alpha_{n,[1]} &= 2(u_{n+1}-u_{n-1}) + u_n - u_{n-2},\\ \beta_{n,[-1]} &= \lambda(u_n-u_{n+2})^2 - \frac{u_n-u_{n+2}}{u_{n+1}-u_n},\\ \beta_{n,[0]} &= \lambda(u_n-u_{n+2})(2u_{n+1}-2u_{n-1}-u_n+u_{n+2}),\\ \beta_{n,[1]} &= -\lambda(u_n-u_{n+2}). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Доказательство. Теорема доказывается непосредственным вычислением, поэтому приведем только схему доказательства.

Подставим представления (3.4) в систему (3.3) и получим следующие шесть уравнений для нахождения неизвестных функций $\alpha_{n,[j]}$ и $\beta_{n,[j]}$

$$\begin{aligned} v_{n,[1],x} &= v_{n,[2]} - b_{n-1,[1]}v_{n,[1]} = \alpha_{n,[-1]}v_{n,[-1]} + \alpha_{n,[0]}v_{n,[0]} + \alpha_{n,[1]}v_{n,[1]} - b_{n-1,[1]}v_{n,[1]},\\ v_{n,[0],x} &= v_{n,[1]} - b_{n-1,[0]}v_{n,[0]},\\ v_{n,[-1],x} &= -b_{n,[0]}v_{n,[-1]} - K_{n,[0]}v_{n,[0]}, \end{aligned} \tag{3.6}$$

и

$$\begin{aligned} v_{n+1,[1]} &= -a_{n,[0]}v_{n,[1]} - H_{n,[0]}v_{n,[0]},\\ v_{n+1,[0]} &= v_{n,[-1]} - a_{n,[0]}v_{n,[0]},\\ v_{n+1,[-1]} &= v_{n,[-2]} - a_{n,[-1]}v_{n,[-1]} = \beta_{n,[-1]}v_{n,[-1]} + \beta_{n,[0]}v_{n,[0]} + \beta_{n,[1]}v_{n,[1]} - a_{n,[-1]}v_{n,[-1]}, \end{aligned} \tag{3.7}$$

где коэффициенты вычисляются при помощи формул (2.6):

$$\begin{aligned} a_{n,[0]} &= 1, & b_{n,[0]} &= -2(u_{n+1}-u_n),\\ H_{n,[0]} &= -2(u_{n+1}-u_{n-1}), & K_{n,[0]} &= -4(u_{n+1}-u_n),\\ a_{n,[-1]} &= \frac{u_{n+2}-u_{n+1}}{u_{n+1}-u_n}, & b_{n,[1]} &= u_{n+1}-u_{n-1}. \end{aligned}$$

Мы не приводим явно оставшиеся два уравнения системы (3.3), поскольку они не добавляют условий для определения необходимых коэффициентов.

Условия совместности

$$D_n(v_{n,[j],x}) = D_x(v_{n+1,[j]}), \qquad j=-1,0,1,$$

приводят к системе нелинейных уравнений на неизвестные функции $\alpha_{n,[j]}$ и $\beta_{n,[j]}$

1) $\alpha_{n+1,[0]} - \alpha_{n,[0]} - \alpha_{n+1,[-1]}\beta_{n,[0]} - 2\alpha_{n+1,[1]}(u_{n+1}-u_{n-1}) = 0,$
2) $\alpha_{n+1,[0]} + \alpha_{n,[-1]} + \alpha_{n+1,[-1]}\beta_{n,[-1]} - \dfrac{u_{n+2}-u_{n+1}}{u_{n+1}-u_n}\alpha_{n+1,[-1]} = 0,$
3) $\alpha_{n+1,[1]} - \alpha_{n,[1]} - \alpha_{n+1,[-1]}\beta_{n,[1]} + u_{n+1} + u_n - u_{n-1} - u_{n-2} = 0,$
4) $(\beta_{n,[0]})_x + \alpha_{n,[0]}\beta_{n,[1]} + 2(u_{n+2} - u_{n+1} - u_n + u_{n-1})\beta_{n,[0]} + 4(u_{n+1}-u_n)\beta_{n,[-1]} = 0,$
5) $(\beta_{n,[-1]})_x + \alpha_{n,[-1]}\beta_{n,[1]} + 2(u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n)$

$$-2\frac{u_{n+2}-u_n}{(u_{n+1}-u_n)^2}u_{n,x}-\frac{(u_{n+2}-u_n)(u_{n+2}+u_{n+1}-2u_n)}{u_{n+1}-u_n}=0,$$

