ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 18 № 4 (2026). С. 109-117.

УДК 517.962.22

ОБ АНАЛИТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ЛИНЕЙНОГО ГОМОЛОГИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

А.А. ФЕДОТОВ

Аннотация. Исследуются решения разностного уравнения $f(x+\omega)-f(x)=g(x)$, в котором $x\in\mathbb{R}$ — переменная, $\omega\in(0,1)$ — заданное число, а g — заданная аналитическая 1–периодическая функция. Хорошо известно, что в случае, когда число ω диофантово (достаточно плохо приближается рациональными числами), то можно построить 1–периодическое решение, аналитическое в окрестности вещественной оси. Если ω рационально, то периодических решений в общем случае нет. Мы построили квазипериодическое аналитическое решение, которое в случае диофантовых ω распадается в сумму известного 1–периодического решения и аналитической ω–периодической функции. Можно сказать, что в случае чисел ω, хорошо приближаемых рациональными, ряды Фурье каждого из этих двух слагаемых расходятся, но их сумма остается аналитической.

Ключевые слова: гомологическое уравнение, квазипериодическое решение.

Mathematics Subject Classification: 39A06, 39A24, 39A45

1. Введение

Пусть $\omega\in(0,1)$ — заданное положительное число, а ϕ — заданная 1–периодическая функция вещественной или комплексной переменной,

$$\phi(x+1)=\phi(x).$$

Уравнение

$$\lambda(x+\omega)-\lambda(x)=\phi(x),\quad x\in\mathbb{R}, \tag{1.1}$$

часто называют *линейным гомологическим уравнением*. Такие уравнения встречается в самых разных задачах математической физики. Возникают они и в спектральной теории при исследовании одномерных квазипериодических операторов Шредингера с помощью идей теории КАМ (Колмогорова — Арнольда — Мозера), см. напр. [4], при исследовании разностных уравнений на вещественной оси с периодическими коэффициентами, см.напр, [1], при исследовании нетривиальных модельных разностных квазипериодических разностных операторов Шредингера на целочисленной решетке, см. напр., [3, раздел 10.3]. При этом требуются 1–периодические решения гомологического уравнения. Они существуют лишь для частот ω, достаточно плохо приближаемых рациональными числами. Хотя такие решения не трудно построить в виде рядов Фурье, см. раздел 2, содержательно изучение их тонких свойств, см., напр., [7]. Наш интерес связан с исследованием свойств (обобщенных) собственных функций модели Сарнака, см., напр., [5], [6]. Для нас оказалось важным построить аналитические решения гомологического уравнения для всех иррациональных ω, в том числе, хорошо приближаемых рациональными числами.

A.A. Fedotov, On analytic solutions of a linear homological equation.

© Федотов А.А. 2026.

Работа выполнена при поддержке Российского Научного Фонда, проект 22-11-00092-П, https://rscf.ru/project/22-11-00092/.

Поступила 16 сентября 2026 г.

В этой короткой заметке мы построим частное решение (1.1) с помощью контурного интеграла, см. раздел 3. Отметим, что общее решение отличается от него лишь ω–периодическим слагаемым. Затем, мы подробнее обсудим случай, когда ϕ — аналитическая функция, см. раздел 4, и получим для построенного решения представление в виде предела суммы подходящим образом выбранных частичных сумм двух вообще говоря расходящихся рядов Фурье, один из которых является 1–периодическим, а второй — ω–периодическим, см. раздел 4.3. В случаях, когда существует 1–периодическое решение гомологического уравнения, построенное нами решение распадается в сумму 1–периодического решения и ω–периодической функции. В общем же случае можно сказать, что расходимости двух рядов Фурье (1–периодического и ω–периодического) компенсируют друг друга. Насколько мы знаем, эти результаты являются новыми. В заключение, в разделе 5 с помощью интегрального представления мы получим известные решения гомологического уравнения для диофантовых и рациональных ω.

Ниже буква C обозначает разные положительные постоянные, не зависящие от ω, других параметров и целочисленных индексов.

