ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 18 № 4 (2026). С. 118-130.

УДК 517.9

ОБ ИНТЕГРИРУЕМЫХ РЕДУКЦИЯХ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ДВУМЕРИЗОВАННОЙ ЦЕПОЧКИ ТОДЫ

И.Т. ХАБИБУЛЛИН, А.У. САКИЕВА

Аннотация. В работе рассматриваются нелинейные интегрируемые дифференциально–разностные уравнения с тремя независимыми переменными, две из которых является непрерывными, а одна — дискретной. Такие уравнения, называемые цепочками, допускают конечно–полевые редукции, связанные с обрывами по дискретной переменной. В статье предъявлены редукции в виде систем нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа, обладающих полными наборами характеристических интегралов по обоим характеристическим направлениям.

Ключевые слова: нелинейные цепочки в 3D, характеристические интегралы, интегрируемость в смысле Дарбу, конечно–полевые редукции, пара Лакса.

Mathematics Subject Classification: 35Q51, 39A14

1. Введение

Нелинейные дифференциально–дискретные уравнения типа двумеризованной цепочки Тоды к настоящему времени являются хорошо исследованным классом уравнений с тремя независимыми переменными. Уравнения этого класса появились еще в 18-ом веке в работах Лапласа, посвященных изучению линейных дифференциальных уравнений гиперболического типа с переменными коэффициентами. Методы построения явных решений, так называемых, открытых цепочек, непосредственно связанных с цепочкой Тоды, были предложены в работах Дарбу, Гурса, Мутара, Лиувилля и др. (см., например, обзор [1]). Интерес к этой тематике возродился во второй половине прошлого века после открытия метода обратной задачи рассеяния. После работ [12], [13] стало ясно, что интегрируемые уравнения типа цепочки Тоды можно использовать при построении явных частных решений интегрируемых нелинейных уравнений в частных производных класса Деви — Стюартсона. Список интегрируемых моделей в 3D типа цепочки Тоды (по–видимому, он является исчерпывающим) был впервые получен А.Б. Шабатом и Р.И. Ямиловым в работе [13] как результат двумеризации в рамках симметрийного подхода интегрируемых цепочек размерности 1+1 из классификационного списка, составленного ранее Р.И. Ямиловым (см., например, [14]). Проблема построения характеристических интегралов специальных конечно-полевых редукций интегрируемых цепочек типа Тоды ранее исследовалась в работах [2], [6], [8], [9], [11].

В настоящей работе мы обсуждаем метод построения полных наборов характеристических интегралов конечно–полевых редукций при помощи пары Лакса. Пользуясь этим методом мы построим полные наборы интегралов для систем, полученных из следующих уравнений типа цепочки Тоды

I.T. Habibullin, A.U.Sakieva, On integrable reductions of nonlinear equations of two–dimensional Toda chain type.

© Хабибуллин И.Т., Сакиева А.У. 2026.

Поступила 26 августа 2026 г.

(E_1) $u_{n,xy} = e^{u_{n+1}-2u_n+u_{n-1}}$,

(E_2) $u_{n,y} = u_n(v_{n+1} - v_n), \quad v_{n,x} = u_n - u_{n-1}$,

(E_3) $u_{n,xy} = (e^{u_{n+1}-u_n} - e^{u_n-u_{n-1}})\, u_{n,x}$,

посредством наложения специальных условий обрыва по дискретной переменной n. Отметим, что имеются различные методы построения характеристических интегралов: с помощью характеристических алгебр [9], [6], [3], с помощью обобщенного уравнения Даламбера [2], [10], по паре Лакса [8], [11], на основе инвариантов Лапласа линеаризованной системы [4], [5] и т.д.

2. Полные наборы характеристических интегралов системы дифференциальных уравнений гиперболического типа

Остановимся на некоторых основных фактах теории уравнений, интегрируемых в смысле Дарбу. Рассмотрим систему, состоящую из N уравнений гиперболического типа

$$u_{i,xy} = F_i(u_1, \dots, u_N, u_{1,x}, \dots, u_{N,x}, u_{1,y}, \dots, u_{N,y}), \qquad i = 1, 2, \dots, N, \tag{2.1}$$

где F_i являются аналитическими функциями заданными в некоторой области пространства $\mathbb{C}^{3N}$. Напомним необходимые определения (см., например, [3]). Гладкая функция вида

$$I = I(u_1, \dots, u_N, u_{1,x}, \dots, u_{N,x}, u_{1,xx}, \dots, u_{N,xx}, \dots, u_{1,r}, \dots, u_{N,r}),$$

где принято обозначение $u_{j,s} := \dfrac{\partial^s}{\partial x^s} u_j$, называется y-интегралом порядка r системы уравнений (2.1), если выполняется следующее условие $D_y I = 0$, где производная по переменной y вычисляется в силу системы (2.1). Иначе говоря, должно выполняться равенство

$$D_y I = \sum_i \Big(u_{i,y} \frac{\partial}{\partial u_i} + F_i \frac{\partial}{\partial u_{i,x}} + D_x(F_i) \frac{\partial}{\partial u_{i,xx}} + \cdots \Big) I = Y I = 0.$$

Аналогично определяются интегралы по направлению x.