6) $(\beta_{n,[1]})_x+\beta_{n,[0]}+\alpha_{n,[1]}\beta_{n,[1]}+2u_{n+2}-2u_{n+1}-u_n+u_{n-2}=0.$

Анализ уравнений 1) – 6) убеждает, что неизвестные функции $\alpha_{n,[j]}$ и $\beta_{n,[j]}$ зависят от динамических переменных следующим образом

$$\alpha_{n,[j]}=\alpha_{n,[j]}(u_{n-2},u_{n-1},u_n,u_{n+1}),\qquad \beta_{n,[j]}=\beta_{n,[j]}(u_{n-1},u_n,u_{n+1},u_{n+2}). \tag{3.8}$$

Более того, из подстановки представлений (3.8) в уравнения 1) – 3) немедленно следует зависимость функций $\alpha_{n,[j]}$ от переменной u_{n-2}, т.е. получим

$$\begin{aligned}\alpha_{n,[1]}&=-u_{n-2}+\tilde\alpha_{n,[1]}(u_{n-1},u_n,u_{n+1}),\\ \alpha_{n,[0]}&=\tilde\alpha_{n,[0]}(u_{n-1},u_n,u_{n+1}),\\ \alpha_{n,[-1]}&=\tilde\alpha_{n,[-1]}(u_{n-1},u_n,u_{n+1}).\end{aligned}$$

Продолжая анализ уравнений 1) – 6) аналогичным образом, мы приходим к формулам (3.5). □

Перепишем систему уравнений (3.6), (3.7) в виде матричных систем

$$\Psi_{n,x}=A\Psi_n,\qquad \Psi_{n+1}=B\Psi_n \tag{3.9}$$

для вектора $\Psi_n=(v_{n,[1]},v_{n,[0]},v_{n,[-1]})^T$, где

$$A=\begin{pmatrix}2(u_{n+1}-u_{n-1}) & \frac{2}{\lambda} & -\frac{4}{\lambda}-2(u_{n+1}-u_{n-1})^2\\ 1 & -2(u_n-u_{n-1}) & 0\\ 0 & 4(u_{n+1}-u_n) & -2(u_{n+1}-u_n)\end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix}-1 & 2(u_{n+1}-u_{n-1}) & 0\\ 0 & -1 & 1\\ (u_{n+2}-u_n)\lambda & -(u_{n+2}-u_n)(u_{n+2}+2u_{n+1}-u_n-2u_{n-1})\lambda & 1+(u_{n+2}-u_n)^2\lambda\end{pmatrix}.$$

Следствие 3.1. *Система уравнений (3.9) совместна тогда и только тогда, когда функция $u_n=u_n(x)$ является решением уравнения (3.1).*

Отсюда следует, что система (3.9) определяет пару Лакса для уравнения (3.1). Следует отметить, что данная пара отличается обычной тем, что имеет более высокий порядок. Однако, система (3.9) при помощи подходящих преобразований сводится к обычной паре Лакса.

3.2. Пара Лакса и операторы рекурсии уравнения (3.1). Выведем обычную пару Лакса и оператор рекурсии уравнения (3.1) из системы уравнений (3.9). Начнем с оператора рекурсии. Для этого перепишем матричные уравнения в (3.9) в виде скалярных дифференциального и разностного уравнений третьего порядка на неизвестную функцию $v_{n,[0]}$:

$$\begin{aligned}&v_{n,[0],xxx}+\left(8u_{n,x}+\frac{4}{\lambda}\right)v_{n,[0],x}+4u_{n,xx}v_{n,[0]}=0,\\ &v_{n+2,[0]}+\left(\frac{u_{n+2}-u_n}{u_{n+1}-u_{n-1}}-\lambda(u_{n+2}-u_n)^2\right)v_{n+1,[0]}\\ &\qquad+\left(\lambda(u_{n+1}-u_{n-1})(u_{n+2}-u_n)-1\right)v_{n,[0]}-\frac{u_{n+2}-u_n}{u_{n+1}-u_{n-1}}v_{n-1,[0]}=0.\end{aligned} \tag{3.10}$$

Перепишем уравнения (3.10) в операторной форме следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\left(D_x^3+8u_{n,x}D_x+4u_{n,xx}\right)v_{n,[0]}=-\frac{4}{\lambda}D_x\left(v_{n,[0]}\right),\\
&\left(D_n^2+\frac{u_{n+2}-u_n}{u_{n+1}-u_{n-1}}D_n-1-\frac{u_{n+2}-u_n}{u_{n+1}-u_{n-1}}D_n^{-1}\right)v_{n,[0]}=\\
&\qquad\qquad\lambda(u_{n+2}-u_n)\left(D_n-1\right)\left((u_{n+1}-u_{n-1})v_{n,[0]}\right).
\end{aligned}\tag{3.11}$$