2. Стандартные решения гомологического уравнения

В двух случаях решения гомологического уравнения хорошо известны. Опишем их конструкцию, следуя [1]. Разложим функцию ϕ в ряд Фурье,

$$\phi(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \phi_n e^{2\pi i n x}.$$

2.1. Случай диофантовых чисел ω. Пусть ω — диофантово число, т.е. существуют такие числа $c > 0$ и $N \in \mathbb{N}$, что

$$\min_{p\in\mathbb{Z}} \left|\omega - \frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{c}{q^{N+1}} \quad \forall q \in \mathbb{N}. \tag{2.1}$$

Тогда для достаточно гладкой функции ϕ решение λ можно построить по формуле

$$\lambda = \frac{\phi_0}{\omega} x + \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{\phi_n}{e^{2\pi i n\omega} - 1} e^{2\pi i n x}. \tag{2.2}$$

Оценка (2.1) гарантирует сходимость ряда в (2.2), если $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} n^N |\phi_n| < \infty$.

2.2. Случай рациональных чисел ω. Пусть ω — рациональное число, $\omega = \dfrac{p}{q}$, где p и q — взаимно простые натуральные числа. Теперь, если ряд Фурье функции ϕ сходится абсолютно, λ можно построить по формуле

$$\lambda = \frac{x}{\omega} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \phi_{nq} e^{2\pi i q n x} + \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus(q\mathbb{Z})} \frac{\phi_n}{e^{2\pi i n\omega} - 1} e^{2\pi i n x}. \tag{2.3}$$

Очевидно, ряды в этой формуле сходятся с той же скоростью, что и ряд Фурье для ϕ.

2.3. Замечание об общем решении гомологического уравнения. Не трудно видеть, что две функции одновременно являются решениями (1.1) тогда и только тогда, когда они отличаются на ω–периодическое слагаемое. Поэтому и в случае диофантовых ω, и в случае рациональных ω общее решение равно сумме построенного выше частного решения и ω–периодической функции.

3. Общая конструкция решений

Здесь мы предложим общую конструкцию решений через контурный интеграл.

Пусть для некоторого $K > 0$ функция $k \to \alpha(k)$ комплексной переменной k аналитична в полосе $-K < \operatorname{Im} k < K$, и пусть

$$\left|\frac{\phi_n}{\alpha(n)}\right| \leqslant \frac{C}{1+|n|}, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{3.1}$$

Положим

$$\Phi_\alpha(k) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\sin(\pi(k-n))}{\pi(k-n)} \frac{\phi_n}{\alpha(n)}, \tag{3.2}$$

считая, что $\dfrac{\sin(\pi(k-n))}{\pi(k-n)} = 1$ при $k = n$. Справедлива

Лемма 3.1. 1. $\Phi_\alpha(k)$ — *целая функция;*

2.

$$\Phi_\alpha(n) = \frac{\phi_n}{\alpha(n)}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}; \tag{3.3}$$

3.

$$|\Phi_\alpha(k)| \leqslant C\, e^{\pi|\operatorname{Im} k|}\, \frac{\ln\left(|\operatorname{Re} k|+1\right)+1}{|\operatorname{Re} k|+1}. \tag{3.4}$$

Доказательство. Второе свойство очевидно. Для проверки остальных оценим слагаемые в (3.2). Пусть $|\operatorname{Im} k| < K$, $n_0 \in \mathbb{Z}$ и $|\operatorname{Re} k - n_0| < \dfrac{3}{4}$. Очевидно,

$$\left|\frac{\sin(\pi(k-n_0))}{\pi(k-n_0)}\right| \leqslant C\, e^{\pi|\operatorname{Im} k|}. \tag{3.5}$$

Пусть $n \neq n_0$. Поскольку

$$|\operatorname{Re} k - n| = |n-n_0| \left|1 - \frac{\operatorname{Re} k - n_0}{n-n_0}\right| \geqslant \frac{1}{4}|n-n_0|,$$

имеем

$$\left|\frac{\sin(\pi(k-n))}{\pi(k-n)}\right| \leqslant C\, \frac{e^{\pi|\operatorname{Im} k|}}{\sqrt{(\operatorname{Im} k)^2 + (\operatorname{Re} k - n)^2}} \leqslant C\, \frac{e^{\pi|\operatorname{Im} k|}}{|n-n_0|}. \tag{3.6}$$

Из оценок (3.5) и (3.6) вытекает равномерная сходимость ряда в (3.2) на компактах, а значит, и то, что Φ_α — целая функция.