Некоторый набор y-интегралов $\{I_i\}_{i=1}^N$ порядков r_i системы уравнений (2.1) образует полный набор независимых y-интегралов, если выполняется следующее условие

$$\det\left(\frac{\partial I_j}{\partial u_{i,m}}\right) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial I_1}{\partial u_{1,r_1}} & \dfrac{\partial I_1}{\partial u_{2,r_1}} & \cdots & \dfrac{\partial I_1}{\partial u_{N,r_1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial I_N}{\partial u_{1,r_N}} & \dfrac{\partial I_N}{\partial u_{2,r_N}} & \cdots & \dfrac{\partial I_N}{\partial u_{N,r_N}} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{2.2}$$

Для выяснения интегрируемости в смысле Дарбу системы гиперболических уравнений имеется эффективный алгебраический критерий, основанный на понятии характеристической алгебры Ли, введенной в 1980 году А.Б. Шабатом [9] (см. также монографию [3]).

Теорема 2.1. *Система гиперболических уравнений вида (2.1) допускает полный набор независимых y-интегралов тогда и только тогда, когда характеристическая алгебра Ли над кольцом локально–аналитических функций от переменных $\bar{u}_y$, $\bar{u}$, $\bar{u}_x$, $\bar{u}_{xx}$, ... порожденная характеристическими операторами*

$$X_j = \frac{\partial}{\partial u_{j,y}}, \quad j = 1, \dots, N;$$

$$Y = \sum_i u_{i,y} \frac{\partial}{\partial u_i} + F_i \frac{\partial}{\partial u_{i,x}} + D_x(F_i) \frac{\partial}{\partial u_{i,xx}} + \cdots$$

имеет конечную размерность. Здесь $\bar{u} = (u_1, u_2, \dots, u_N)$.

3. Интегралы конечно–полевой редукции уравнения E_1

Рассмотрим систему уравнений вида

$$\begin{aligned} &u_{1,xy} = e^{u_2-2u_1},\\ &u_{2,xy} = e^{u_3-2u_2+u_1},\\ &\cdots\cdots\cdots\\ &u_{N-1,xy} = e^{u_N-2u_{N-1}+u_{N-2}},\\ &u_{N,xy} = e^{-2u_N+u_{N-1}}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

полученную из E_1 в результате наложения условий обрыва $u_0 = 0$ и $u_{N+1} = 0$. Система уравнений (3.1), называемая открытой цепочкой, изучалась многими авторами. В препринте [9] было доказано, что характеристические алгебры системы (3.1) имеют конечную размерность, откуда сразу вытекает, что система допускает полные наборы характеристических интегралов. Сами характеристические интегралы были найдены с помощью обобщенного уравнения Даламбера в работе [2]. Здесь мы воспользуемся системой (3.1), как модельной системой для объяснения алгоритма построения полных наборов характеристических интегралов посредством пары Лакса. Пара Лакса для (3.1) задается в виде двух систем дифференциальных уравнений, определяющих динамику по x

$$\begin{cases} \psi_{0,x} = u_{1,x}\psi_0 + \psi_1,\\ \psi_{k,x} = (u_{k+1,x} - u_{k,x})\psi_k + \psi_{k+1}, \quad 1 \leqslant k \leqslant N \end{cases} \tag{3.2}$$

и динамику по y

$$\begin{cases} \psi_{0,y} = 0,\\ \psi_{k,y} = -e^{u_{k+1}-2u_k+u_{k-1}}, \qquad 1 \leqslant k \leqslant N. \end{cases} \tag{3.3}$$

Построим сначала y-интегралы. Для этого пользуясь системой (3.2) выведем ряд соотношений

$$\begin{aligned} &\psi_1 = (D_x - u_{1,x})\psi_0,\\ &\psi_2 = (D_x - u_{2,x} + u_{1,x})(D_x - u_{1,x})\psi_0,\\ &\cdots\cdots\cdots\\ &\psi_N = (D_x - u_{N,x} + u_{N-1,x})\cdots(D_x - u_{1,x})\psi_0. \end{aligned}$$

В силу равенств $\psi_{N+1} = 0$ и $u_{N+1} = 0$ последнее равенство в системе (3.2) имеет вид

$$\psi_{N,x} + u_{N,x}\psi_N = 0.$$

Поэтому функция ψ_0 удовлетворяет уравнению $B\psi_0 = 0$, где дифференциальный оператор B задается соотношением

$$B = (D_x + u_{N,x})(D_x - u_{N,x} + u_{N-1,x})\cdots(D_x - u_{1,x}).$$

Перепишем оператор B в виде полинома

$$B = D_x^{N+1} + \gamma_{N-1}D_x^{N-1} + \gamma_{N-2}D_x^{N-2} + \cdots + \gamma_1 D_x + \gamma_0.$$

С учетом первого уравнения системы (3.3) функция ψ_0 удовлетворяет следующей паре уравнений

$$B\psi_0 = 0, \quad D_y\psi_0 = 0. \tag{3.4}$$

Из системы (3.4) очевидным образом вытекает соотношение

$$D_y(\gamma_{N-1})D_x^{N-1}\psi_0 + D_y(\gamma_{N-2})D_x^{N-2}\psi_0 + \cdots + D_y(\gamma_1)D_x\psi_0 + D_y(\gamma_0)\psi_0 = 0,$$

которое выполняется на произвольном решении уравнений Лакса (3.2), (3.3). Поэтому функции $D_x^{N-1}\psi_0$, $D_x^{N-2}\psi_0$, …, ψ_0, вообще говоря, не являются линейно зависимыми. Отсюда следует, что для всех $i = 0, 1, \ldots, N-1$ выполняется условие $D_y\gamma_i = 0$. Пользуясь Теоремой 2.1 можно показать, что функции γ_0, γ_1, …, γ_{N-1} образуют полный набор независимых характеристических y-интегралов системы уравнений (3.1). Интегралы по другому направлению ищутся аналогично.