Подействуем оператором D_x^{-1} на первое уравнение, и, соответственно, оператором $\frac{1}{(u_{n+1}-u_{n-1})}\left(D_n-1\right)^{-1}\frac{1}{(u_{n+2}-u_n)}$ на второе уравнение (3.11), тогда получим

$$R_xv_{n,[0]}=-\frac{4}{\lambda}v_{n,[0]},\qquad R_nv_{n,[0]}=\lambda v_{n,[0]},$$

где операторы R_x и R_n имеют вид

$$\begin{aligned}
R_x=&D_x^2+8u_{n,x}-4D_x^{-1}u_{n,xx},\\
R_n=&\frac{1}{(u_{n+1}-u_{n-1})^2}(D_n+D_n^{-1})+\frac{2}{(u_{n+1}-u_{n-1})(u_n-u_{n-2})}\\
&+\frac{2}{(u_{n+1}-u_{n-1})}\left(D_n-1\right)^{-1}\left(\frac{1}{u_n-u_{n-2}}-\frac{1}{u_{n+2}-u_n}\right).
\end{aligned}\tag{3.12}$$

Предложение 3.1. *Операторы R_x и R_n заданные в (3.12) определяют операторы рекурсии описывающие иерархии высших симметрий в направлениях x и n соответственно для уравнения (3.1).*

Построим теперь пару Лакса для уравнения (3.1). Для этого мы воспользуемся следующими четырьмя уравнениями: уравнением (3.1), его линеаризацией (3.2), а также двумя уравнениями, полученными нами в предыдущем разделе – (3.10). Начнем с первого уравнения (3.10), которое перепишем в виде

$$v_{n,xxx}=-\left(8u_{n,x}-\frac{4}{\lambda}\right)v_{n,x}-4u_{n,xx}v_n.\tag{3.13}$$

Сначала нам необходимо понизить порядок данного уравнения. Для этого будем искать условие связи вида

$$v_{n,xx}=F(v_{n,x},v_n,u_{n,x},u_n),\tag{3.14}$$

которое удовлетворяет условию

$$\left(8u_{n,x}-\frac{4}{\lambda}\right)v_{n,x}+4u_{n,xx}v_n+D_x(F(v_{n,x},v_n,u_{n,x},u_n))\Big|_{(3.13),(3.14)}=0$$

или в развернутом виде

$$(F_{u_{n,x}}+4v_n)u_{n,xx}+F_{v_{n,x}}F+F_{v_n}v_{n,x}+F_{u_n}u_{n,x}+(8u_{n,x}+4\lambda^{-1})v_{n,x}=0.\tag{3.15}$$

Таким образом, для нахождения неизвестной функции $F=F(v_{n,x},v_n,u_{n,x},u_n)$ мы воспользуемся уравнением (3.15). Заметим, что переменные $u_n,u_{n,x},u_{n,xx},\dots$ являются независимыми, поэтому задача нахождения функции F сводится к решению переопределенной системы уравнений. Прежде всего, в уравнении (3.15) приравняем коэффициенты при старшей производной $u_{n,xx}$ и найдем:

$$F(v_{n,x},v_n,u_{n,x},u_n)=-4u_{n,x}v_n+F_1(v_{n,x},v_n,u_n).\tag{3.16}$$

Таким образом, на первом шаге мы определили зависимость функции $F(v_{n,x},v_n,u_{n,x},u_n)$ от переменной $u_{n,x}$, поэтому, после подстановки (3.16) в уравнение (3.15), мы можем приравнять коэффициенты при этой переменной. Опуская дальнейшие вычисления, приведем

только ответ. Итак, продолжая анализировать уравнение (3.15) подобным образом мы получаем, что функция $F(v_{n,x}, v_n, u_{n,x}, u_n)$ имеет вид:

$$F(v_{n,x}, v_n, u_{n,x}, u_n) = \frac{v_{n,x}^2}{2v_n} - 4u_{n,x}v_n - 2\lambda^{-1}v_n + \frac{C}{v_n},$$

где C — произвольная постоянная. Тогда, получим следующее условие связи (3.14):

$$v_{n,xx} = \frac{v_{n,x}^2}{2v_n} - 4u_{n,x}v_n - 2\lambda^{-1}v_n + \frac{C}{v_n}. \tag{3.17}$$

