ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 18 № 4 (2026). С. 3-30.

УДК 517.544.8

МЕТОД СУЩЕСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ В ТЕОРИИ ФАКТОРИЗАЦИИ ВИНЕРА — ХОПФА

В.М. АДУКОВ

Аннотация. По аналогии с ранее введенными понятиями индексов и существенных многочленов конечной последовательности матриц определены индексы и существенные функции для бесконечной последовательности матричных коэффициентов Фурье обратимой матрицы–функции из матричной алгебры Винера. На основе этих понятий предложено новое доказательство существования факторизации Винера — Хопфа матриц–функций, использующее только методы функционального анализа. Метод применен к явному решению задачи канонической факторизации лорановского матричного многочлена специального вида. Получен эффективный достаточный признак существования канонической факторизации строго невырожденных матриц–функций второго порядка.

Ключевые слова: факторизация Винера — Хопфа матриц–функций, теплицевы операторы, факторизация матричных многочленов

Mathematics Subject Classification: 47A68, 47B35, 30E25

1. Введение

Краевая задача Римана для вектора является одной из самых востребованных задач комплексного анализа. Она находит многочисленные применения в топологии (классификация голоморфных векторных расслоений на сфере Римана), теории операторов (сингулярные интегральные операторы с ядром Коши, теплицевы операторы, операторы Винера — Хопфа), в аналитической теории дифференциальных уравнений (проблема Римана — Гильберта). Техника Винера — Хопфа, основанная на краевой задачи Римана, является незаменимым рабочим инструментом в различных задачах математической физики и механики, а именно: в теории солитонов [10], в теории дифракции [16], [17], в теории упругости [11]. Обзор современного состояния теории и практики применения техники Винера — Хопфа можно найти в сборнике [19].

Решение векторной краевой задачи Римана (однородной или неоднородной) сводится к построению канонической матрицы задачи, что равносильно следующей задаче факторизации матриц–функций.

Пусть Γ — простой кусочно–гладкий замкнутый контур в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, ограничивающий область D_+. Можно считать, что $0 \in D_+$. Дополнение $D_+ \cup \Gamma$ в расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ обозначим D_-. Пусть $A(t)$ — непрерывная и обратимая на Γ матрица–функция порядка p.

V.M. Adukov, Method of essential functions and its application in theory of Wiener — Hopf factorization.

© Адуков В.М. 2026.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект № 25-21-20134, https://rscf.ru/project/25-21-20134/.

Поступила 4 мая 2025 г.

Левой факторизацией Винера — Хопфа $A(t)$ относительно контура Γ называется представление $A(t)$ в виде

$$A(t) = A_+^l(t)D^l(t)A_-^l(t), \quad t \in \Gamma. \tag{1.1}$$

Здесь $A_\pm^l(t)$ — непрерывные и обратимые на Γ матрицы–функции, которые допускают аналитическое продолжение в область $D_\pm$, причем эти продолжения обратимы там; $D^l(t) = \operatorname{diag}[t^{\lambda_1}, \ldots, t^{\lambda_p}]$. Целые числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ называются *левыми частными индексами* $A(t)$. Они однозначно определяются $A(t)$. Мы можем считать, что частные индексы упорядочены по убыванию: $\lambda_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_p$. Ясно, что $\lambda_1 + \cdots + \lambda_p = \varkappa$, где $\varkappa = \operatorname{ind}\det A(t)$ — индекс определителя $A(t)$.

Аналогично определяется *правая факторизация Винера — Хопфа* $A(t)$:

$$A(t) = A_-^r(t)D^r(t)A_+^r(t). \tag{1.2}$$

Здесь $D^r(t) = \operatorname{diag}[t^{\rho_1}, \ldots, t^{\rho_p}]$, $\rho_1 \leqslant \ldots \leqslant \rho_p$, — *правые частные индексы* $A(t)$. Они также однозначно определяются $A(t)$ и для них справедливо равенство $\rho_1 + \cdots + \rho_p = \varkappa$. Задачу факторизации можно рассматривать и на неограниченных контурах Γ, в частности, на вещественной прямой.

Далее в этой работе мы будем рассматривать только правую факторизацию Винера — Хопфа. Это связано с тем, что основным методом нашего исследования является теория теплицевых операторов. Результаты по левой факторизации можно получить, прибегнув к транспонированию или обращению матрицы–функции $A(t)$.

Не любая непрерывная матрица–функция $A(t)$ допускает правую (левую) факторизацию с непрерывными на контуре факторами $A_\pm^r(t)$ ($A_\pm^l(t)$). Известно, что задача факторизации имеет решение для любой обратимой матрицы–функции из алгебры $H_\alpha^{p\times p}(\Gamma)$, $0 < \alpha < 1$, гельдеровских матриц–функций и из матричной алгебры Винера $W^{p\times p}$ на единичной окружности или на вещественной прямой. При этом факторизационные множители $A_\pm^{l,r}(t)$ также принадлежат соответствующей алгебре.

Имеется много работ, где доказывается возможность факторизации в данных алгебрах. Укажем основные из них [2], [5]–[7], [9], [20].

Все они основаны на близких идеях и носят по существу характер теорем существования. В настоящее время для матриц–функций (в отличии от скалярных функций) явных формул для множителей $A_\pm^{l,r}(t)$ и частных индексов в общем случае не существует. И это главная проблема в теории факторизации. Вторая проблема состоит в том, что задача факторизации матриц–функций в общем случае неустойчива. Кроме того, факторизационные множители $A_\pm^{l,r}(t)$ находятся неединственным образом. Поэтому требуется нормировка факторизаций, что в общем случае является еще не решенной проблемой. Все это сильно затрудняет разработку приближенных методов факторизации.

В данной работе мы предлагаем новый способ доказательства факторизуемости матриц–функций из алгебры Винера на единичной окружности. Предлагаемый метод из комплексного анализа явно использует только принцип максимума модуля. Можно считать, что факторизуемость доказана только средствами функционального анализа. Еще одной особенностью нашего подхода является то, что он является бесконечномерным аналогом метода индексов и существенных многочленов конечной последовательности матриц [1], [13], который специально разрабатывался для явного решения задачи факторизации матричных многочленов, аналитических и мероморфных матриц–функций.

Пусть $a(t)$ — обратимая матрица–функция из матричной алгебры Винера $W^{p\times p}$ на единичной окружности и $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, $a_n \in \mathbb{C}^{p\times p}$, — последовательность ее матричных коэффициентов Фурье. В дальнейшем, говоря о бесконечной последовательности матриц, мы будем иметь в виду именно эту последовательность. Оказалось, что предлагаемый метод индексов и существенных функций для бесконечной последовательности полностью эквивалентен методу факторизации Винера — Хопфа матриц–функций. Это означает, что,

зная индексы и существенные функции последовательности $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, можно построить правую факторизацию Винера — Хопфа $a(t)$ и, наоборот, знание правой факторизации матрицы-функции позволяет определить индексы и существенные функции соответствующей последовательности. В частности, данная эквивалентность позволяет изучить структуру ядра теплицева оператора с матричным символом $a(t)$ и получить формулы обращения или обобщенного обращения теплицевых операторов в терминах индексов и существенных функций так же, как это делалось в конечномерном случае [13]. Это говорит о том, что существует единый унифицированный подход к изучению теплицевых операторов в конечномерном и бесконечномерном случаях.

Отметим, что ранее известные методы доказательства факторизуемости являлись по существу чистыми теоремами существования.

Предложенный в данной работе метод позволяет получить явное решение задачи факторизации для одного класса лорановских матричных многочленов, возникающих в теории факторизации строго невырожденных матриц–функций второго порядка [12]. В свою очередь, это явное решение используется для получения эффективного условия существования канонической факторизации для строго невырожденных матриц–функций специального вида.

Работа имеет следующую структуру. В §2 приведены необходимые сведения о теплицевых операторах T_a и об операторах U_a, союзных с ними. В следующем параграфе по аналогии с конечномерным случаем мы включаем эти операторы в семейства операторов $\{T_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$, $\{U_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ и доказываем нетеровость операторов, входящих в данные семейства. В конечномерном случае последнее выполнялось автоматически. В §4 мы вводим понятие индексов и существенных функций для бесконечной последовательности $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$. В §5 доказывается критерий существенности. Как и в конечномерном случае, это краеугольный камень теории. Далее (§6) мы приводим новое доказательство факторизуемости матриц–функций методом индексов и существенных функций и доказываем эквивалентность данного метода и метода факторизации Винера — Хопфа. В §7 метод используется для явного построения канонической факторизации некоторых лорановских матричных многочленов. Здесь же приведены применения полученной факторизации.

2. Предварительные сведения о дискретных операторах Винера — Хопфа

В основополагающей работе [6] система дискретных уравнений Винера — Хопфа рассматривалась в целом семействе $E^{p\times 1}$ банаховых пространств векторных последовательностей: $l_s^{p\times 1}$ $(1 \leqslant s \leqslant \infty)$, $c^{p\times 1}$, $c_0^{p\times 1}$.

Поскольку наша цель — предложить новый метод доказательства возможности факторизации матриц–функций, мы ограничимся минимальным запасом пространств, необходимым для этого. Будем использовать следующие обозначения: $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел, $\mathbb{Z}_{\pm}$ — множество неотрицательных/неположительных целых чисел и $\mathbb{Z}_{\pm}^0$ — множество положительных/отрицательных целых чисел.

Введем пространства односторонних векторных (столбцовых) последовательностей

$$l_1^{p\times 1}(\mathbb{Z}_+) = \Big\{x_+ = (x_0, x_1, x_2, \ldots) : x_k \in \mathbb{C}^{p\times 1}, \sum_{k=0}^{\infty} \|x_k\|_1 < \infty\Big\},$$

наделенное нормой $\|x_+\|_1 := \sum\limits_{k=0}^{\infty} \|x_k\|_1$, и

$$l_\infty^{p\times 1}(\mathbb{Z}_+) = \Big\{x_+ = (x_0, x_1, x_2, \ldots) : x_k \in \mathbb{C}^{p\times 1}, \sup_{k\geqslant 0} \|x_k\|_\infty < \infty\Big\},$$

с нормой $\|x_+\|_\infty := \sup\limits_{k\geqslant 0}\|x_k\|_\infty$. Здесь $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_\infty$ — гельдеровские нормы на $\mathbb{C}^{p\times 1}$. Любое из пространств $l_1^{p\times 1}(\mathbb{Z}_+)$, $l_\infty^{p\times 1}(\mathbb{Z}_+)$ обозначается $E^{p\times 1}(\mathbb{Z}_+)$.