3.1. Примеры. При $N = 2$ система имеет вид

$$\begin{cases} u_{1,xy} = e^{u_2-2u_1}, \\ u_{2,xy} = e^{-2u_2+u_1}. \end{cases} \tag{3.5}$$

Пара Лакса для (3.5) задается уравнениями

$$\begin{cases} \psi_{0,x} = u_{1,x}\psi_0 + \psi_1, \\ \psi_{1,x} = (u_{2,x} - u_{1x})\,\psi_1 + \psi_2, \\ \psi_{2,x} = -u_{2,x}\psi_2 \end{cases} \tag{3.6}$$

и

$$\begin{cases} \psi_{0,y} = 0, \\ \psi_{1,y} = -e^{u_2-2u_1}, \\ \psi_{2,y} = e^{-2u_2+u_1}. \end{cases} \tag{3.7}$$

Из соотношений (3.6) получим:

$$(D_x + u_{2,x})\,(D_x - (u_{2,x} - u_{1,x}))\,(D_x - u_{1,x})\,\psi_0 = 0.$$

Из первого уравнения системы (3.7) имеем $D_y\psi_0 = 0$. Оператор B в развернутом виде имеет вид:

$$\begin{aligned} B =& D_x^3 + \left(-u_{2,xx} - u_{1,xx} + u_{2,x}u_{1,x} - u_{1,x}^2 - u_{2,x}^2\right) D_x \\ &+ \left(-u_{1,xxx} + u_{2,xx}u_{1,x} - 2u_{1,x}u_{1,xx} + u_{2,x}^2u_{1,x} - u_{1,x}^2u_{2,x}\right), \end{aligned}$$

этот оператор и является искомой производящей функцией интегралов. Соответственно, функции

$$\begin{aligned} J_1 &= -u_{2,xx} - u_{1,xx} + u_{2,x}u_{1,x} - u_{1,x}^2 - u_{2,x}^2, \\ J_2 &= -u_{1,xxx} + u_{2,xx}u_{1,x} - 2u_{1,x}u_{1,xx} + u_{2,x}^2u_{1,x} - u_{1,x}^2u_{2,x} \end{aligned}$$

являются y-интегралами системы.

4. Редукции полиномиального уравнения Тоды E_2

Напомним, что бесконечная система уравнений вида

$$u_{n,y} = u_n(v_{n+1} - v_n), \qquad v_{n,x} = u_n - u_{n-1}, \quad n \in \mathbb{Z} \tag{4.1}$$

называется полиномиальной цепочкой Тоды. Она имеет пару Лакса, заданную в виде системы линейных уравнений

$$\psi_{n,x} = -u_n\psi_{n+1}, \qquad \psi_{n,y} = -v_n\psi_n + \psi_{n-1}. \tag{4.2}$$

Ниже мы исследуем на предмет интегрируемости в смысле Дарбу систему гиперболических уравнений

$$\begin{aligned} &u_{1,y} = u_1(v_2 - v_1),\\ &u_{2,y} = u_2(v_3 - v_2),\\ &\cdots\cdots\cdots\\ &u_{N-2,y} = u_{N-2}(v_{N-1} - v_{N-2}),\\ &u_{N-1,y} = -u_{N-1}\Big(2v_{N-1} + \sum_{j=1}^{N-2} v_j\Big) \end{aligned} \tag{4.3}$$

и

$$\begin{aligned} &v_{1,x} = u_1,\\ &v_{2,x} = u_2 - u_1,\\ &\cdots\cdots\cdots\\ &v_{N-1,x} = u_{N-1} - u_{N-2},\\ &v_{N-1,x} = -u_{N-1}, \end{aligned} \tag{4.4}$$

полученную из цепочки (4.1) в результате наложения условий обрыва

$$u_0 = 0, \qquad u_N = 0, \qquad v_1 + v_2 + \cdots + v_N = 0. \tag{4.5}$$

Насколько известно авторам, такие редукции цепочки (4.1) ранее в литературе не обсуждались. Отметим, что при выполнении условий

$$\Psi_0 = 0, \qquad \Psi_{N+1} = 0$$

линейная система (4.2) превращается в пару Лакса для для системы (4.3), (4.4). Динамика собственных функций по переменной x определяется системой уравнений

$$\begin{aligned} &\psi_{1,x} = -u_1\psi_2,\\ &\psi_{2,x} = -u_2\psi_3,\\ &\cdots\cdots\cdots\\ &\psi_{N-1,x} = -u_{N-1}\psi_N,\\ &\psi_{N,x} = 0 \end{aligned} \tag{4.6}$$