Теперь оценим саму функцию Φ_α. Если $n_0 = 0$, то из (3.6) и (3.1) следует, что

$$\Phi_\alpha(k) = \frac{\phi_0}{\alpha(0)} \frac{\sin \pi k}{\pi k} + O\left(e^{\pi|\operatorname{Im} k|} \sum_{n\neq 0} \frac{1}{|n|^2}\right),$$

откуда вытекает (3.4).

Рассмотрим случай $n_0 \neq 0$. Из (3.5) вытекает оценка слагаемого из (3.2) с $n = n_0$:

$$\left|\frac{\sin(\pi(k-n_0))}{\pi(k-n_0)} \frac{\phi_{n_0}}{\alpha(n_0)}\right| \leqslant C\, \frac{e^{\pi|\operatorname{Im} k|}}{n_0}.$$

В виду (3.6) и (3.1) для оценки суммы слагаемых с $n \neq n_0$ достаточно доказать, что

$$\sum_{n\neq n_0} \frac{1}{|n-n_0|} \frac{1}{1+|n|} \leqslant \frac{C}{n_0}\left(\ln n_0 + 1\right). \tag{3.7}$$

Из этой оценки и вытекает (3.4). Мы докажем (3.7) при условии $n_0 > 0$. Случай $n_0 < 0$ сводится к рассматриваемому с помощью замены индекса суммирования n на $-n$. При $n_0 > 0$ получаем

$$\sum_{n=-\infty}^{-2} \frac{1}{|n-n_0|}\frac{1}{1+|n|} < \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{|n+n_0|}\frac{1}{|n|} \leqslant C \int_1^{\infty} \frac{dn}{(n_0+n)n} = \frac{C}{n_0} \int_{\frac{1}{n_0}}^{\infty} \frac{d\tau}{(\tau+1)\tau}$$

$$\leqslant \frac{C}{n_0}\left(\int_{\frac{1}{n_0}}^{2} \frac{d\tau}{\tau} + \int_2^{\infty} \frac{d\tau}{\tau^2} \right) \leqslant \frac{C}{n_0}\left(\ln n_0 + 1\right);$$

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{|n-n_0|}\frac{1}{1+|n|} \leqslant \frac{C}{n_0} + C \int_{n_0+1}^{\infty} \frac{dn}{(n-n_0)n} = \frac{C}{n_0}\left(1 + \int_{1+\frac{1}{n_0}}^{\infty} \frac{d\tau}{(\tau-1)\tau} \right)$$

$$\leqslant \frac{C}{n_0}\left(1 + \int_{1+\frac{1}{n_0}}^{2} \frac{d\tau}{\tau-1} + \int_2^{\infty} \frac{d\tau}{\tau^2} \right) \leqslant \frac{C}{n_0}\left(\ln n_0 + 1\right);$$

$$\sum_{n=-1}^{n_0-1} \frac{1}{|n-n_0|}\frac{1}{1+|n|} < \frac{2}{n_0} + \sum_{n=1}^{n_0-1} \frac{1}{|n-n_0|\,n}$$

$$\leqslant \frac{C}{n_0}\left(1 + \sum_{n=1}^{\left[\frac{n_0}{2}\right]} \frac{1}{n} + \sum_{n=\left[\frac{n_0}{2}\right]+1}^{n_0-1} \frac{1}{n_0-n} \right) \leqslant \frac{C}{n_0}\left(\ln n_0 + 1\right).$$

Это завершает доказательство леммы. □

Пусть $\varepsilon > 0$. Предположим, что в полосе $-K < \operatorname{Im} k < K$

$$|\alpha(k)| \leqslant \frac{C}{1+|k|^{\varepsilon}}. \tag{3.8}$$

Замечание 3.1. *Условия, касающиеся α, неявно накладывают ограничения на ϕ. Очевидно, что можно выбрать α, удовлетворяющее условиям (3.1) и (3.8), если*

$$|\phi_n| \leqslant \frac{C}{1+|n|^{1+\varepsilon}}.$$

Отметим также, что условие (3.1) можно заметно ослабить.