Нам также потребуются аналогичные пространства $E^{1\times p}(\mathbb{Z}_-)$ одностороннних строчных последовательностей

$$l_1^{1\times p}(\mathbb{Z}_-) = \Big\{f_- = (\dots, f_{-2}, f_{-1}, f_0) : f_k \in \mathbb{C}^{1\times p}, \sum_{k=-\infty}^{0}\|f_k\|_1 < \infty\Big\},$$

с нормой $\|f_-\|_1 := \sum\limits_{k=-\infty}^{0}\|f_k\|_1$, и

$$l_\infty^{1\times p}(\mathbb{Z}_-) = \Big\{f_- = (\dots, f_{-2}, f_{-1}, f_0) : f_k \in \mathbb{C}^{1\times p}, \sup_{k\leqslant 0}\|f_k\|_\infty < \infty\Big\},$$

$\|f_-\|_\infty := \sup\limits_{k\leqslant 0}\|f_k\|_\infty$.

Подобным образом определяются пространства $E^{p\times 1}(\mathbb{Z}_-^0)$, $E^{1\times p}(\mathbb{Z}_+^0)$ и $E^{p\times 1}(\mathbb{Z})$, $E^{1\times p}(\mathbb{Z})$. В последних двух случаях речь идет о пространствах двусторонних последовательностей. Эти два пространства являются распадающимися:

$$E^{p\times 1}(\mathbb{Z}) = E^{p\times 1}(\mathbb{Z}_+)\oplus E^{p\times 1}(\mathbb{Z}_-^0), \qquad E^{1\times p}(\mathbb{Z}) = E^{1\times p}(\mathbb{Z}_-)\oplus E^{1\times p}(\mathbb{Z}_+^0).$$

Проектор из $E^{p\times 1}(\mathbb{Z})$ $(E^{1\times p}(\mathbb{Z}))$ на $E^{p\times 1}(\mathbb{Z}_+)$ $(E^{1\times p}(\mathbb{Z}_-))$ параллельно $E^{p\times 1}(\mathbb{Z}_-^0)$ $(E^{1\times p}(\mathbb{Z}_+^0))$ обозначим через $\mathcal{P}_+$ (Π_-).

Рассмотрим бесконечную двустороннюю последовательность матриц

$$a = \{a_j\}_{j=-\infty}^{\infty}, \qquad a_j \in \mathbb{C}^{p\times p},$$

принадлежащую банаховому пространству $l_1^{p\times p}(\mathbb{Z})$. Норма в этом пространстве определяется как $\|a\| = \sum\limits_{j=-\infty}^{\infty}\|a_j\|_1$, где $\|\cdot\|_1$ — максимальная столбцовая норма на $\mathbb{C}^{p\times p}$. В некоторых случаях мы будем использовать максимальную строчную норму $\|\cdot\|_\infty$.

Для $a = \{a_j\}_{j=-\infty}^{\infty} \in l_1^{p\times p}(\mathbb{Z})$ и $x = \{x_j\}_{j=-\infty}^{\infty} \in E^{p\times 1}(\mathbb{Z})$ определим свертку

$$(a * x)_i = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_{i-j}x_j, \quad i \in \mathbb{Z},$$

которая является элементом пространства $E^{p\times 1}(\mathbb{Z})$. Аналогично определяется свертка $x*a$, где $x \in E^{1\times p}(\mathbb{Z})$.

Множество $l_1^{p\times p}(\mathbb{Z})$ является банаховой алгеброй со сверткой в качестве умножения. Множества $l_1^{p\times p}(\mathbb{Z}_\pm)$, $l_1^{p\times p}(\mathbb{Z}_-^0)$ являются замкнутыми подалгебрами $l_1^{p\times p}(\mathbb{Z})$ и

$$l_1^{p\times p}(\mathbb{Z}) = l_1^{p\times p}(\mathbb{Z}_+)\oplus l_1^{p\times p}(\mathbb{Z}_-^0).$$

Линейный ограниченный оператор, действующий в $E^{p\times 1}(\mathbb{Z}_+)$ по формуле

$$T_a x_+ = \mathcal{P}_+(a * x_+),$$

называется *дискретным оператором Винера — Хопфа*. Кроме оператора T_a нам также потребуется оператор U_a, действующий в $E^{1\times p}(\mathbb{Z}_-)$ по формуле

$$U_a f_- = \Pi_-(f_- * a),$$

который мы будем называть оператором, *союзным* с T_a. Более подробно,

$$(T_a x_+)_i = \sum_{j=0}^{\infty} a_{i-j}x_j, \quad i \geqslant 0, \qquad (U_a f_-)_i = \sum_{j=-\infty}^{0} f_j a_{i-j}, \quad i \leqslant 0.$$

Если ввести бесконечную блочную теплицеву матрицу, порожденную последовательностью a, то наглядно действие этих операторов можно представить следующим образом:

$$T_a x_+ = \begin{pmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \cdots \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & \cdots \\ a_2 & a_1 & a_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{pmatrix},$$

$$U_a f_- = \begin{pmatrix} f_0 & f_{-1} & f_{-2} & \ldots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \cdots \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & \cdots \\ a_2 & a_1 & a_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что сопряженное к $l_1^{p\times 1}(\mathbb{Z}_+)$ $\Big(l_1^{1\times p}(\mathbb{Z}_-)\Big)$ пространство изометрически изоморфно $l_\infty^{1\times p}(\mathbb{Z}_-)$ $\Big(l_\infty^{p\times 1}(\mathbb{Z}_+)\Big)$. Этот изоморфизм $\varphi \mapsto f_-$ задается формулой:

$$\varphi(x_+) = \sum_{k=0}^{\infty} f_{-k} x_k.$$

При отождествлении этих пространств, получаем следующий очевидный результат.

Предложение 2.1. 1) *Сопряженным оператором к T_a в $l_1^{p\times 1}(\mathbb{Z}_+)$ является оператор U_a, действующий в пространстве $l_\infty^{1\times p}(\mathbb{Z}_-)$.*

2) *Сопряженным оператором к U_a в $l_1^{1\times p}(\mathbb{Z}_-)$ является оператор T_a, действующий в $l_\infty^{p\times 1}(\mathbb{Z}_+)$.*

В определении оператора T_a поставим в соответствие двусторонней матричной последовательности $a = \{a_j\}_{j=-\infty}^{\infty} \in l_1^{p\times p}(\mathbb{Z})$ производящую матрицу–функцию $a(t) = \sum\limits_{j=-\infty}^{\infty} a_j t^j$, $|t| = 1$, и назовем ее *матричным символом* оператора. Матричный символ разлагается в абсолютно сходящийся по норме $l_1^{p\times p}(\mathbb{Z})$ матричный ряд, который является для него матричным рядом Фурье.

Пространство преобразований Фурье элементов из $l_1^{p\times p}(\mathbb{Z})$ обозначим $W^{p\times p}$. Это пространство наделяется нормой из $l_1^{p\times p}(\mathbb{Z})$. Свертка $a*b$ при соответствии $a \mapsto a(t)$ переходит в произведение матриц–функций $a(t)\cdot b(t)$. Таким образом, сверточная банахова алгебра $l_1^{p\times p}(\mathbb{Z})$ становится изометрически изоморфной банаховой алгебре $W^{p\times p}$ матриц–функций. Эта алгебра называется *матричной алгеброй Винера*. Норму в $W^{p\times p}$ будем обозначать $\|\cdot\|_W$. Мы также будем применять обозначения $\|\cdot\|_{W,1}$, $\|\cdot\|_{W,\infty}$, когда хотим уточнить какая норма используется для матричных коэффициентов Фурье.

Аналогично, преобразование Фурье подалгебр $l_1^{p\times p}(\mathbb{Z}_\pm)$, $l_1^{p\times p}(\mathbb{Z}_-^0)$ порождает замкнутые подалгебры $W_\pm^{p\times p}$ и $(W_-^{p\times p})^0$, причем $W^{p\times p}$ является распадающейся матричной алгеброй:

$$W^{p\times p} = W_+^{p\times p} \oplus (W_-^{p\times p})^0.$$

Проектор $\mathcal{P}_+$ порождает проектор (обозначим его тем же символом) из $W^{p\times p}$ в $W_+^{p\times p}$ параллельно $(W_-^{p\times p})^0$, действующий по формуле:

$$\mathcal{P}_+\Big(\sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j t^j\Big) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j t^j.$$

Если в определении дискретного оператора Винера — Хопфа в пространстве $l_1^{p\times 1}(\mathbb{Z}_+)$ перейти от последовательностей к их производящим функциям (преобразованиям Фурье),

то получаем определение *теплицева оператора*: $T_a x_+(t) = \mathcal{P}_+\Big(a(t)\cdot x_+(t)\Big)$, действующего в пространстве $W_+^{p\times 1}$. Термин «теплицев оператор» мы будем часто использовать как синоним термина «дискретный оператор Винера — Хопфа». Все вышесказанное очевидным образом переносится на союзный оператор U_a.

Группы обратимых элементов алгебр $W^{p\times p}$, $W_\pm^{p\times p}$ обозначим $GW^{p\times p}$, $GW_\pm^{p\times p}$, соответственно.

Матрица–функция $a(t)\in W^{p\times p}$ обратима в этой алгебре тогда и только тогда, когда $\det a(t)\neq 0$ на единичной окружности. Очевидно, что, если $a_+(t)\in W_+^{p\times p}$ ($a_-(t)\in W_-^{p\times p}$), то она аналитически продолжается с единичной окружности внутрь (во внешность) единичного круга. Условие $a_+(t)\in GW_+^{p\times p}$ ($a_-(t)\in GW_-^{p\times p}$) равносильно тому, что $\det a_\pm(z)\neq 0$ при $|z|\leqslant 1$ (при $|z|\geqslant 1$). Короткое доказательство этих фактов может быть получено с помощью теории коммутативных банаховых алгебр.