Для построения пары Лакса уравнения (3.1) необходимо вывести еще одно равенство, связывающее переменные v_{n+1}, $v_{n,x}$, v_n, а также переменную u_n и ее производные по x и сдвиги по n. Для этого подействуем оператором сдвига D_n на уравнение (3.17) и заменим переменные $v_{n+1,x}$ и $v_{n+1,xx}$ в силу линеаризованного уравнения (3.2), а переменные $u_{n+1,x}$ и $u_{n+1,xx}$ в силу уравнения (3.1). В итоге получим требуемое равенство:

$$v_{n+1} = \frac{\lambda}{4}\frac{v_{n,x}^2}{v_n} - \lambda(u_{n+1} - u_n)v_{n,x} + \lambda(u_{n+1} - u_n)^2 v_n + \frac{C\lambda}{2v_n}. \tag{3.18}$$

Перепишем линеаризованное уравнение (3.2) с учетом найденного:

$$\begin{aligned} v_{n+1,x} = &-\frac{1}{2}(u_{n+1} - u_n)\lambda\frac{v_{n,x}^2}{v_n} + (2\lambda(u_{n+1} - u_n)^2 - 1)v_{n,x} \\ &+ 2(u_{n+1} - u_n)(1 - \lambda(u_{n+1} - u_n)^2)v_n - (u_{n+1} - u_n)\frac{C\lambda}{v_n}. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Отметим, что полученная тройка уравнений (3.17), (3.18), (3.19) совместна на решениях заданного уравнения (3.1). Теперь, используя эту совместную тройку уравнений, выведем стандартную пару Лакса для уравнения (3.1). Положим $C = 0$ и выполним в этих уравнениях следующую замену переменных:

$$v_n = \lambda^n \varphi_n^2.$$

Тогда получим пару Лакса

$$\begin{aligned} &\varphi_{n,xx} = -(2u_{n,x} + \lambda^{-1})\varphi_n, \\ &\varphi_{n+1} = \varphi_{n,x} - (u_{n+1} - u_n)\varphi_n, \\ &\varphi_{n+1,x} = -(u_{n+1} - u_n)\varphi_{n,x} + ((u_{n+1} - u_n)^2 - \lambda^{-1})\varphi_n \end{aligned} \tag{3.20}$$

или в матричном виде

$$\Phi_{n,x} = \tilde{A}\Phi_n, \qquad \Phi_{n+1} = \tilde{B}\Phi_n, \tag{3.21}$$

где $\Phi_n = (\varphi_{n,x}, \varphi_n)^T$,

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & -2u_{n,x} - \lambda^{-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{B} = \begin{pmatrix} -u_{n+1} + u_n & (u_{n+1} - u_n)^2 - \lambda^{-1} \\ 1 & -u_{n+1} + u_n \end{pmatrix}.$$

Можно проверить, что пара уравнений (3.21) совместна тогда и только тогда, когда функция u_n удовлетворяет уравнению (3.1). Следовательно, (3.21) определяет пару Лакса уравнения (3.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. В.Е. Адлер, С.Я. Старцев. *Дискретные аналоги уравнения Лиувилля* // Теор. мат. физ. **121**, 1484-95 (1999).
2. Е.И. Ганжа, С.П. Царев. *Интегрирование классических серий A_n, B_n, C_n экспоненциальных систем.* Красноярск: Красноярский гос. пед. ун-т. 2001.