Пусть $0 < K_1 < K$, а $\Gamma \subset \mathbb{C}$ — контур, состоящий из прямых $\operatorname{Im} k = \pm K_1$. Прямая $\operatorname{Im} k = -K_1$ ориентирована от $-\infty$ к ∞, прямая $\operatorname{Im} k = K_1$ ориентирована от ∞ к $-\infty$. Для $x \in \mathbb{R}$ положим

$$\lambda(x) = \frac{1}{2i} \int_{\Gamma} \alpha(k)\, \Phi_{\alpha}(k)\, e^{2\pi i k x} \frac{\operatorname{ctg} \pi k}{e^{2\pi i k \omega} - 1}\, dk. \tag{3.9}$$

В виду (3.4) и (3.8) интеграл в (3.9) сходится равномерно по x на любом конечном интервале вещественной оси, а значит, определяет непрерывную функцию $x \in \mathbb{R}$. Имеет место

Теорема 3.1. *Функция $x \mapsto \lambda(x)$ является решением гомологического уравнения.*

Доказательство. Очевидно, что

$$\lambda(x+\omega)-\lambda(x)=\frac{1}{2i}\int\limits_{\Gamma}\alpha(k)\,\Phi_\alpha(k)\,e^{2\pi ikx}\operatorname{ctg}\pi k\,dk. \tag{3.10}$$

Напомним, что согласно лемме 3.1 функция Φ_α аналитична по k. Применив к (3.10) теорему о вычетах, получим

$$\lambda(x+\omega)-\lambda(x)=\sum_{n=-N}^{N}\alpha(n)\,\Phi_\alpha(n)\,e^{2\pi inx}+\frac{1}{2i}(I_++I_-),$$

где $I_\pm$ — интегралы от того же подынтегрального выражения, что и в интеграле в (3.10), по контурам $\Gamma_\pm$, соответствующим рисунку 1. Отметим, что $\Gamma_\pm$ зависят от N, пересекая вещественную ось в точках $\pm\left(N+\frac{1}{2}\right)$ соответственно. Из оценок (3.4) и (3.8) вытекает, что интегралы $I_\pm$ стремятся к нулю при $N\to\infty$. Учитывая (3.3), получаем, что λ является решением гомологического уравнения (1.1).

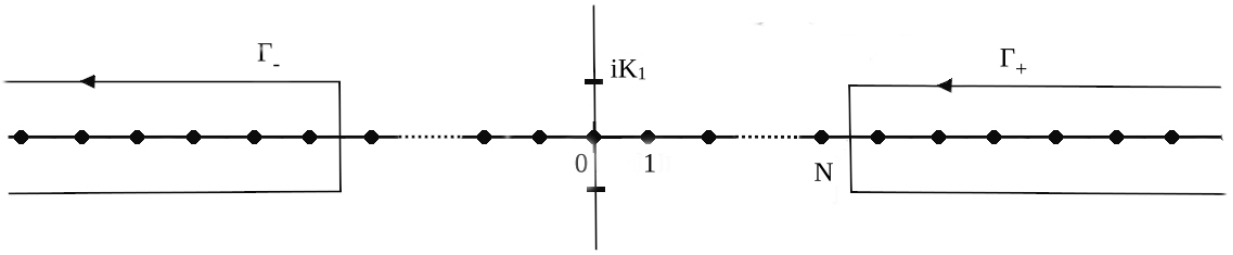


Рис. 1.

□

Замечание 3.2. *Разность любых двух решений* (1.1)*, а значит, и решений соответствующих двум разным функциям* α*, является* ω*–периодической функцией.*

4. Аналитический случай

В случае аналитической правой части с помощью доказанной теоремы удается построить аналитическое решение гомологического уравнения.

4.1. Интегральное представление.

Справедлива

Теорема 4.1. *Пусть* $d>0$, $0<\tilde d<d$, *а* ϕ *—* 1*–периодическая функция, аналитическая в полосе*

$$-d<\operatorname{Im}x<d.$$

Уравнение (1.1) *имеет решение* $\lambda(x)$ *аналитическое по* x *в полосе* $-\tilde d<\operatorname{Im}x<\tilde d$ *и бесконечно дифференцируемое по* $\omega>0$.