Операторы T_a, U_a обладают критически важным для дальнейшего свойством: отображения $a\mapsto T_a$ и $a\mapsto U_a$ являются *частично мультипликативными*:

$$T_{a_-a} = T_{a_-}T_a, \qquad T_{aa_+} = T_aT_{a_+}, \tag{2.1}$$

$$U_{a_-a} = U_aU_{a_-}, \qquad U_{aa_+} = U_{a_+}U_a, \tag{2.2}$$

для любых $a(t)\in W^{p\times p}$ и $a_\pm(t)\in W_\pm^{p\times p}$.

Это свойство хорошо известно в теории теплицевых операторов (см., например, [18, стр. 36, формула (2.19)]).

Важным следствием частичной мультипликативности является следующий результат.

Предложение 2.2. *Если $a_\pm(t)\in W_\pm^{p\times p}$ и обратимы в алгебре $W^{p\times p}$, то операторы $T_{a_\pm}$, $U_{a_\pm}$ будут односторонне обратимы, а именно T_{a_+}, U_{a_-} обратимы слева и T_{a_-}, U_{a_+} — справа. Кроме того, операторы $T_{a_\pm}^{(-1)} := T_{a_\pm^{-1}}$, $U_{a_\pm}^{(-1)} := U_{a_\pm^{-1}}$ являются односторонними обратными к $T_{a_\pm}$, $U_{a_\pm}$.*

Если же $a_\pm(t)\in GW_\pm^{p\times p}$, то операторы $T_{a_\pm}$, $U_{a_\pm}$ обратимы.

Доказательство этих утверждений производится непосредственной проверкой.

3. Основные свойства операторов T_k, U_k

Дальнейшие наши рассуждения будут в некотором смысле калькой с соответствующих построений для случая конечных теплицевых матриц [1], [13]. Данные построения привели к понятиям индексов и существенных многочленов для конечной последовательности комплексных матриц. Это же мы собираемся проделать для бесконечной последовательности комплексных матриц. В данном разделе мы изучим те необходимые нам свойства теплицевых операторов и операторов, союзных с ними, которые выполнялись автоматически в конечномерном случае.

Нам потребуются некоторые сведения об обобщенно обратимых и нетеровых операторах (см. [4]). Напомним их. Пусть B_1, B_2 — банаховы пространства. Обозначим через $\mathcal{L}(B_1,B_2)$ — банахово пространство всех линейных ограниченных операторов, действующих из B_1 в B_2. Оператор $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(B_1,B_2)$ называется *обобщенно обратимым*, если существует оператор $\mathcal{A}^\dagger\in\mathcal{L}(B_2,B_1)$ такой, что $\mathcal{A}\mathcal{A}^\dagger\mathcal{A}=\mathcal{A}$. В частности, обратимые и односторонне обратимые операторы являются обобщенно обратимыми.

Оператор $\mathcal{A}$ является обобщенно обратимым тогда и только тогда, когда выполняются условия:

1) $\mathcal{A}$ является нормально разрешимым оператором, т.е. подпространство $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ — замкнуто;

2) подпространство $\ker \mathcal{A}$ дополняемо в B_1;

3) подпространство $\operatorname{Im} \mathcal{A}$ дополняемо в B_2.

В частности, оператор $\mathcal{A}$ обратим справа (слева) тогда и только когда он нормально разрешим, $\ker \mathcal{A}$ дополняемо в B_1 и $\operatorname{Im} \mathcal{A} = B_2$ ($\ker \mathcal{A} = \{0\}$ и $\operatorname{Im} \mathcal{A}$ дополняемо в B_2).

Оператор $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(B_1, B_2)$ называется *нетеровым* или *фредгольмовым*, если он нормально разрешим и его ядро и коядро конечномерны. *Коядром* $\operatorname{coker} \mathcal{A}$ нормально разрешимого оператора $\mathcal{A}$ называется факторпространство $B_2/\operatorname{Im} \mathcal{A}$. Если коядро конечномерно, то $\dim \operatorname{coker} \mathcal{A} = \dim \ker \mathcal{A}^* = \operatorname{codim} \operatorname{Im} \mathcal{A}$. Здесь $\mathcal{A}^*$ — сопряженный оператор и $\operatorname{codim} \operatorname{Im} \mathcal{A}$ есть размерность прямого дополнения $\operatorname{Im} \mathcal{A}$. Число $\operatorname{ind} \mathcal{A} = \dim \ker \mathcal{A} - \dim \operatorname{coker} \mathcal{A}$ называется *индексом* нетерового оператора $\mathcal{A}$. Очевидно, что каждый нетеров оператор является обобщенно обратимым.

Мы также будем использовать хорошо известный результат — лемму о факторизации элемента банаховой алгебры, близкого к единичному элементу ([5, лемма 2.2]). Сформулируем ее для частного случая банаховой алгебры $W^{p\times p}$. Единичную матрицу порядка p обозначим I_p.

Лемма 3.1. *Существует значение $\varepsilon > 0$ такое, что любая матрица–функция $\alpha(t)$ из $W^{p\times p}$, удовлетворяющая неравенству $\|I_p - \alpha\|_W < \varepsilon$, обратима в алгебре $W^{p\times p}$ и допускает представления: $\alpha(t) = \beta_+(t)\beta_-(t) = \gamma_-(t)\gamma_+(t)$. Здесь $\beta_\pm(t)$ и $\gamma_\pm(t)$ принадлежат $GW_\pm^{p\times p}$.*

Обозначим через T_k, $k \in \mathbb{Z}$, — теплицев оператор с матричным символом $t^{-k}a(t)$, $a(t) \in W^{p\times p}$, действующий в пространстве $E^{p\times 1}(\mathbb{Z}_+)$. Наглядно можно считать, что $T_k := T_{t^{-k}a}$ есть оператор, порожденный бесконечной блочной теплицевой матрицей

$$T_k := \begin{pmatrix} a_k & a_{k-1} & a_{k-2} & \cdots \\ a_{k+1} & a_k & a_{k-1} & \cdots \\ a_{k+2} & a_{k+1} & a_k & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad -\infty < k < \infty. \tag{3.1}$$

Данная последовательность операторов является бесконечномерным аналогом конечной последовательности $\{T_k\}_{k=m}^n$, $m < n$, конечных блочных теплицевых матриц

$$T_k := \begin{pmatrix} a_k & a_{k-1} & \cdots & a_m \\ a_{k+1} & a_k & \cdots & a_{m+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_{n+m-1} \end{pmatrix}, \quad m \leqslant k \leqslant n,$$

порожденных последовательностью $\{a_m, a_{m+1}, \ldots, a_{n-1}, a_n\}$. Рассмотрение структуры правых и левых ядер матриц из этой последовательности привело нас к понятиям индексов и существенных многочленов конечной последовательности матриц [1], [13]. Для того, чтобы можно было рассматривать левые ядра бесконечных блочных теплицевых матриц T_k, введем также последовательность союзных операторов $\{U_k := U_{t^{-k}a}\}_{k\in\mathbb{Z}}$.

Изучение свойств семейств операторов $\{T_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ и $\{U_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ в общем случае является, скорее всего, необозримой задачей. Для применения разрабатываемого метода к задаче правой факторизации Винера — Хопфа (1.2) достаточно рассмотреть случай, когда выполняется дополнительное предположение:

A. Последовательность $a := \{a_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ является последовательностью матричных коэффициентов Фурье обратимой матрицы–функции $a(t) \in W^{p\times p}$.

Всюду в дальнейшем мы предполагаем, что условие A выполнено.

Теперь мы можем приступить к изучению операторов T_k, U_k. Наша цель — доказать их нетеровость. Мы докажем это в три этапа. Сначала покажем, что эти операторы обобщенно обратимы, затем докажем конечномерность их ядер и далее сможем доказать их нетеровость.

Теорема 3.1. *Пусть $a(t) \in GW^{p\times p}$. Тогда операторы T_k (U_k) обобщенно обратимы в любом пространстве $E^{p\times 1}(\mathbb{Z}_+)$ ($E^{1\times p}(\mathbb{Z}_-)$) для всех $k \in \mathbb{Z}$.*

Кроме того, существует целое число $n > 0$ такое, что оператор T_k (U_k) обратим слева (справа) при $k \leqslant -n$ и обратим справа (слева) при $k \geqslant n$.

Доказательство. Докажем вначале утверждение теоремы об односторонней обратимости операторов T_k.

Выберем значение ε в соответствии с леммой 3.1. Для заданной обратимой матрицы-функции $a(t) = \sum\limits_{j=-\infty}^{\infty} a_j t^j$ подберем $n > 0$ так, чтобы для ее лорановского матричного многочлена $a_n(t) = \sum\limits_{j=-n}^{n} a_j t^j$ выполнялось неравенство

$$\|a - a_n\|_W < \frac{\varepsilon}{\|a^{-1}\|_W}.$$

Тогда $\|I_p - a_n a^{-1}\|_W < \varepsilon$ и, в соответствии с леммой 3.1, $a_n(t)$ будет обратим в алгебре $W^{p\times p}$ и $a_n(t)a^{-1}(t)$ допускает факторизацию $a_n(t)a^{-1}(t) = \beta_+(t)\beta_-(t)$. Таким образом,

$$a(t) = b_-(t)b_+(t)a_n(t). \tag{3.2}$$

Здесь $b_\pm(t) = \beta_\pm^{-1}(t)$.

Поскольку $t^{-k}a_n(t) \in W_+^{p\times p}$ для $k \leqslant -n$, то в силу свойства частичной мультипликативности получаем:

$$T_k = T_{b_-} T_{b_+} T_{t^{-k}a_n},$$

где по предложению 2.2 оператор $T_{t^{-k}a_n}$ обратим слева, а операторы $T_{b_\pm}$ — обратимы. Таким образом, оператор T_k обратим слева при $k \leqslant -n$.

Для доказательства обратимости справа оператора T_k при $k \geqslant n$ воспользуемся неравенством $\|I_p - a^{-1}a_n\|_W < \varepsilon$ и представим $a(t)$ в виде:

$$a(t) = a_n(t)\widetilde{b}_-(t)\widetilde{b}_+(t).$$

Тогда $T_k = T_{t^{-k}a_n} T_{\widetilde{b}_-} T_{\widetilde{b}_+}$ и $T_{t^{-k}a_n}$ обратим справа при $k \geqslant n$.