а динамика по y — системой

$$\begin{aligned} &\psi_{1,y} = -v_1\psi_1,\\ &\psi_{2,y} = -v_2\psi_2 + \psi_1,\\ &\cdots\cdots\cdots\\ &\psi_{N-1,y} = -v_{N-1}\psi_{N-1} + \psi_{N-2},\\ &\psi_{N,y} = \sum_{j=1}^{N-1} v_j\psi_N + \psi_{N-1}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Для поиска x-интегралов системы (4.3), (4.4) воспользуемся уравнениями (4.7), из которых следует ряд соотношений

$$\begin{aligned}
&\psi_{N-1} = \Big(D_y - \sum_{j=1}^{N-1} v_j\Big)\psi_N,\\
&\psi_{N-2} = (D_y + v_{N-1})\Big(D_y - \sum_{j=1}^{N-1} v_j\Big)\psi_N,\\
&\cdots\cdots\cdots\\
&\psi_1 = (D_y + v_2)(D_y + v_3)\cdots(D_y + v_{N-1})\Big(D_y - \sum_{j=1}^{N-1} v_j\Big)\psi_N,
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Из первого уравнения системы (4.7) в силу последнего соотношения в (4.8) получаем равенство $B\psi_N = 0$, где оператор B имеет вид

$$B = (D_y + v_1)(D_y + v_2)(D_y + v_3)\cdots(D_y + v_{N-1})\Big(D_y - \sum_{j=1}^{N-1} v_j\Big).$$

С другой стороны имеем $\psi_{N,x} = 0$. Поэтому в итоге приходим к паре соотношений на функцию ψ_N:

$$B\psi_N = 0, \qquad D_x\psi_N = 0, \tag{4.9}$$

из которых очевидным образом вытекает, что

$$D_x(B)\psi_N = 0. \tag{4.10}$$

Перепишем оператор B в развернутом виде

$$B = D_y^N + \gamma_N D_y^{N-1} + \cdots + \gamma_2 D_y + \gamma_1.$$

Тогда соотношение $D_x(B)\psi_N = 0$ примет вид

$$D_x(\gamma_N)D_y^{N-1}(\psi_N) + D_x(\gamma_{N-1})D_y^{N-2}(\psi_N) + \cdots + D_x(\gamma_2)D_y(\psi_N) + D_x(\gamma_1)\psi_N = 0.$$

Далее заметим, что функция ψ_N является произвольным решением линейного уравнения $B\psi_N = 0$ порядка N, поэтому функции ψ_N, $D_y\psi_N$, …, $D_y^{N-1}\psi_N$, вообще говоря, не являются линейно зависимыми. Следовательно, коэффициенты линейной комбинации выше, а именно, функции $D_x(\gamma_1)$, $D_x(\gamma_2)$, …, $D_x(\gamma_N)$ обращаются в нуль. Другими словами γ_1, γ_2, …, γ_N являются x-интегралами системы (4.3), (4.4).

Построим y-интегралы системы (4.3), (4.4) воспользовавшись соотношением $R_1\psi_1 = 0$, где оператор R_1 имеет вид

$$R_1 = D_x\frac{1}{u_{N-1}}D_x\frac{1}{u_{N-2}}D_x\ldots\frac{1}{u_1}D_x. \tag{4.11}$$

Это соотношение является простым следствием системы уравнений (4.6). С другой стороны, из (4.7) имеем уравнение $\psi_{1,y} = -v_1\psi_1$, которое нужно привести к удобной для решения форме. Для этого мы воспользуемся подстановками вида

$$u_1 = e^{q_2-q_1}, \qquad u_2 = e^{q_3-q_2}, \qquad \ldots, \qquad u_{N-1} = e^{q_N-q_{N-1}}, \tag{4.12}$$

а также соотношениями вида

$$v_1 = q_{1y}, \qquad v_2 = q_{2y}, \qquad \ldots, \qquad v_N = q_{Ny}, \tag{4.13}$$

связывающими систему (4.3), (4.4) со следующей системой гиперболических уравнений

$$q_{1,xy} = e^{q_2-q_1}, \qquad q_{2,xy} = e^{q_3-q_2} - e^{q_2-q_1}, \qquad \ldots, \qquad q_{N,xy} = -e^{q_N-q_{N-1}}, \tag{4.14}$$

являющейся редукцией экспоненциальной цепочки Тоды (см. [13]). Легко проверить, что выполняется равенство

$$(q_1 + q_2 + \cdots + q_N)_{xy} = 0,$$

поэтому имеем $q_1 + q_2 + \cdots + q_N = a(x) + b(y)$, где $a(x)$ и $b(y)$ произвольные функции. Для отыскания функций q_1, q_2, …, q_N по известным u_1, u_2, …, u_N можно воспользоваться системой уравнений вида

$$\begin{aligned} &q_1 + q_2 + \cdots + q_N = a + b,\\ &q_2 - q_1 = \ln u_2,\\ &\cdots\cdots\cdots\\ &q_{N-1} - q_{N-2} = \ln u_{N-2},\\ &q_N - q_{N-1} = \ln u_{N-1}. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Посредством элементарных преобразований можно найти явные выражения для искомых функций

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{1}{N}\left(a + b - (N-1)\ln u_1 - (N-2)\ln u_2 \cdots - 3\ln u_{N-3} - 2\ln u_{N-2} - \ln u_{N-1}\right),\\ q_2 &= \frac{1}{N}\left(a + b + \ln u_1 - (N-2)\ln u_2 \cdots - 3\ln u_{N-3} - 2\ln u_{N-2} - \ln u_{N-1}\right),\\ &\cdots\cdots\cdots\\ q_{N-1} &= \frac{1}{N}\left(a + b + \ln u_1 + 2\ln u_2 \cdots + (N-3)\ln u_{N-3} + (N-2)\ln u_{N-2} - \ln u_{N-1}\right),\\ q_N &= \frac{1}{N}\left(a + b + \ln u_1 + 2\ln u_2 \cdots + (N-3)\ln u_{N-3} + (N-2)\ln u_{N-2} + (N-1)\ln u_{N-1}\right). \end{aligned}$$