Доказательство. Выберем d' и d'' так, что

$$0<\tilde d<d''<d'<d.$$

Поскольку $d'<d$, коэффициенты Фурье для ϕ удовлетворяют оценке

$$|\phi_n|\leqslant C(d')\,e^{-2\pi d'|n|}.$$

Пусть

$$\alpha(k) = \frac{1}{\operatorname{ch}(2\pi d'' k)}, \qquad 0 < K_1 < \frac{1}{4d''}.$$

Очевидно, α аналитична в полосе $|\operatorname{Im} k| < K$ с $K = \dfrac{1}{4d''}$. Благодаря неравенствам $0 < d'' < d'$, функция α удовлетворяет оценкам (3.1) и (3.8). Следовательно, можно построить решение гомологического уравнения по формуле (3.9). Поскольку $\tilde{d} < d''$, из этой формулы следует, что λ аналитична в полосе $-\tilde{d} < \operatorname{Im} x < \tilde{d}$. □

4.2. Подходящие дроби. Для дальнейшего анализа нам потребуются элементарные сведения из теории диофантовых приближений. Доказательство изложенных ниже фактов можно найти в [2].

Пусть $\omega \in (0,1) \setminus \mathbb{Q}$. Тогда ω раскладывается в бесконечную цепную дробь

$$\omega = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\dots}}} \tag{4.1}$$

с натуральными элементами $a_1, a_2, \dots$. Конечную цепную дробь

$$\cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_L}}}$$

называют подходящей дробью. Представим ее в виде $\dfrac{p_L}{q_L}$, где p_L и q_L — взаимно простые натуральные числа. Известно, что последовательно выбирая элементы $a_1, a_2, \dots, a_l, \dots$ достаточно большими, можно сделать знаменатели $q_1, q_2, \dots, q_l, \dots$ соответственно сколь угодно большими, и что [2, гл. 1, пар. 3, теорем. 9]

$$|\omega q_l - p_l| \leqslant \frac{1}{q_{l+1}}, \quad l \in \mathbb{N}. \tag{4.2}$$

4.3. Представление в виде регуляризованного ряда Фурье. Опишем построенное при доказательстве теоремы 4.1 решение как предел подпоследовательности регуляризованных частичных сумм ряда Фурье ϕ. Имеет место

Теорема 4.2. *Пусть $\omega \notin \mathbb{Q}$, тогда*

$$\lambda(x) = \frac{\phi_0 x}{\omega} + \lambda_0 + \lim_{l\to\infty} \left(\sum_{0<|n|\leqslant q_l} \frac{\phi_n e^{2\pi i n x}}{e^{2\pi i n\omega} - 1} + \frac{1}{2i\omega} \sum_{0<|m|\leqslant p_l} \alpha\left(\frac{m}{\omega}\right) \Phi_\alpha\left(\frac{m}{\omega}\right) \operatorname{ctg} \frac{\pi m}{\omega}\, e^{\frac{2\pi i m x}{\omega}} \right), \tag{4.3}$$

где p_l и q_l — числители и знаменатели подходящих дробей числа ω, а

$$\lambda_0 = \frac{(\alpha\Phi_\alpha)'|_{k=0}}{2\pi i\omega} - \frac{\phi_0}{2}$$

— постоянная.

Заметим, что первое слагаемое в скобках в (4.3) — частичная сумма ряда Фурье (2.2) стандартного решения, см. раздел 2.1, а второе — отрезок ряда Фурье ω–периодической

функции. Напомним, что ряд (2.2) сходится, если ω — диофантово число. Но тогда из теоремы 4.2 вытекает, что предел

$$S_\omega = \frac{1}{2i\omega} \lim_{l\to\infty} \sum_{0<|m|<p_l} \alpha\left(\frac{m}{\omega}\right) \Phi_\alpha\left(\frac{m}{\omega}\right) \operatorname{ctg}\frac{\pi m}{\omega}\, e^{\frac{2\pi i m x}{\omega}}, \tag{4.4}$$

существует и является ω–периодической функцией. Поэтому решение λ распадается в сумму стандартного решения и ω–периодической функции $\lambda_0 + S_\omega$.

Если ряд Фурье для стандартного решения расходится, то не существует и предел (4.4), но можно сказать, что в (4.3) расходящиеся последовательности частичных сумм компенсируют расходимости друг друга.