Перейдем к доказательству обобщенной обратимости операторов T_k при $-n < k < n$. Рассмотрим вначале случай $0 \leqslant k < n$. Определим оператор $\mathcal{K}_1 = T_k - T_{t^{n-k}I_p} T_n$. Так как $\mathcal{K}_1 = T_{t^{-k}I_p}(\mathcal{I} - T_{t^nI_p} T_{t^{-n}I_p}) T_a$ и проектор $\mathcal{I} - T_{t^nI_p} T_{t^{-n}I_p}$ на $\ker T_{t^{-n}I_p}$ является конечномерным, то $\mathcal{K}_1$ — конечномерен. Таким образом, $T_k = T_{t^{n-k}I_p} T_n + \mathcal{K}_1$. Оператор $T_{t^{n-k}I_p}$ обратим слева при $n - k > 0$, а в силу доказанной части теоремы оператор T_n обратим справа. Легко проверить, что в этом случае их произведение $T_{t^{n-k}I_p} T_n$ — обобщенно обратимый оператор. Таким образом, оператор T_k представлен в виде суммы обобщенно обратимого и конечномерного операторов. По теореме 5.3 из [4] он обобщенно обратим.

Пусть $-n < k < 0$. Введем конечномерный оператор

$$\mathcal{K}_2 = T_k - T_{-n} T_{t^{-n-k}I_p} = T_a(\mathcal{I} - T_{t^nI_p} T_{t^{-n}I_p}) T_{t^{-k}I_p}.$$

Поскольку T_{-n} обратим слева, а $T_{t^{-n-k}I_p}$ обратим справа, то $T_{-n} T_{t^{-n-k}I_p}$ — обобщенно обратим. Снова применяя теорему 5.3, получаем, что T_k — обобщенно обратим.

Часть теоремы, относящаяся к оператору U_k, доказывается аналогично с использованием представления $\alpha(t) = \gamma_-(t)\gamma_+(t)$ из леммы 3.1 и частичной мультипликативности (2.2) для операторов U_a. □

Из этой теоремы мы получаем два очевидных следствия.

Следствие 3.1. *Если $a(t) \in GW^{p\times p}$, то все операторы T_k (U_k) нормально разрешимы в любом пространстве $E^{p\times 1}(\mathbb{Z}_+)$ $(E^{1\times p}(\mathbb{Z}_-))$.*

Из критерия односторонней обратимости операторов следует

Следствие 3.2. *В любом пространстве $E^{p\times 1}(\mathbb{Z}_+)$*

$$\ker T_k = 0 \quad при \quad k \leqslant -n, \quad \operatorname{Im} T_k = E^{p\times 1}(\mathbb{Z}_+) \quad при \quad k \geqslant n.$$

Аналогично, в любом пространстве $E^{1\times p}(\mathbb{Z}_-)$

$$\ker U_k = 0 \quad при \quad k \geqslant n, \quad \operatorname{Im} U_k = E^{1\times p}(\mathbb{Z}_-) \quad при \quad k \leqslant -n.$$

На втором этапе мы докажем конечномерность ядер операторов T_k, U_k.

Теорема 3.2. *Если $a(t) \in GW^{p\times p}$, то для любого фиксированного k ядро $\ker T_k$ $\left(\ker U_k\right)$ конечномерно и одно и то же во всех пространствах $E^{p\times 1}(\mathbb{Z}_+)$ $\left(E^{1\times p}(\mathbb{Z}_-)\right)$.*

Доказательство. В силу следствия 3.2 для оператора T_k нужно рассмотреть только случай $k > -n$. Представим $t^{-k}a_n(t)$ в виде

$$t^{-k}a_n(t) = t^{-(k+n)}\pi_{2n}(t),$$

где $\pi_{2n}(t)$ — матричный многочлен от t степени не выше $2n$. Тогда в силу частичной мультипликативности получаем $T_k = T_{b_-}T_{t^{-(n+k)}I_p}T_{b_+\pi_{2n}}$. Так как $\pi_{2n}(t)$ — матричный многочлен, принадлежащий $GW^{p\times p}$, то оператор $T_{b_+\pi_{2n}}$ обратим слева.

Пусть $x_+ \in E^{p\times 1}(\mathbb{Z}_+)$ произвольный элемент пространства $\ker T_k$. Поскольку T_{b_-} — обратимый оператор, то $T_{b_+\pi_{2n}}x_+ \in \ker T_{t^{-(n+k)}I_p}$, т.е. $x_+ \in T^{\dagger}_{b_+\pi_{2n}} \ker T_{t^{-(n+k)}I_p}$. Здесь $T^{\dagger}_{b_+\pi_{2n}}$ — оператор, обратный слева к $T_{b_+\pi_{2n}}$. Таким образом, $\ker T_k \subseteq T^{\dagger}_{b_+\pi_{2n}} \ker T_{t^{-(n+k)}I_p}$.

Оператор $T_{t^{-(k+n)}I_p}$ в любом пространстве $E^{p\times 1}(\mathbb{Z}_+)$ действует как сдвиг влево на $k+n$ позиций. Поэтому пространство $\ker T_{t^{-(k+n)}I_p}$ состоит из последовательностей вида $y = (y_0, \ldots, y_{n+k-1}, 0, 0, \ldots)$, где y_j — произвольные векторы из $\mathbb{C}^{p\times 1}$. Значит, это пространство конечномерно и является подпространством $l_1^{p\times 1}(\mathbb{Z}_+)$. Обозначим пространство таких последовательностей через $l_1^{p\times 1}([0, n+k-1])$. Тогда во всех пространствах $E^{p\times 1}(\mathbb{Z}_+)$

$$\ker T_k \subseteq T^{\dagger}_{b_+\pi_{2n}} l_1^{p\times 1}([0, k+m)).$$

Отсюда следует, что $\ker T_k$ — конечномерное подпространство $l_1^{p\times 1}(\mathbb{Z}_+)$. Часть теоремы, относящаяся к оператору U_k доказывается аналогично. □

Теперь мы можем доказать основной результат этого раздела.

Теорема 3.3. *Если $a(t) \in GW^{p\times p}$, то для любого фиксированного k оператор T_k (U_k) нетеров и имеет одинаковый индекс в любом пространстве $E^{p\times 1}(\mathbb{Z}_+)$ $(E^{1\times p}(\mathbb{Z}_-))$.*

Доказательство. Нормальная разрешимость операторов T_k и U_k следует из их обобщенной обратимости (см. следствие 3.1). По теореме 3.2 $\alpha_k := \dim\ker T_k < \infty$ и одно и то же во всех пространствах $E^{p\times 1}(\mathbb{Z}_+)$. Аналогично, $\beta_k := \dim\ker U_k < \infty$ и одно и то же во всех пространствах $E^{1\times p}(\mathbb{Z}_-)$. Осталось доказать, что

$$\alpha_k^* := \dim\operatorname{coker} T_k = \dim\ker T_k^* < \infty$$
$$(\beta_k^* := \dim\operatorname{coker} U_k = \dim\ker U_k^* < \infty)$$

и одинаково во всех пространствах $E^{p\times 1}(\mathbb{Z}_+)$ $(E^{1\times p}(\mathbb{Z}_-))$.

Если $E^{p\times 1}(\mathbb{Z}_+) = l_1^{p\times 1}(\mathbb{Z}_+)$, то T_k^* совпадает с оператором U_k, действующим в $l_\infty^{1\times p}(\mathbb{Z}_+)$. Таким образом, в данном случае $\alpha_k^* = \beta_k < \infty$, т.е. оператор T_k нетеров и $\operatorname{ind} T_k = \alpha_k - \beta_k$.

Аналогичным образом доказывается, что оператор U_k нетеров в пространстве $l_1^{1\times p}(\mathbb{Z}_-)$ и $\operatorname{ind} U_k = \beta_k - \alpha_k$.

Рассмотрим оператор T_k в пространстве $E^{p\times 1}(\mathbb{Z}_+) = l_\infty^{p\times 1}(\mathbb{Z}_+)$. По предложению 2.1 он является сопряженным к нетеровому оператору U_k, действующему в пространстве $l_1^{1\times p}(\mathbb{Z}_-)$. Тогда, по известной теореме из функционального анализа (см., например, [8, теорема 18]), T_k будет нетеровым в $l_\infty^{p\times 1}(\mathbb{Z}_+)$. Кроме того, т.к. индексы любого оператора и сопряженного к нему отличаются только знаком, то $\operatorname{ind} T_k = -\operatorname{ind} U_k = \alpha_k - \beta_k$. Итак, оператор T_k нетеров во всех пространствах $E^{p\times 1}(\mathbb{Z}_+)$ и его индекс не зависит от выбора этого пространства.

Такое же утверждение справедливо для оператора U_a. □

Замечание 3.1. *Результаты этого раздела справедливы во всех крейновских пространствах $E^{p\times 1}(\mathbb{Z}_+) = l_s^{p\times 1}(\mathbb{Z}_+)$ $(1 \leqslant s \leqslant \infty)$, $c^{p\times 1}(\mathbb{Z}_+)$, $c_0^{p\times 1}(\mathbb{Z}_+)$ и $E^{1\times p}(\mathbb{Z}_-) = l_s^{1\times p}(\mathbb{Z}_-)$, $c^{1\times p}(\mathbb{Z}_-)$, $c_0^{1\times p}(\mathbb{Z}_-)$. Чтобы не загромождать изложение, мы рассмотрели только те пары пространств, которые понадобятся для нового доказательства существования решения задачи факторизации Винера — Хопфа.*

4. Индексы и существенные функции бесконечной последовательности комплексных матриц

Теперь мы можем приступить к определению индексов и существенных функций для бесконечной последовательности матриц. Мы будем действовать в полном соответствии со случаем конечной последовательности матриц [1], [13].

В пространствах $E^{p\times 1}(\mathbb{Z}_+)$ и $E^{1\times p}(\mathbb{Z}_-)$ рассмотрим последовательность подпространств $\ker T_k$ и $\ker U_k$ для $k \in \mathbb{Z}$:

$$\ker T_k = \Big\{ x_+ \in E^{p\times 1}(\mathbb{Z}_+) \ : \ \sum_{j=0}^{\infty} a_{i-j} x_j = 0, \ i \geqslant k \Big\},$$

$$\ker U_k = \Big\{ f_- \in E^{1\times p}(\mathbb{Z}_-) \ : \ \sum_{j=-\infty}^{0} f_j a_{i-j} = 0, \ i \leqslant k \Big\}.$$

Из этих формул видно, что

$$\ker T_k \subseteq \ker T_{k+1}, \qquad \ker U_k \supseteq \ker U_{k+1}.$$

Отметим, что последовательность пространств $\ker U_k$ является аналогом последовательности $\ker_L T_k$ в конечномерном случае.