В паре соотношений

$$R_1\psi_1 = 0, \qquad \psi_{1,y} = -v_1\psi_1 \tag{4.16}$$

перейдем к переменным q_1 и ϕ_1, полагая $\psi_1 = e^{-q_1}\phi_1$ и пользуясь равенством $v_1 = q_{1y}$ (см. выше). В итоге получим $D_y\phi_1 = 0$, $Re^{-q_1}\phi_1 = 0$, где функции $e^{\pm q_1}$ предполагаются выраженными в терминах u_j. Далее преобразуем оператор R_1 по следующему правилу

$$R = e^{q_1}u_1u_2\ldots u_{N-1}R_1e^{-q_1}.$$

Нетрудно проверить, что полученный оператор

$$R = e^{q_1}u_1u_2\ldots u_{N-1}\Big(D_x\frac{1}{u_{N-1}}D_x\frac{1}{u_{N-2}}D_x\ldots\frac{1}{u_1}D_x\Big)e^{-q_1}$$

можно представить в виде полинома от оператора D_x

$$R = D_x^N + \beta_{N-1}D_x^{N-1} + \cdots + \beta_1D_x + \beta_0,$$

где функции β_j зависят только от переменных u_1, u_2, …, u_{N-1} и их производных по x. Из пары соотношений

$$D_y\phi_1 = 0, \qquad R_1\phi_1 = 0$$

немедленно следует, что $D_y(R_1)\phi_1 = 0$, или в развернутом виде

$$D_y(\beta_{N-1})(D_x^{N-1}\phi_1) + D_y(\beta_{N-2})(D_x^{N-2}\phi_1) + \cdots + D_y(\beta_0)\phi_1 = 0.$$

В силу того, что функции $D_x^{N-1}\phi_1$, $D_x^{N-2}\phi_1$, …, $D_x\phi_1$, ϕ_1, вообще говоря, являются линейно независимыми, все коэффициенты в линейном выражении выше равны нулю. Поэтому для любого $j = 0, \ldots, N-1$ функция β_j является характеристическим y-интегралом системы (4.3), (4.4).

4.1. Примеры. Рассмотрим иллюстративные примеры.

Пример 1. При $N = 2$ система (4.3), (4.4) имеет вид

$$u_y = -2uv, \qquad v_x = u. \tag{4.17}$$

Ее пара Лакса задается уравнениями

$$\psi_{1,x} = -u\psi_2, \qquad \psi_{2,x} = 0,$$
$$\psi_{1,y} = -v\psi_1, \qquad \psi_{2,y} = v\psi_2 + \psi_1.$$

Для поиска x-интегралов воспользуемся производящей функцией интегралов

$$B = (D_y + v)(D_y - v) = D_y^2 - v_y - v^2.$$

Поэтому функция $I = v_y + v^2$ является x-интегралом системы (4.17).

Для построения интеграла по направлению y воспользуемся оператором

$$R_1 = e^{-q_1} D_x e^{2q_1} D_x e^{-q_1} = D_x^2 + q_{1,xx} - q_{1,x}^2.$$

Переходя в выражении $q_{1,xx} + q_{1,x}^2$ к переменным u получаем

$$q_{1,xx} + q_{1,x}^2 = -\frac{1}{2}\Big(\frac{u_{xx}}{u} - \frac{3}{2}\frac{u_x^2}{u^2}\Big).$$

Следовательно, функция

$$J = \frac{u_{xx}}{u} - \frac{3}{2}\frac{u_x^2}{u^2}$$

является y-интегралом системы (4.17). Отметим, что система (4.17) легко сводится к уравнению

$$v_{xy} + 2vv_x = 0,$$

найденному в работе [7], где была доказана его интегрируемость по Дарбу.

Пример 2. Для $N = 3$ система уравнений (4.3), (4.4) имеет вид

$$u_{1,y} = u_1(v_2 - v_1), \qquad u_{2,y} = -u_2(2v_2 + v_1), \tag{4.18}$$
$$v_{1,x} = u_1, \qquad v_{2,x} = u_2 - u_1. \tag{4.19}$$

Представим оператор

$$B = (D_y + v_1)(D_y + v_2)(D_y - v_1 - v_2)$$

в развернутом виде

$$B = D_y^3 + (h - 2w_y - w^2)D_y - w_{yy} - ww_y - hw,$$

где $w = v_1 + v_2$, $h = v_{2,y} + v_1v_2$. После некоторых упрощений получаем полный набор независимых интегралов системы (4.18), (4.19)

$$I_1 = 2v_{1,y} + v_{2,y} + v_1^2 + v_2^2 + v_1v_2,$$
$$I_2 = v_{1,yy} + v_{2,yy} + (v_1 + v_2)(v_{1,y} + 2v_{2,y} + v_1v_2).$$

Производящей функцией y-интегралов является оператор

$$R = e^{q_1}u_1u_2D_x\frac{1}{u_2}D_x\frac{1}{u_1}D_xe^{-q_1}.$$

Из соотношений (4.12), с учетом условий обрыва (4.5) находим представления $u_1 = e^{q_2-q_1}$, $u_2 = e^{-2q_2-q_1}$, в силу которых имеем

$$R = e^{-q_2-q_1}D_xe^{2q_2+q_1}D_xe^{q_1-q_2}D_xe^{-q_1}.$$

Прямым вычислением можно показать, что оператор R представляется в виде

$$R = D_x^3 + J_1D_x + J_0,$$

где коэффициенты J_1, J_2 имеют следующий вид

$$J_1 = -2q_{1,xx} - q_{2,xx} + q_{1,x}q_{2,x} - (q_{1,x} + q_{2,x})^2,$$
$$J_2 = -q_{1,xxx} + q_{1,x}q_{2,xx} - q_{1,x}q_{1xx} + q_{1,x}^2 q_{2,x} + q_{1,x}q_{2,x}^2,$$