Замечание 4.1. *Ряд Фурье* (2.2) *может расходиться. Пусть, например,* $\phi_n = e^{-2\pi d|n|}$, *для* $n \in \mathbb{Z}$. *Соответствующая функция* ϕ *аналитична в полосе* $|\operatorname{Im} x| < d$. *В виду* (4.2) q_l*-й член ряда* (2.2) *допускает оценку*

$$\left|\frac{\phi_{q_l} e^{2\pi i q_l x}}{e^{2\pi i q_l \omega} - 1}\right| \geqslant C q_{l+1} e^{-2\pi d|q_l|},$$

но, за счет подходящего выборе последовательности $\{a_l\}$ *элементов цепной дроби* (4.1), *можно добиться добиться выполнения цепочки неравенств* $q_{l+1}e^{-2\pi d|q_l|} \geqslant 1$, $l \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Доказательство проводится с помощью теоремы о вычетах. Контур интегрирования Γ в формуле (3.9) деформируется к объединению контуров $\Gamma_\pm$, соответствующих рис. 2.

Опишем их подробно. Горизонтальные участки контуров $\Gamma_\pm$ расположены на таком же удалении от вещественной оси на плоскости переменной k, что и при доказательстве теоремы 3.1. Опишем вертикальные участки $\Gamma_\pm$. Полюса подынтегрального выражения в (3.9) расположены в целых точках и точках множества $\frac{1}{\omega}\cdot\mathbb{Z}$. На рис. 2 точки первого множества изображены кружками большего размера, а точки второго — кружками меньшего размера соответственно. Поскольку $\omega \notin \mathbb{Q}$, эти два множества полюсов имеют лишь одну общую точку — точку нуль. В виду (4.2) расстояние между точками q_l и $\frac{p_l}{\omega}$ не превосходит $\frac{1}{\omega q_{l+1}}$, а значит, стремится к нулю при $l \to \infty$. Напомним, что $0 < \omega < 1$. Мы считаем l достаточно большим и выбираем $\Gamma_\pm$ так, чтобы они пересекали вещественную ось в в точках $\pm\left(q_l + \frac{1}{2}\right)$. Тогда расстояние от вертикальных участков контуров $\Gamma_\pm$ до ближайших к ним полюсов оказывается равно $\frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{q_l}\right)$.

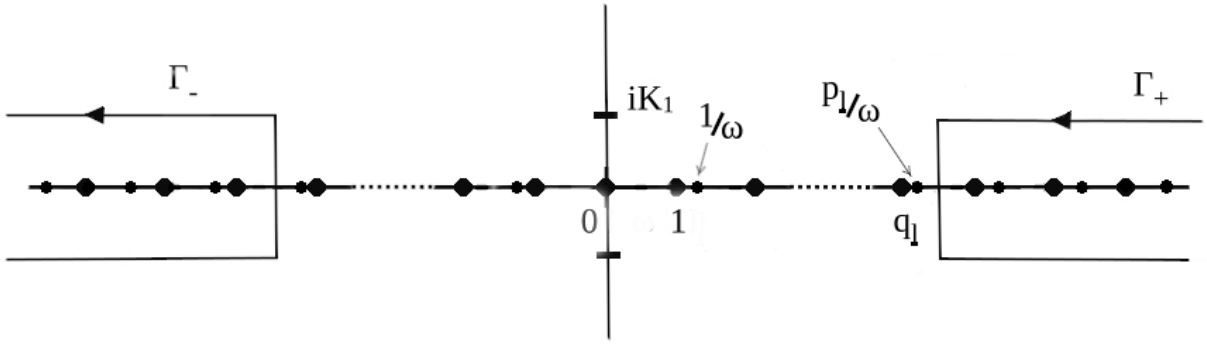


Рис. 2.

Обозначим через $f(x,k)\,dk$ подынтегральное выражение в (3.9). В силу оценок (3.4) и (3.8), при описанном выборе контуров $\Gamma_\pm$ интегралы по $\Gamma_\pm$ от $f(x,k)$ стремятся к нулю при $l\to\infty$, а значит, по теореме о вычетах

$$\lambda(x)=2\pi\lim_{l\to\infty}\left(\operatorname*{Res}_{k=0}f(x,k)+\sum_{n\in\mathbb{Z},\ 0<|n|\leqslant q_l}\operatorname*{Res}_{k=n}f(x,k)\ +\sum_{m\in\mathbb{Z},\ 0<|m|\leqslant p_l}\operatorname*{Res}_{k=\frac{m}{\omega}}f(x,k)\right). \tag{4.5}$$

Вычисления вычетов f стандартны, мы отметим лишь, что при вычислениях используется формула (3.3), и что при вычислении первого слагаемого в скобках в (4.5) возникает слагаемое, линейное по x, а вычисления первой и второй сумм вычетов в скобках в (4.5) дают первую и вторую сумму в скобках в (4.3) соответственно. □

5. Построение стандартных решений с помощью интегрального представления

В заключение мы получим формулы (2.2) и (2.3) из интегрального представления (3.9). Ниже мы считаем, что ϕ аналитично в полосе $|\operatorname{Im}x|<d$, и $0<d''<d'<d$.