Изучим структуру ядер $\{\ker T_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ $(\{\ker U_k\}_{k\in\mathbb{Z}})$.

В силу теоремы 3.2 мы можем ограничиться изучением пространств $\ker T_k$, $(\ker U_k)$ только для $l_1^{p\times 1}(\mathbb{Z}_+)$ $(l_1^{1\times p}(\mathbb{Z}_-))$. В этом случае удобнее перейти от пространств последовательностей к соответствующим пространствам производящих вектор–функций, т.е. к $W_+^{p\times 1}$ $(W_-^{1\times p})$.

Для матрицы–функции $a(t) = \sum\limits_{j=-\infty}^{\infty} a_j t^j \in W^{p\times p}$ определим два линейных ограниченных оператора

$$\sigma_R : W^{p\times 1} \mapsto \mathbb{C}^{p\times 1}, \qquad \sigma_L : W^{1\times p} \mapsto \mathbb{C}^{1\times p},$$

действующих по формулам

$$\sigma_R\{R(t)\} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_{-j} r_j, \qquad \sigma_L\{L(t)\} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} l_j a_{-j}, \tag{4.1}$$

для

$$R(t)=\sum_{j=-\infty}^{\infty} r_j t^j \in W^{p\times 1}, \qquad L(t)=\sum_{j=-\infty}^{\infty} l_j t^j \in W^{1\times p}.$$

Пространство производящих вектор–функций (т.е. пространство преобразований Фурье) элементов из $\ker T_k$, $\ker U_k$ обозначим $\mathcal{N}_k^R$, $\mathcal{N}_k^L$, соответственно. Очевидно, что

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_k^R &= \Big\{R(t)\in W_+^{p\times 1} : \sigma_R\{t^{-i}R(t)\}=0,\ i\geqslant k\Big\},\\ \mathcal{N}_k^L &= \Big\{L(t)\in W_-^{1\times p} : \sigma_L\{t^{-i}L(t)\}=0,\ i\leqslant k\Big\}.\end{aligned} \tag{4.2}$$

Напомним, что эти пространства конечномерны.

Обозначим

$$d_k^R=\dim\mathcal{N}_k^R, \qquad d_k^L=\dim\mathcal{N}_k^L, \qquad \Delta_k^R=d_k^R-d_{k-1}^R, \qquad \Delta_k^L=d_k^L-d_{k+1}^L.$$

Теорема 4.1. *Для любой матрицы–функции $a(t)\in GW^{p\times p}$ существует целое число $n\geqslant 0$ такое, что*

$$\begin{aligned}0=\ldots=\Delta_{-n-1}^R=\Delta_{-n}^R\leqslant\Delta_{-n+1}^R\leqslant\ldots\leqslant\Delta_n^R\leqslant\Delta_{n+1}^R=\Delta_{n+2}^R=\ldots=p,\\ p=\ldots=\Delta_{-n-2}^L=\Delta_{-n-1}^L\geqslant\Delta_{-n}^L\geqslant\ldots\geqslant\Delta_{n-1}^L\geqslant\Delta_n^L=\Delta_{n+1}^L=\ldots=0.\end{aligned} \tag{4.3}$$

Доказательство. Из определения (4.2) сразу же следует, что $\mathcal{N}_k^R$ и $t\mathcal{N}_k^R$ — подпространства $\mathcal{N}_{k+1}^R$. Легко также заметить, что $\mathcal{N}_k^R\cap t\mathcal{N}_k^R=t\mathcal{N}_{k-1}^R$. Поэтому по формуле Грассмана

$$\dim\,[\mathcal{N}_k^R+t\mathcal{N}_k^R]=2d_k^R-d_{k-1}^R.$$

Если h_{k+1}^R — размерность дополнения $\mathcal{N}_k^R+t\mathcal{N}_k^R$ до всего пространства $\mathcal{N}_{k+1}^R$, то $h_{k+1}^R=\Delta_{k+1}^R-\Delta_k^R$. Это означает, что $\Delta_{k+1}^R\geqslant\Delta_k^R$ для любого $k\in\mathbb{Z}$. Кроме того, по теореме 3.2 существует $n\geqslant 0$ такое, что $d_k^R=0$ для $k\leqslant -n$. Поэтому $\Delta_k^R=0$ для $k\leqslant -n$.

Покажем, что $\Delta_k^R=p$, начиная с $k=n+1$. Если $x(t)$ и $y(t)$ принадлежат $\mathcal{N}_{k+1}^R$ и $x(t)-y(t)\in\mathcal{N}_k^R$, то $\sigma_R\{t^{-k}x(t)\}=\sigma_R\{t^{-k}y(t)\}$. Поэтому корректно определено отображение $\pi:\mathcal{N}_{k+1}^R/\mathcal{N}_k^R\mapsto\mathbb{C}^{p\times 1}$ по правилу

$$\pi(X)=\sigma_R\{t^{-k}x(t)\}.$$

Здесь $x(t)\in\mathcal{N}_{k+1}^R$ — любой представитель класса X. Это отображение является вложением $\mathcal{N}_{k+1}^R/\mathcal{N}_k^R$ в $\mathbb{C}^{p\times 1}$ и потому $\Delta_{k+1}^R=\dim\,\mathcal{N}_{k+1}^R/\mathcal{N}_k^R\leqslant p$ для любого $k\in\mathbb{Z}$.

Докажем обратное неравенство для $k\geqslant n$. По той же теореме 3.2, при $k\geqslant n$ справедливо $\operatorname{Im}T_k=l_1^{p\times 1}(\mathbb{Z}_+)$. Следовательно для таких k существуют решения $x^{(l)}=\{x_j^{(l)}\}_{j=0}^{\infty}$, $l=1,\ldots,p$, систем уравнений

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_{k-j}x_j^{(l)}=[I_p]^l, \tag{4.4}$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_{i-j}x_j^{(l)}=0, \qquad i\geqslant k+1 \tag{4.5}$$

в пространстве $l_1^{p\times 1}(\mathbb{Z}_+)$. Здесь $[I_p]^l$ — l-й столбец единичной матрицы I_p. Уравнения (4.5) означают, что производящие функции $x^{(l)}(t)$, $l=1,\ldots,p$, принадлежат пространству $\mathcal{N}_{k+1}^R$, а условие (4.4) равносильно тому, что $x^{(1)}(t),\ldots,x^{(p)}(t)$ — линейно независимы по модулю пространства $\mathcal{N}_k^R$. Значит, $\Delta_{k+1}^R\geqslant p$ и окончательно $\Delta_{k+1}^R=p$ при $k\geqslant n$.

Часть теоремы, относящаяся к последовательности Δ_k^L доказывается аналогично. □

Неравенства (4.3) означают, что найдутся целые числа $-n \leqslant \mu_1 \leqslant \ldots \leqslant \mu_p \leqslant n$ такие, что

$$\begin{aligned} \ldots =&\Delta^R_{-n} = \ldots = \Delta^R_{\mu_1} = 0, \\ &\cdots\cdots \\ &\Delta^R_{\mu_i+1} = \ldots = \Delta^R_{\mu_{i+1}} = i, \\ &\cdots\cdots \\ &\Delta^R_{\mu_p+1} = \ldots = \Delta^R_{n+1} = p = \ldots . \end{aligned} \tag{4.6}$$

Если i-я строка в этих соотношениях отсутствует, то считаем, что $\mu_i = \mu_{i+1}$.

Аналогично, из монотонности последовательности Δ^L_k получаем, что существуют целые числа $\nu_1 \leqslant \ldots \leqslant \nu_p$ такие, что

$$\begin{aligned} \ldots =&\Delta^L_{-n-1} = \ldots = \Delta^L_{\nu_1-1} = p, \\ &\cdots\cdots \\ &\Delta^L_{\nu_i} = \ldots = \Delta^L_{\nu_{i+1}-1} = p - i, \\ &\cdots\cdots \\ &\Delta^L_{\nu_p} = \ldots = \Delta^L_{n} = 0 = \ldots . \end{aligned} \tag{4.7}$$

В полном соответствии с конечномерным случаем мы докажем в следующей теореме, что числа μ_i и ν_i совпадают.

Теорема 4.2. *Для любой матрицы-функции $a(t) \in GW^{p\times p}$ числа $\mu_1, \ldots, \mu_p$ совпадают с $\nu_1, \ldots, \nu_p$. Кроме того,*

$$\sum_{j=1}^{p} \mu_j = -\operatorname{ind} T_a. \tag{4.8}$$

Доказательство. Из определения индекса оператора T_k получаем

$$d^R_k = \operatorname{ind} T_k + \dim\ker T^*_k.$$

Так как сопряженный оператор к T_k в пространстве $l^{p\times 1}_1(\mathbb{Z}_+)$ совпадает с оператором U_k в пространстве $l^{1\times p}_\infty(\mathbb{Z}_-)$ и размерность пространства $\ker U_k$ одна и та же во всех пространствах $E^{1\times p}(\mathbb{Z}_-)$, тогда $\dim\ker T^*_k = d^L_k$. Из определения $T_k = T_{t^{-k}a}$ и частичной мультипликативности следует, что $T_{t^{-k}a}$ есть произведение нетеровых операторов $T_{t^{-k}I_p}$ и T_a. Тогда

$$\operatorname{ind} T_k = \operatorname{ind} T_{t^{-k}I_p} + \operatorname{ind} T_a = kp + \operatorname{ind} T_a$$

для любого $k \in \mathbb{Z}$. Поскольку

$$d^R_k = kp + \operatorname{ind} T_a + d^L_k, \qquad d^R_{k+1} = (k+1)p + \operatorname{ind} T_a + d^L_{k+1},$$

находим $\Delta^R_{k+1} = p - \Delta^L_k$. Поэтому из соотношений (4.6), (4.7) следует совпадение чисел μ_i и ν_i для $i = 1, \ldots, p$.