при этом выполняются условия $D_y J_1 = 0$, $D_y J_2 = 0$. Переходя к исходным переменным u_1, u_2 посредством замены $q_1 = -\frac{1}{3}\ln(u_2 u_1^2)$, $q_2 = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{u_1}{u_2}\right)$ получаем полный набор y-интегралов системы (4.18)–(4.19):

$$\begin{aligned} J_1 =& \frac{u_{1,xx}}{u_1} + \frac{u_{2,xx}}{u_2} - \frac{4}{3}\frac{u_{1,x}^2}{u_1^2} - \frac{1}{3}\frac{u_{1,x}u_{2,x}}{u_1 u_2} - \frac{4}{3}\frac{u_{2,x}^2}{u_2^2}, \\ J_2 =& \frac{2}{3}\frac{u_{1,xxx}}{u_1} + \frac{u_{2,xxx}}{3u_2} - \left(\frac{8}{3}\frac{u_{1,x}}{u_1} + \frac{u_{2,x}}{3u_2}\right)\frac{u_{1,xx}}{u_1} - \frac{u_{2,x}u_{2,xx}}{u_2^2} \\ &+ \frac{56}{27}\frac{u_{1,x}^3}{u_1^3} + \frac{4}{9}\frac{u_{1,x}^2 u_{2,x}}{u_1^2 u_2} - \frac{u_{2,x}^2 u_{1,x}}{9u_2^2 u_1} + \frac{16}{27}\frac{u_{2,x}^3}{u_1^3}. \end{aligned}$$

5. Характеристические интегралы конечной редукции уравнения E_3

Рассмотрим систему уравнений вида

$$\begin{aligned} &u_{1,xy} = u_{1,x}e^{u_2-u_1}, \\ &u_{2,xy} = u_{2,x}\left(e^{u_3-u_2} - e^{u_2-u_1}\right), \\ &\cdots\cdots\cdots \\ &u_{N-1,xy} = u_{N-1,x}\left(e^{u_N-u_{N-1}} - e^{u_{N-1}-u_{N-2}}\right), \\ &u_{N,xy} = -u_{N,x}e^{u_N-u_{N-1}}, \end{aligned} \tag{5.1}$$

полученную из E_3 в результате наложения условий обрыва $u_0 = +\infty$ и $u_{N+1} = -\infty$. Пара Лакса для (5.1) задается в виде двух систем дифференциальных уравнений, определяющих динамику по x:

$$\begin{cases} \psi_{k,x} = u_{k,x}\left(\psi_k - \psi_{k+1}\right), & 1 \leqslant k \leqslant N-1, \\ \psi_{N,x} = u_{N,x}\psi_N, \end{cases} \tag{5.2}$$

и динамику по y:

$$\begin{cases} \psi_{1,y} = 0, \\ \psi_{k,y} = e^{u_k-u_{k-1}}\left(\psi_{k-1} - \psi_k\right), & 2 \leqslant k \leqslant N-1. \end{cases} \tag{5.3}$$

Построим сначала y-интегралы. Выразим ψ_2 из первого уравнения системы (5.2):

$$\psi_2 = \left(1 - \frac{1}{u_{1,x}}D_x\right)\psi_1.$$

Далее выразим ψ_3, снова воспользовавшись равенством (5.2),

$$\psi_3 = \left(1 - \frac{1}{u_{2,x}}D_x\right)\left(1 - \frac{1}{u_{1,x}}D_x\right)\psi_1.$$

Тогда

$$\psi_N = \left(1 - \frac{1}{u_{N-1,x}}D_x\right)\left(1 - \frac{1}{u_{N-2,x}}D_x\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{u_{1,x}}D_x\right)\psi_1.$$

Из последнего уравнения (5.2) имеем $D_x\left(e^{-u_N}\psi_N\right)=0$, следовательно функция ψ_1 лежит в ядре оператора

$$B=D_xe^{-u_N}\left(1-\frac{1}{u_{N-1,x}}D_x\right)\left(1-\frac{1}{u_{N-2,x}}D_x\right)\dots\left(1-\frac{1}{u_{1,x}}D_x\right).$$

Отсюда, в силу $\psi_{1,y}=0$, приходим к системе соотношений на ψ_1:

$$B\psi_1=0,\quad D_y\psi_1=0,$$

откуда следует, что $D_y(B)\psi_1=0$ или в развернутом виде

$$D_y(\beta_{N-1})(D_x^{N-1}\psi_1)+D_y(\beta_{N-2})(D_x^{N-2}\psi_1)+\dots+D_y(\beta_0)\psi_1=0.$$

В силу того, что функции $D_x^{N-1}\psi_1$, $D_x^{N-2}\psi_1$, $\dots D_x\psi_1$, ψ_1, вообще говоря, являются линейно независимыми, все коэффициенты линейном выражении выше равны нулю. Поэтому для любого $j=0,\dots,N-1$ функция β_j является характеристическим y-интегралом системы (5.1).

5.1. Примеры. Рассмотрим иллюстративные примеры.