5.1. Диофантовы ω. Пусть ω — диофантово число, то есть выполнено условие (2.1). Для построения решения λ можно выбрать

$$\alpha(k)=\frac{1}{\operatorname{ch}(2\pi kd'')}\,\frac{e^{2\pi ik\omega}-1}{k},\qquad 0<K_1<\frac{1}{4d''}. \tag{5.1}$$

Из оценки (2.1) следует, что α удовлетворяет условию (3.1) :

$$\left|\frac{\phi_l}{\alpha(l)}\right|\leqslant C\,\frac{|l|\,e^{-2\pi(d'-d'')\,|l|}}{\inf_{j\in\mathbb{Z}}||l|\,\omega-j|}\leqslant C\,|l|^{N+1}\,e^{-2\pi(d'-d'')\,|l|}.$$

При таком выборе α

$$\lambda(x)=\frac{1}{2i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\Phi_\alpha(k)}{\operatorname{ch}(2\pi kd'')}\,e^{2\pi ikx}\,\frac{\operatorname{ctg}\pi k}{k}\,dk,$$

и вычисление интеграла по вычетам дает

$$\lambda=\phi_0\frac{x}{\omega}+c+\sum_{l\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\frac{\phi_l e^{2\pi ilx}}{e^{2\pi il\omega}-1},$$

где c — постоянная. Опуская стандартные выкладки, мы лишь заметим, что для вычисления $\Phi_\alpha(l)$ нужно воспользоваться формулами (3.3) и (5.1).

5.2. Рациональные ω. Пусть ω — рациональное число, $\omega=\dfrac{p}{q}$, p и q — взаимно простые натуральные числа. Теперь можно построить λ, выбрав

$$\alpha(k)=\frac{1}{\operatorname{ch}(\pi kd'')}\,\frac{\sin(k\pi\omega)}{\sin\frac{k\pi}{q}},\qquad 0<K_1<\frac{1}{4d''}.$$

При таком выборе α вычисление интеграла по вычетам дает

$$\lambda=c+\frac{x}{\omega}\sum_{l\in\mathbb{Z}}\phi_{lq}\,e^{2\pi ilqx}+\sum_{l\in\mathbb{Z}\setminus(q\mathbb{Z})}\frac{\phi_l}{e^{2\pi il\omega}-1}\,e^{2\pi ilx},$$

где c — постоянная. Мы опустим дальнейшие детали.

Благодарности

Статья была подготовлена во время визита автора в Harbin Institute of Technology. Автор благодарен Школе физики и профессору Chengxun Yuan за гостеприимство.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. В.С. Буслаев, А.А. Федотов. *Блоховские решения для разностных уравнений* // Алгебра и анал. **7**:4, 74–122 (1995).
2. А.Я. Хинчин. *Цепные дроби.* М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит.-ры. 1960.
3. Х. Цикон, Р. Фрезе, В. Кирш, Б. Саймон. *Операторы Шрёдингера с приложениями к квантовой механике и глобальной геометрии.* М.: Мир. 1990.
4. J. Bellisard, R. Lima, D. Testard. *A metal–insulator transition for the almost Mathieu model* // Commun. Math. Phys. **88**:2, 207–234 (1995).
5. D.I. Borisov, A.A. Fedotov. *On the point spectrum of a non–self–adjoint quasiperiodic operator* // Russian J. Math. Phys. **31**:3, 389–406 (2024).
6. D.I. Borisov, A.A. Fedotov. *On Bloch eigenfunctions of Sarnak operator.* Math. Notes. 120:2, 396–401 (2026).
7. V. Jakšić, S. Molchanov. *A note on the regularity of solutions of linear homological equations.* Appl. Anal. **75**:3-4, 371–377 (2000).

Александр Александрович Федотов,
Санкт-Петербургский государственный университет,
Ульяновская ул., д. 1, лит. А,
198504, г. Санкт-Петербург, Россия
E-mail: a.fedotov@spbu.ru