Докажем второе утверждение теоремы. Так как $d^R_{n+1} = \sum\limits_{j=-n}^{n+1} \Delta^R_j$, из (4.6) получаем $d^R_{n+1} = (n+1)p - \sum\limits_{j=1}^{p} \mu_j$. С другой стороны, по следствию 3.2 имеем $\operatorname{Im} T_{n+1} = l^{p\times 1}_1(\mathbb{Z}_+)$, т.е. $\operatorname{ind} T_{n+1} = \dim\ker T_{n+1}$ и, таким образом,

$$d^R_{n+1} = \operatorname{ind} T_{n+1} = (n+1)p + \operatorname{ind} T_a.$$

Сравнивая эти две формулы, получаем (4.8). □

Определение 4.1. *Целые числа $\mu_1, \dots, \mu_p$, определяемые из соотношений (4.6), будем называть существенными индексами (или, коротко, индексами) обратимой матрицы-функции $a(t)$ и соответствующей последовательности $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$.*

Так как размерность h_{k+1}^R дополнения $\mathcal{H}_{k+1}^R$ подпространства $\mathcal{N}_k^R + t\mathcal{N}_k^R$ до всего пространства $\mathcal{N}_{k+1}^R$ равна $\Delta_{k+1}^R - \Delta_k^R$, из (4.6) следует, что $h_{k+1}^R \neq 0$ только для $k = \mu_i$. В этом случае h_{k+1}^R совпадает с кратностью r_i индекса μ_i. Следовательно,

$$\mathcal{N}_{k+1}^R = \mathcal{N}_k^R + t\mathcal{N}_k^R \tag{4.9}$$

для $k \neq \mu_i$ и

$$\mathcal{N}_{k+1}^R = (\mathcal{N}_k^R + t\mathcal{N}_k^R) \oplus \mathcal{H}_{k+1}^R \tag{4.10}$$

для $k = \mu_i$.

Определение 4.2. *Любые вектор–функции $R_i(t), \dots, R_{i+r_i-1}(t)$ из $W_+^{p\times 1}$, образующие базис дополнения $\mathcal{H}_{\mu_i+1}^R$, будем называть правыми существенными вектор–функциями матрицы–функции $a(t)$, соответствующими индексу μ_i кратности r_i, $i = 1, \dots, p$. Таким образом получаем вектор–функции $R_1(t), \dots, R_p(t)$ из пространства $W_+^{p\times 1}$, которые назовем правыми существенными вектор–функциями $a(t)$ и соответствующей последовательности $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$.*

Аналогично, для $k \neq \mu_i$

$$\mathcal{N}_{k-1}^L = \mathcal{N}_k^L + t^{-1}\mathcal{N}_k^L$$

и для $k = \mu_i$

$$\mathcal{N}_{k-1}^L = (\mathcal{N}_k^L + t^{-1}\mathcal{N}_k^L) \oplus \mathcal{H}_{k-1}^L.$$

Выбирая базисы в пространствах $\mathcal{H}_{\mu_i-1}^L$ $(i = 1, \dots, p)$, мы получаем набор $L_1(t), \dots, L_p(t)$ вектор–функций из $W_-^{1\times p}$, которые мы будем называть *левыми существенными вектор–функциями* матрицы–функции $a(t)$.

В терминах индексов и существенных функций мы можем теперь описать структуру пространств $\ker T_k$, $\ker U_k$.

Теорема 4.3. *Пусть $\mu_1, \dots, \mu_p$ — существенные индексы $a(t) \in GW^{p\times p}$ и $R_1(t), \dots, R_p(t)$; $L_1(t), \dots, L_p(t)$ — соответственно правые и левые существенные функции $a(t)$. Тогда в любом пространстве $E^{p\times 1}(\mathbb{Z}_+)$ при $k \in (-\infty, \mu_1]$ имеем $\ker T_k = 0$. При $k \in (\mu_i, \mu_{i+1}]$ $(i = 1, \dots, p-1)$ или $k \in (\mu_p, +\infty)$ вектор–функции*

$$\{R_j(t), tR_j(t), \dots, t^{k-\mu_j-1}R_j(t)\}_{j=1,2,\dots,i} \tag{4.11}$$

из $W_+^{p\times 1}$ являются производящими функциями для элементов базиса ядра оператора T_k в любом пространстве $E^{p\times 1}(\mathbb{Z}_+)$.

Аналогично, $\ker U_k = 0$ при $k \in [\mu_p, +\infty)$, а для $k \in [\mu_{i-1}, \mu_i)$ $(i = 2, \dots, p)$ или для $k \in (-\infty, \mu_1)$ вектор–функции

$$\{L_j(t), t^{-1}L_j(t), \dots, t^{-(\mu_j-k-1)}L_j(t)\}_{j=i,i+1,\dots,p}$$

из $W_-^{1\times p}$ являются производящими функциями для элементов базиса ядра оператора U_k в любом пространстве $E^{1\times p}(\mathbb{Z}_-)$.

Доказательство. Первое утверждение теоремы очевидно. Пусть теперь $k \in (\mu_i, \mu_{i+1}]$ $(i = 1, \dots, p-1)$ или $k \in (\mu_p, +\infty)$. Из соотношений (4.9) и (4.10) следует, что функции (4.11) порождают пространство $\mathcal{N}_k^R$. Так как $d_k^R = \sum_{j=-n}^{k} \Delta_j^R$, из (4.6) мы получаем, что

$$d_k^R = ki - \sum_{j=1}^{i} \mu_j.$$

Таким образом, d_k^R совпадает с числом вектор–функций в (4.11). Следовательно, они образуют базис пространства $\mathcal{N}_k^R$. Вторая часть теоремы доказывается аналогично. □

5. Критерий существенности

Для обратимой матрицы–функции $a(t)$ существует критерий существенности, аналогичный соответствующему критерию в конечномерном случае [13].

Теорема 5.1. *Пусть $a(t) \in GW^{p\times p}$, $\kappa_1 \leqslant \ldots \leqslant \kappa_p$ — целые числа, удовлетворяющие равенству*

$$\sum_{j=1}^{p} \kappa_j = -\operatorname{ind} T_a$$

и $R_1(t), \ldots, R_p(t)$; $L_1(t), \ldots, L_p(t)$ — вектор–функции такие, что $R_j(t) \in \mathcal{N}_{\kappa_j+1}^R$, $L_j(t) \in \mathcal{N}_{\kappa_j-1}^L$.

Числа $\kappa_1, \ldots, \kappa_p$ являются существенными индексами $a(t)$, а $R_1(t), \ldots, R_p(t)$ — ее правыми существенными функциями тогда и только тогда, когда обратима матрица

$$\Lambda_R = \big(\sigma_R\{t^{-\kappa_1}R_1(t)\}\ldots\sigma_R\{t^{-\kappa_p}R_p(t)\}\big) \text{ или } \hat{\Lambda}_R = \big(R_1(0)\ldots R_p(0)\big).$$

Аналогично, $\kappa_1, \ldots, \kappa_p$ — существенные индексы, а $L_1(t), \ldots, L_p(t)$ — левые существенные функции $a(t)$ тогда и только тогда, когда обратима матрица

$$\Lambda_L = \begin{pmatrix} \sigma_L\{t^{-\kappa_1}L_1(t)\} \\ \vdots \\ \sigma_L\{t^{-\kappa_p}L_p(t)\} \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \hat{\Lambda}_L = \begin{pmatrix} L_1(\infty) \\ \vdots \\ L_p(\infty) \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $\kappa_1, \ldots, \kappa_p$ — существенные индексы, а $R_1(t), \ldots, R_p(t)$ — правые существенные функции $a(t)$. Предположим, что матрица Λ_R необратима. Тогда существуют числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$, среди которых есть отличные от нуля, такие, что

$$\alpha_1\sigma_R\{t^{-\kappa_1}R_1(t)\} + \ldots + \alpha_p\sigma_R\{t^{-\kappa_p}R_p(t)\} = 0. \tag{5.1}$$

Пусть последний индекс κ_p имеет кратность r, т.е.

$$\kappa_{p-r} < \kappa_{p-r+1} = \ldots = \kappa_p.$$

Введем вектор–функцию $Q(t) \in W_+^{p\times 1}(t)$:

$$\begin{aligned} Q(t) =& \alpha_1 t^{\kappa_p-\kappa_1}R_1(t) + \ldots + \alpha_{p-r}t^{\kappa_p-\kappa_{p-r}}R_{p-r}(t) \\ &+ \alpha_{p-r+1}R_{p-r+1}(t) + \ldots + \alpha_p R_p(t). \end{aligned}$$

Очевидно, что $Q(t)$ принадлежит пространству $\mathcal{N}_{\kappa_p+1}^R$.

Условие (5.1) означает, что $\sigma_R\{t^{-\kappa_p}Q(t)\} = 0$, т.е. $Q(t) \in \mathcal{N}_{\kappa_p}^R$. Но тогда

$$\alpha_{p-r+1}R_{p-r+1}(t) + \ldots + \alpha_p R_p(t) \in \mathcal{N}_{\kappa_p}^R + t\mathcal{N}_{\kappa_p}^R.$$

Так как $R_{p-r+1}(t), \ldots, R_p(t)$ — правые существенные функции, соответствующие индексу κ_p, тогда это возможно только при $\alpha_{p-r+1} = \ldots = \alpha_p = 0$.

Повторяя эти рассуждения последовательно для всех оставшихся индексов, получаем $\alpha_1 = \ldots = \alpha_p = 0$. Противоречие показывает, что Λ_R обратима. Аналогично доказывается обратимость $\hat{\Lambda}_R$, Λ_L и $\hat{\Lambda}_L$.

Достаточность. Пусть для чисел $\kappa_1, \ldots, \kappa_p$ и вектор–функций $R_1(t), \ldots, R_p(t)$ матрица Λ_R обратима. Через $\mu_1, \ldots, \mu_p$ обозначим существенные индексы $a(t)$. Пусть

$\kappa_j \in [\mu_{s_j}, \mu_{s_j+1})$, $j = 1, \dots, p$. Здесь $0 \leqslant s_1 \leqslant \dots \leqslant s_p \leqslant p$, причем эти числа выбраны так, что, если $\kappa_j = \kappa_{j+1}$, то $s_j = s_{j+1}$ и $\mu_{s_j} < \mu_{s_j+1}$ при $\kappa_j < \kappa_{j+1}$.

Оценим числа s_j. Для этого образуем из первых j столбцов обратимой матрицы Λ_R матрицу

$$\Lambda_R^j = \left(\sigma\{t^{-\kappa_1} R_1(t)\} \dots \sigma\{t^{-\kappa_j} R_j(t)\}\right),$$

$j = 1, \dots, p$. Очевидно, что ранг Λ_R^j равен j.