Пример 1. При $N=2$ система (5.1) имеет вид

$$\begin{cases}u_{1,xy}=u_{1,x}e^{u_2-u_1},\\ u_{2,xy}=-u_{2,x}e^{u_2-u_1}.\end{cases}\tag{5.4}$$

Пара Лакса для (5.4) задается уравнениями

$$\psi_{1,x}=u_{1,x}\left(\psi_1-\psi_2\right),\qquad \psi_{2,x}=u_{2,x}\psi_2,$$
$$\psi_{1,y}=0,\qquad \psi_{2,y}=e^{u_2-u_1}\left(\psi_1-\psi_2\right).$$

Из последних соотношений получим:

$$\left(D_x-u_{2,x}\right)\frac{1}{u_{1,x}}\left(D_x-u_{1,x}\right)\psi_1=0$$

или

$$\left(D_x-\left(\frac{u_{1,xx}}{u_{1,x}}+u_{2,x}\right)\right)\left(D_x-u_{1,x}\right)\psi_1=0.$$

Оператор B в развернутом виде имеет вид:

$$B=D_x^2+\left(\frac{u_{1,xx}}{u_{1,x}}+u_{2,x}+u_{1,x}\right)D_x+u_{2,x}u_{1,x},$$

он и является производящей функцией интегралов. Соответственно, функции

$$J_1=\frac{u_{1,xx}}{u_{1,x}}+u_{2,x}+u_{1,x},\qquad J_2=u_{2,x}u_{1,x}$$

являются y-интегралами системы (5.4). Вычисляя определитель вида (2.2) убеждаемся, что интегралы независимы:

$$\begin{vmatrix}\dfrac{1}{u_{1,x}} & 0\\ u_{2,x} & u_{1,x}\end{vmatrix}=1.$$

Пример 2. При $N=3$ система (5.1) имеет вид

$$\begin{cases}u_{1,xy}=u_{1,x}e^{u_2-u_1},\\ u_{2,xy}=u_{2,x}\left(e^{u_3-u_2}-e^{u_2-u_1}\right),\\ u_{3,xy}=-u_{3,x}e^{u_3-u_2}.\end{cases}\tag{5.5}$$

Пара Лакса для (5.5) задается уравнениями

$$\begin{cases} \psi_{1,x} = u_{1,x}\left(\psi_1 - \psi_2\right), \\ \psi_{2,x} = u_{2,x}\left(\psi_2 - \psi_3\right), \\ \psi_{3,x} = u_{3,x}\psi_3, \end{cases} \tag{5.6}$$

и

$$\begin{cases} \psi_{1,y} = 0, \\ \psi_{2,y} = e^{u_2-u_1}\left(\psi_1 - \psi_2\right), \\ \psi_{3,y} = e^{u_3-u_2}\left(\psi_2 - \psi_3\right). \end{cases} \tag{5.7}$$

Из последних соотношений получим:

$$B\psi_1 = \left(D_x - u_{3,x}\right)\left(\frac{1}{u_{2,x}}\right)\left(D_x - u_{2,x}\right)\left(\frac{1}{u_{1,x}}\right)\left(D_x - u_{1,x}\right)\psi_1 = 0.$$

Запишем оператор B, являющийся производящей функцией интегралов, в развернутом виде:

$$\begin{aligned} B =& D_x^3 + \left(r_1 + r_2 + r_3\right)D_x^2 + \left(r_{2,x} + 2r_{1,x} + r_1r_2 + r_2r_3 + r_1r_3\right)D_x \\ &+ r_{1,xx} + r_{1,x}r_2 + r_1r_{2,x} + r_3r_{1,x} + r_1r_2r_3, \end{aligned}$$

где

$$r_1 = u_{1,x}, \qquad r_2 = \frac{u_{1,xx}}{u_{1,x}} + u_{2,x}, \qquad r_3 = \frac{u_{1,xx}}{u_{1,x}} + \frac{u_{2,xx}}{u_{2,x}} + u_{3,x}.$$

Соответственно, функции

$$\begin{aligned} J_1 =& -\frac{u_{1,xxx}}{u_{1,x}} + 2\frac{{u_{1,xx}}^2}{{u_{1,x}}^2} + \frac{u_{1,xx}u_{2,xx}}{u_{1,x}u_{2,x}} + \frac{u_{1,xx}}{u_{1,x}}\left(u_{3,x} + u_{2,x}\right) \\ &+ \frac{u_{2,xx}u_{1,x}}{u_{2,x}} + u_{1,x}u_{2,x} + u_{2,x}u_{3,x} + u_{1,x}u_{3,x}, \\ J_2 =& u_{1,x} + u_{2,x} + u_{3,x} + 2\frac{u_{1,xx}}{u_{1,x}} + \frac{u_{2,xx}}{u_{2,x}}, \\ J_3 =& u_{3,x}u_{2,x}u_{1,x} \end{aligned}$$

являются y-интегралами системы (5.5). Вычислим определитель (2.2) для полученных интегралов:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{-1}{u_{1,x}} & 0 & 0 \\ \dfrac{2}{u_{1,x}} & \dfrac{1}{u_{2,x}} & 0 \\ u_{3,x}u_{2,x} & u_{1,x}u_{3,x} & u_{1,x}u_{2,x} \end{vmatrix} = -1.$$

Он отличен от нуля, следовательно, найденные функции образуют полный набор независимых интегралов.