3. Р.Н. Гарифуллин. *Классификация полудискретных уравнений гиперболического типа. Случай симметрий третьего порядка* // Теор. мат. физ. **217**:2, 404–415 (2023).
4. П.Г. Гриневич, С.П. Новиков. *Дискретные SL_n–связности и самосопряженные разностные операторы на двумерных многообразиях* // Усп. мат. наук **68**:5(413), 81–110 (2013).
5. Б.А. Дубровин, В.Б. Матвеев, С.П. Новиков. *Нелинейные уравнения типа Кортевега – де Фриза, конечнозонные линейные операторы и абелевы многообразия* // Усп. мат. наук **31**:1, 55–136 (1976).
6. А.В. Жибер, В.В. Соколов. *Точно интегрируемые гиперболические уравнения типа Лиувилля* // Усп. мат. наук. **56**, 61-101 (2001).
7. В.Е. Захаров, А.Б. Шабат. *Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейной среде* // Ж. эксп. теор. физ. **61**:1, 118–134 (1971).
8. С.В. Манаков. *К теории двумерной стационарной самофокусировки электромагнитных волн* // Ж. эксп. теор. физ. **65**:2, 505–515 (1973).
9. С.П. Новиков, И.А. Дынников. *Дискретные спектральные симметрии маломерных дифференциальных операторов и разностных операторов на регулярных решётках и двумерных многообразиях* // Усп. мат. наук **52**, 1057-116 (1997).
10. А.Ф. Сидоров, В.П. Шапеев, Н.Н. Яненко. *Метод дифференциальных связей и его приложения в газовой динамике.* Новосибирск: Наука (1984).
11. Р.И. Ямилов. *Обратимые замены переменных, порожденные преобразованиями Беклунда* // Теор. мат. физ. **85**:3, 368–375 (1990).
12. Н.Н. Яненко. *О инвариантных дифференциальных связях для гиперболических систем квазилинейных уравнений* // Изв. Высш. Учебн. Завед., Мат. **1961**:3(22), 185–194 (1961).
13. M.J. Ablowitz, D.J. Kaup, A.C. Newell, H. Segur. *The inverse scattering transform — Fourier analysis for nonlinear problems* // Studies Appl. Math. **53**:4, 249–315 (1974).
14. I.M. Anderson, N. Kamran. *The variational bicomplex for second order scalar partial differential equations in the plane* // Duke Math. J. **87**:2, 265–319 (1997).
15. K.I. Faizulina, I.T. Habibullin, A.R. Khakimova. *Laplace transformations and sine–Gordon type integrable PDE* // J. Phys. A, Math. Theor. **57**:1, 015203 (2024).
16. K.I. Faizulina, A.R. Khakimova. *Reduction of the Laplace sequence and sine-Gordon type equations* // J. Phys. A, Math. Theor. **57**:49, 495208 (2024).
17. E.V. Ferapontov. *Laplace transformations of hydrodynamic–type systems in Riemann invariants: periodic sequences* // J. Phys. A, Math. Gen. **30**:19, 6861–6878 (1997).
18. I.T. Habibullin, A.R. Khakimova, M.N. Poptsova. *On a method for constructing the Lax pairs for nonlinear integrable equations* // J. Phys. A, Math. Theor. **49**:3, 035202 (2016).
19. I.T. Habibullin, A.R. Khakimova. *Invariant manifolds and separation of the variables for integrable chains* // J. Phys. A, Math. Theor. **53**:38, 385202 (2020).
20. I.T. Habibullin, A.R. Khakimova, A.O. Smirnov. *Generalized invariant manifolds for integrable equations and their applications* // Ufa Math. J. **13**:2, 135–151 (2021).
21. I.T. Habibullin, A.R. Khakimova, A.O. Smirnov. *Construction of exact solutions to the Ruijsenaars — Toda lattice via generalized invariant manifolds* // Nonlinearity **36**:1, 231 (2023).
22. Y. Hanif, U. Saleem. *Exact solutions of semi–discrete sine–Gordon equation* // Eur. Phys. J. Plus **134**, 200 (2019).
23. P.S. Laplace. *Recherches sur le calcul intégral aux différences partielles* // Mém. Acad. R. Sci. Paris, 341–402 (1776).
24. P.D. Lax. *Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves* // Commun. Pure Appl. Math. **21**, 467–490 (1968).
25. J. Liouville. *Sur l'équation aux différences partielles* $\frac{d^2\log\lambda}{dudv}\pm\frac{\lambda}{2a^2}=0$ // J. Math. Pures Appl. **18**, 71–72 (1853).
26. M. Alquran, R. Al-deiakeh. *Lie — Bäcklund symmetry generators and a variety of novel periodic–soliton solutions to the complex–mode of modified Korteweg — de Vries equation* // Qual. Theory Dyn. Syst. **23**:2, 95 (2024).
27. M. Marvan. *Voss surfaces in sine–Gordon hierarchies* // SIGMA, Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. **22**, 075 (2026).

28. A.V. Mikhajlov, A.B. Shabat, R.I. Yamilov. *The symmetry approach to the classification of nonlinear equations. Complete lists of integrable systems.* // Russ. Math. Surv. **42**:4, 1–63 (1987).
29. K. Narita. *Discontinuous solitons for discrete sine–Gordon equation* // J. Phys. Soc. Jpn. **53**, 3277–3279 (1984).
30. S.J. Orfanidis. *Sine–Gordon equation and nonlinear σ model on a lattice* // Phys. Rev. D **18**:10, 3828–3832 (1978).
31. M. Wadati. *The exact solution of the modified Korteweg — de Vries equation* // J. Phys. Soc. Jpn. **32**:2, 1681 (1972).

Айгуль Ринатовна Хакимова,
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: aigul.khakimova@mail.ru