С другой стороны, произведем оценку этого ранга. Рассмотрим произвольный l-й столбец этой матрицы: $\sigma\{t^{-\kappa_l} R_l(t)$. По условию $R_l(t) \in \mathcal{N}_{\kappa_l+1}^R$ и $\kappa_l + 1 \in (\mu_{s_l}, \mu_{s_l+1}]$. По теореме 4.3 базис пространства $\mathcal{N}_{\kappa_l+1}^R$ состоит из функций

$$\left\{R_i(t), tR_i(t), \dots, t^{\kappa_l - \mu_i} R_i(t)\right\}_{i=1,2,\dots,s_l}.$$

Разложим $R_l(t)$ по этому базису, выделив явно лишь $\{t^{\kappa_l-\mu_i} R_i(t)\}_{i=1,2,\dots,s_l}$:

$$R_l(t) = \sum_{i=1}^{s_l} \alpha_i^{(l)} t^{\kappa_l - \mu_i} R_i(t) + u_l(t).$$

Здесь $u_l(t)$ — вектор–функция, включающая все оставшиеся вектор–функции из базиса $\mathcal{N}_{\kappa_l+1}^R$. Очевидно, что $\sigma_R\{t^{-\kappa_l} u_l(t)\} = 0$. Обозначим $\sigma_i = \sigma_R\{t^{-\mu_i} R_i(t)\}$, $\sigma_i \in \mathbb{C}^{p\times 1}$.

Тогда вектор–столбец $\sigma_R\{t^{-\kappa_l} R_l(t)\}$ представляется в виде следующей суммы вектор–столбцов:

$$\sigma_R\{t^{-\kappa_l} R_l(t)\} = \sum_{i=1}^{s_l} \alpha_i^{(l)} \sigma_i = \sum_{i=1}^{s_j} \alpha_i^{(l)} \sigma_i, \quad 1 \leqslant l \leqslant j.$$

Здесь мы доопределили коэффициенты $\alpha_i^{(l)}$, положив $\alpha_i^{(l)} = 0$ для $s_l < i \leqslant s_j$. Таким образом, мы получили следующее представление матрицы Λ_R^j:

$$\Lambda_R^j = \sum_{i=1}^{s_j} \left(\alpha_i^{(1)} \sigma_i, \dots, \alpha_i^{(j)} \sigma_i\right) = \sum_{i=1}^{s_j} \sigma_i \left(\alpha_i^{(1)}, \dots, \alpha_i^{(j)}\right).$$

Это означает, что мы представили матрицу Λ_R^j в виде суммы матриц ранга 1. Поэтому ранг матрицы Λ_R^j не превосходит s_j (см., например, [3, пункт 4.44]). Мы получили оценку $s_j \geqslant j$ для $j = 1, \dots, p$. Следовательно $\kappa_j \geqslant \mu_{s_j} \geqslant \mu_j$. Так как

$$\sum_{j=1}^{p} \kappa_j = -\operatorname{ind} T_a = \sum_{j=1}^{p} \mu_j,$$

тогда это возможно лишь, если $\kappa_j = \mu_j$, $j = 1, \dots, p$.

Докажем теперь, что вектор–функции $R_1(t), \dots, R_p(t)$ можно взять в качестве правых существенных функций. Пусть μ_1 имеет кратность r_1: $\mu_1 = \dots = \mu_{r_1} < \mu_{r_1+1}$. Если бы функции $R_1(t), \dots, R_{r_1}(t)$ из r_1–мерного пространства $\mathcal{N}_{\mu_1+1}^R$ были бы линейно зависимы, то первые r_1 столбцов матрицы Λ_R также были бы связаны линейной зависимостью, что невозможно в силу обратимости Λ_R. Таким образом, $R_1(t), \dots, R_{r_1}(t)$ могут быть выбраны в качестве правых существенных функций, соответствующих индексу μ_1.

Предположим, что вектор–функции $R_1(t), \dots, R_j(t)$ являются существенными функциями, соответствующими индексам $\mu_1, \dots, \mu_j$. Докажем, что функции $R_{j+1}(t), \dots, R_{j+r_{j+1}}(t)$ из пространства $\mathcal{N}_{\mu_{j+1}+1}^R$ можно взять в качестве правых существенных функций, соответствующих индексу μ_{j+1}. Здесь r_{j+1} — кратность индекса μ_{j+1}:

$$\mu_j < \mu_{j+1} = \dots = \mu_{j+r_{j+1}} < \mu_{j+r_{j+1}+1}.$$

Предположим, что существуют числа $\alpha_{j+1}, \dots, \alpha_{j+r_{j+1}}$ такие, что

$$\alpha_{j+1} R_{j+1}(t) + \dots + \alpha_{j+r_{j+1}} R_{j+r_{j+1}}(t) \in \mathcal{N}_{\mu_{j+1}}^R + t\mathcal{N}_{\mu_{j+1}}^R. \tag{5.2}$$

Из определения правых существенных многочленов и теоремы 4.3 следует, что базис пространства $\mathcal{N}^R_{\mu_{j+1}} + t\mathcal{N}^R_{\mu_{j+1}}$ состоит из вектор–функций

$$\left\{R_i(t), tR_i(t), \dots, t^{\mu_{j+1}-\mu_i}R_i(t)\right\}_{i=1,2,\dots,j}.$$

Поэтому из (5.2) следует, что существуют числа $\alpha_1, \dots, \alpha_j$ такие, что

$$\begin{aligned}\alpha_{j+1}\sigma_R\left\{t^{-\mu_{j+1}}R_{j+1}(t)\right\} + \dots + \alpha_{j+r_{j+1}}\sigma_R\left\{t^{-\mu_{j+r_{j+1}}}R_{j+r_{j+1}}(t)\right\}\\ =\alpha_1\sigma_R\left\{t^{-\mu_1}R_1(t)\right\} + \dots + \alpha_j\sigma_R\left\{t^{-\mu_j}R_j(t)\right\}.\end{aligned}$$

Но в силу обратимости матрицы Λ_R это возможно только если $\alpha_1 = \dots = \alpha_{j+r_{j+1}} = 0$. Это означает, что вектор–функции $R_{j+1}(t), \dots, R_{j+r_{j+1}}(t)$ линейно независимы по модулю пространства $\mathcal{N}^R_{\mu_{j+1}} + t\mathcal{N}^R_{\mu_{j+1}}$. Поэтому они могут быть взяты в качестве правых существенных функций, соответствующих индексу μ_{j+1}.

Аналогично доказываются утверждения теоремы относительно матриц $\hat{\Lambda}_R$, Λ_L и $\hat{\Lambda}_L$. □

6. Существенные функции и факторизация Винера — Хопфа

Теперь мы можем выяснить, как связаны индексы и существенные функции обратимой матрицы–функции $a(t)$ с ее факторизацией Винера — Хопфа.

Из существенных вектор–функций $R_1(t), \dots, R_p(t)$ и $L_1(t), \dots, L_p(t)$ составим матричные функции

$$\mathcal{R}(t) = \big(R_1(t) \dots R_p(t)\big), \qquad \mathcal{L}(t) = \begin{pmatrix} L_1(t) \\ \vdots \\ L_p(t)\end{pmatrix}.$$

Очевидно, что $\mathcal{R}(t) \in W^{p\times p}_+$, $\mathcal{L}(t) \in W^{p\times p}_-$. Кроме того, введем

$$d(t) = \operatorname{diag}[t^{\mu_1}, \dots, t^{\mu_p}].$$

В следующей теореме мы построим правую факторизацию Винера — Хопфа $a(t)$ в терминах ее индексов и существенных функций. Тем самым мы получим новое доказательство существования факторизации Винера — Хопфа. Отметим, что это доказательство явно использует только средства функционального анализа, а из комплексного анализа потребуется только принцип максимума модуля.

Теорема 6.1. *Для любой матрицы–функции $a(t) \in GW^{p\times p}$ справедливы представления:*

$$a(t) = a_-(t)d(t)\mathcal{R}^{-1}(t) = \mathcal{L}^{-1}(t)d(t)a_+(t),$$

которые являются ее правыми факторизациями Винера — Хопфа.

Таким образом, существенные индексы $a(t)$ совпадают с правыми факторизационными индексами $a(t)$, а $\mathcal{R}(t)$ $\big(\mathcal{L}(t)\big)$ является обратной матрицей–функцией к одному из факторов $a_+(t)$ $\big(a_-(t)\big)$.

Доказательство. Из определения (4.1) оператора σ_R следует, что

$$\sigma_R\{t^{-i}R(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{i-k}R_k = (a * R)_i,$$

т.е. совпадает с i-м коэффициентом Фурье вектор–функции $a(t)R(t)$. Поэтому условие $R(t) \in \mathcal{N}^R_k$ равносильно тому, что $a(t)R(t)$ имеет нулевые коэффициенты Фурье с номерами $i \geqslant k$. Отсюда следует, что столбцы матрицы–функции $a(t)\mathcal{R}(t)d^{-1}(t)$ принадлежат пространству $W^{p\times 1}_-$, т.е.

$$a(t)\mathcal{R}(t)d^{-1}(t) = a_-(t), \tag{6.1}$$

для некоторой матрицы–функции $a_-(t) \in W_-^{p\times p}$. Из критерия существенности (теорема 5.1) получаем обратимость матрицы

$$a_-(\infty) = \big(\sigma_R\{t^{-\mu_1}R_1(t)\}\dots\sigma_R\{t^{-\mu_p}R_p(t)\}\big) = \Lambda_R.$$

Аналогично,

$$d^{-1}(t)\mathcal{L}(t)a(t) = a_+(t), \tag{6.2}$$

для некоторой $a_+(t) \in W_+^{p\times p}$, $a_+(0) = \Lambda_L$ — обратима.