Построим интегралы по направлению x. Для этого, пользуясь системой (5.3), выразим ψ_{N-1}, ψ_{N-2}, …, ψ_1 через ψ_N:

$$\begin{aligned} &\psi_{N-1} = \left(e^{-\omega_{N-1}}D_y + 1\right)\psi_N, \qquad \omega_{N-1} = u_n - u_{N-1}, \\ &\psi_{N-2} = \left(e^{-\omega_{N-2}}D_y + 1\right)\left(e^{-\omega_{N-1}}D_y + 1\right)\psi_N, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ &\psi_1 = \left(e^{-\omega_1}D_y + 1\right)\cdots\left(e^{-\omega_{N-1}}D_y + 1\right)\psi_N. \end{aligned}$$

Пользуясь первым уравнением из (5.2), получим

$$H\psi_N = 0,$$

где

$$H = D_y\left(e^{-\omega_1}D_y + 1\right)\cdots\left(e^{-\omega_{N-1}}D_y + 1\right).$$

С другой стороны, из последнего уравнения системы (5.3) можно получить

$$D_x\left(e^{-u_N}\psi_N\right) = 0.$$

Следовательно, функция $R = e^{-u_N}\psi_N$ удовлетворяет системе уравнений вида:

$$\tilde{H}R = 0, \qquad D_xR = 0.$$

Поэтому в силу рассуждений, приведенных выше, оператор $\tilde{H}$ является производящей функцией характеристических x-интегралов системы (5.1).

Пример 3. При $N = 2$ система имеет вид (5.4), пара Лакса задается уравнениями

$$\psi_{1,x} = u_{1,x}\left(\psi_1 - \psi_2\right), \qquad \psi_{2,x} = u_{2,x}\psi_2$$
$$\psi_{1,y} = 0, \qquad \psi_{2,y} = e^{u_2-u_1}\left(\psi_1 - \psi_2\right),$$

откуда мы получим:

$$D_y\left(e^{-u_2+u_1}D_y + 1\right)\psi_2 = 0, \qquad \left(D_x - u_{2,x}\right)\psi_2 = 0$$

или

$$D_y\left(e^{-u_2+u_1}D_y + 1\right)e^{u_2}\xi = 0, \qquad D_x\xi = 0, \qquad \xi = e^{-u_2}\psi_2.$$

Тогда оператор $\bar{H}$ будет иметь вид:

$$D_y^2 + \left(u_{2,y} + u_{1,y} + e^{u_2-u_1}\right)D_y + \left(u_{2,yy} + u_{1,y}u_{2,y} + e^{u_2-u_1}u_{2,y}\right),$$

а функции

$$J_1 = u_{2,y} + u_{1,y} + e^{u_2-u_1}, \qquad J_2 = u_{2,yy} + u_{1,y}u_{2,y} + e^{u_2-u_1}u_{2,y}$$

являются x-интегралами системы (5.4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Е.И. Ганжа, С.П. Царев. *Интегрирование классических серий экспоненциальных систем типа I: Учеб. пособие.* Красноярск: Красноярский гос. пед. ун-т. 2001.
2. Д.К. Демской. *Интегралы открытых двумерных цепочек* // Теор. мат. физ. **163**:1, 79–85 (2010).
3. А.В. Жибер, Р.Д. Муртазина, И.Т. Хабибуллин, А.Б. Шабат. *Характеристические кольца Ли и нелинейные интегрируемые уравнения.* М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований. 2012.
4. А.В. Жибер, В.В. Соколов. *Точно интегрируемые гиперболические уравнения лиувиллевского типа* // Успехи мат. наук. **56**:1, 63–106 (2001).
5. А.В. Жибер, С.Я. Старцев. *Интегралы, решения и существование преобразований Лапласа линейной гиперболической системы уравнений* // Мат. заметки **74**:6, 848–857 (2003).
6. А.Н. Лезнов, М.В. Савельев. *Групповые методы интегрирования нелинейных динамических систем.* М.: Наука. 1985.
7. А.Г. Мешков, В.В. Соколов. *Гиперболические уравнения с симметриями третьего порядка* // Теор. мат. физ. **166**:1, 51–67 (2011).
8. С.В. Смирнов. *Интегрируемость по Дарбу дискретных двумеризованных цепочек Тоды* // Теор. мат. физ. **182**:2, 231–255 (2015).
9. А.Б. Шабат, Р.И. Ямилов. *Экспоненциальные системы типа I и матрицы Картана* // Препринт. Башкирский филиал АН СССР, Уфа. 1981.
10. D.K. Demskoi. *Characteristic integrals and general solution of the Ferapontov — Shabat — Yamilov lattice* // Phys. Scr. **100**:5, 055237 (2025).

11. I.T. Habibullin, A.U. Sakieva. *On integrable reductions of two-dimensional Toda-type lattices* // Part. Differ. Equ. Appl. Math. **11**, 100854 (2024).
12. A.N. Leznov, A.B. Shabat, R.I. Yamilov. *Canonical transformations generated by shifts in nonlinear lattices* // Phys. Lett., A **174**:5–6, 397–402 (1993).
13. A.B. Shabat, R.I. Yamilov. *To a transformation theory of two-dimensional integrable systems* // Phys. Lett., A **227**:1–2, 15–23 (1997).
14. R. Yamilov. *Symmetries as integrability criteria for differential difference equations* // J. Phys. A **39**:45, R541–R623 (2006).

Исмагил Талгатович Хабибуллин,
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: habibullinismagil@gmail.com

Альфия Ураловна Сакиева,
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: alfya.sakieva@yandex.ru