Из (6.1), (6.2) имеем

$$\mathcal{L}(t)a(t)\mathcal{R}(t) = \mathcal{L}(t)a_-(t)d(t) = d(t)a_+(t)\mathcal{R}(t).$$

Переход в последнем равенстве к определителям дает

$$\det a_+(t)\det\mathcal{R}(t) = \det a_-(t)\det\mathcal{L}(t).$$

Так как левая часть этого равенства принадлежит алгебре W_+, а правая часть — алгебре W_-, то на единичной окружности имеем $\det a_+(t)\det\mathcal{R}(t) = \lambda$, $\lambda\in\mathbb{C}$. Из принципа максимума модуля тогда следует, что $\det a_+(z)\det\mathcal{R}(z) = \lambda$ всюду в замкнутом единичном круге. Поскольку $\det a_+(0) = \det\Lambda_L \neq 0$ и $\det\mathcal{R}(0) = \det\hat{\Lambda}_R \neq 0$, получаем $\lambda\neq 0$. Таким образом,

$$\det a_+(z)\det\mathcal{R}(z) = \lambda \neq 0$$

всюду в замкнутом единичном круге. Это означает, что матрицы–функции $a_+(t)$, $\mathcal{R}(t)$ обратимы в алгебре $W_+^{p\times p}$. Аналогично доказывается обратимость $a_-(t)$, $\mathcal{L}(t)$ в алгебре $W_-^{p\times p}$.

Поэтому из (6.1) и (6.2) мы получаем правые факторизации Винера — Хопфа матрицы-функции $a(t)$ в терминах правых или левых существенных функций:

$$a(t) = a_-(t)d(t)\mathcal{R}^{-1}(t) = \mathcal{L}^{-1}(t)d(t)a_+(t).$$

Теорема доказана. □

Замечание 6.1. *Заметим, что из полученных результатов следует, что сумма факторизационных индексов $a(t)$, взятая с обратным знаком, совпадает с индексом оператора T_a.*

Теперь мы докажем, что в свою очередь знание любой правой факторизации $a(t)$ позволяет находить ее существенные индексы и существенные функции. Условимся обозначать для матрицы A через $[A]^j$ ее j-й столбец, а через $[A]_j$ — j-ю строку.

Теорема 6.2. *Если*

$$a(t) = a_-(t)d(t)a_+(t) \tag{6.3}$$

любая правая факторизация Винера — Хопфа $a(t)$, то правые факторизационные индексы $a(t)$ являются существенными индексами $a(t)$, вектор–функции $[a_+^{-1}(t)]^1,\dots,[a_+^{-1}(t)]^p$ есть правые существенные функции, и $[a_-^{-1}(t)]_1,\dots,[a_-^{-1}(t)]_p$ — левые существенные функции $a(t)$.

Доказательство. Если $\mu_1,\dots,\mu_p$ — правые факторизационные индексы $a(t)$, то из (6.3) следует, что

$$\sum_{j=1}^{p}\mu_j = -\operatorname{ind}T_a.$$

Кроме того, из факторизации (6.3) также имеем:

$$t^{-\mu_j}a(t)[a_+^{-1}(t)]^j = [a_-(t)]^j, \quad j = 1,\dots,p.$$

Коэффициенты Фурье с положительными номерами векторной функции $t^{-\mu_j}a(t)[a_+^{-1}(t)]^j$ равны нулю. Поэтому $[a_+^{-1}(t)]^j \in \mathcal{N}^R_{\mu_j+1}$. Поскольку матрица

$$\Lambda_R = \left(\sigma_R\left\{t^{-\mu_1}[a_+^{-1}(t)]^1\right\}\dots\sigma_R\left\{t^{-\mu_p}[a_+^{-1}(t)]^p\right\}\right) = a_-(\infty),$$

то она обратима. Из критерия существенности (теорема 5.1) следует, что числа $\mu_1,\dots,\mu_p$ являются существенными индексами, а вектор–функции $[a_+^{-1}(t)]^1,\dots,[a_+^{-1}(t)]^p$ — правыми существенными функциями $a(t)$.

Аналогично доказывается вторая часть теоремы. □

Итак, в случае обратимой матрицы–функции метод существенных индексов и функций полностью эквивалентен методу факторизации Винера — Хопфа.

Замечание 6.2. *Сравним предложенное в данной работе доказательство существования факторизации с классическим доказательством И.Ц. Гохберга, ныне вошедшим во многие монографии и обзоры по данной тематике (см., например, [5], [7]). Основой обоих методов является лемма о канонической факторизации матриц–функций, достаточно близких к единичной матрице. Затем в обоих методах используется представление вида (3.2) (см. [7, стр. 262]). Далее пути доказательства расходятся. В методе И.Ц. Гохберга доказывается существование факторизации аналитической внутри области матрицы–функции. Это наиболее технически сложная часть доказательства, и она является чистой теоремой существования. Найти в явном виде частные индексы и факторизационные множители аналитической матрицы–функции этим методом вряд ли возможно. Общий случай в методе И.Ц. Гохберга сводится к аналитическому с помощью представления (3.2).*

В методе, предложенном в данной работе, представление (3.2) используется для изучения цепочки ядер операторов T_k, U_k, которое в конце концов приводит к построению факторизации. Это более долгий путь, но он имеет свои преимущества, которые мы продемонстрируем в следующем параграфе и в следующих работах.

Замечание 6.3. *Если $a(t) = a_-(t)d(t)a_+(t)$ — факторизация Винера — Хопфа $a(t)$, то для теплицева оператора T_a оператор $T_a^\dagger := T_{a_+^{-1}}T_{d^{-1}}T_{a_-^{-1}}$ является его обобщенно обратным. Поэтому, ядро T_a и обобщенный обратный $T_a^\dagger = T_{\mathcal{R}}T_{d^{-1}}T_{\mathcal{L}}$ описываются в терминах индексов и существенных функций $a(t)$. Этот факт является аналогом соответствующего результата для конечных теплицевых матриц. Таким образом, существует унифицированный подход к изучению бесконечномерных и конечномерных теплицевых операторов: это метод индексов и существенных функций (многочленов).*

Замечание 6.4. *В данной работе мы рассматриваем только правую факторизацию Винера — Хопфа. Аналогичную теорию можно построить для левой факторизации (1.1), если заменить предположение A на*

B. *Последовательность $a := \{a_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ является последовательностью матричных коэффициентов Фурье матрицы–функции $a^{-1}(t) \in W^{p\times p}$.*

7. Эффективный признак канонической факторизации строго невырожденных матриц–функций

В работе [12] изучалась задача нахождения частных индексов строго невырожденной матрицы-функции

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix} \in GW^{2\times 2}, \quad a_{11}(t) \in GW.$$

Факторизация подобных матриц–функций часто встречается в различных задачах матфизики и механики, в частности, в теории солитонов [10] и в теории дифракции [16]. При условии, что $\operatorname{ind} a_{11} = 2 \operatorname{ind} \det A$ задача факторизации для $A(t)$ была явно приведена к факторизации матрицы–функции вида

$$a(t) = \begin{pmatrix} 1 & \beta_-(t) \\ \alpha_+(t) & 1 + \beta_-(t)\alpha_+(t) \end{pmatrix}, \tag{7.1}$$

где $\beta_-(t) \in W_-$, $\alpha_+(t) \in W_+$. В частном случае, когда эти функции являются лорановскими многочленам был получен критерий существования канонической факторизации, однако метод работы [12] не позволял построить эту факторизацию.

В этом разделе мы покажем, что новый метод факторизации, основанный на индексах и существенных функциях, дает возможность явно построить каноническую факторизацию лорановского матричного многочлена

$$a_N(t) = \begin{pmatrix} 1 & \beta_-^{(N)}(t) \\ \alpha_+^{(N)}(t) & 1 + \beta_-^{(N)}(t)\alpha_+^{(N)}(t) \end{pmatrix}, \tag{7.2}$$

где $\beta_-^{(N)}(t)$, $\alpha_+^{(N)}(t)$ — лорановские многочлены степени не выше N для $\beta_-(t)$, $\alpha_+(t)$, соответственно:

$$\beta_-^{(N)}(t) = \beta_0 + \beta_{-1}t^{-1} + \ldots + \beta_{-N}t^{-N}, \qquad \alpha_+^{(N)}(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \ldots + \alpha_N t^N.$$

Факторизация $a_N(t)$ будет построена в терминах коэффициентов $\beta_-^{(N)}(t)$, $\alpha_+^{(N)}(t)$.

Найдя явно каноническую факторизацию $a_N(t)$, мы сможем получить эффективный признак существования канонической факторизации $a(t)$. Метод получения такого признака был предложен в работе [15]. В ней для практической реализации метода использовался разработанный авторами пакет ExactMPF, позволяющий строить с помощью точных (безошибочных) вычислений факторизацию матричных многочленов. Такой подход пригоден для получения факторизации конкретной матрицы-функции $a(t)$ и не годится для теоретического исследования задачи. В этом разделе мы устраним этот недостаток.

7.1. Каноническая факторизация $a_N(t)$. Введем необходимые для дальнейшего данные. Определим числовую матрицу $D_N = I_N + K_N$, где I_N — единичная матрица порядка N и K_N — произведение теплицевых матриц:

$$K_N = \begin{pmatrix} \alpha_N & \ldots & \alpha_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \alpha_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{-N} & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{-1} & \ldots & \beta_{-N} \end{pmatrix}.$$

Если матрица D_N обратима и $H_N = \left(h_{i,j}^{(N)}\right)_{i,j=0}^{N-1}$ — ее обратная матрица, то обозначим через $H_k^{(N)}$, $0 \leqslant k \leqslant N-1$, k-й столбец H_N и $H_k^{(N)}(t) = \sum\limits_{j=0}^{N-1} h_{jk}^{(N)} t^j$ — производящий многочлен этого столбца. Введем также $H_N^{(N)}(t) := t^N$ и $H_\alpha^{(N)}(t) := \sum\limits_{k=0}^{N} \alpha_k H_k^{(N)}(t)$. Напомним, что $\mathcal{P}_+$ — проектор из W на W_+ параллельно $(W_-)^0$, действующий по правилу:

$$\mathcal{P}_+\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k t^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k,$$

и $\mathcal{P}_- = \mathcal{I} - \mathcal{P}_+$ — дополнительный проектор.

Теорема 7.1. *Лорановский матричный многочлен $a_N(t)$ допускает каноническую факторизацию тогда и только тогда, когда матрица D_N обратима.*

Если это условие выполнено, то каноническая факторизация $a_N(t) = a_N^-(t)a_N^+(t)$, *нормированная условием* $a_N^-(\infty) = I_2$, *строится по следующим формулам:*

$$a_N^-(t) = \begin{pmatrix} 1 - \mathcal{P}_-\big(\beta_-^{(N)}(t)H_\alpha^{(N)}(t)\big) & \mathcal{P}_-\big(\beta_-^{(N)}(t)H_0^{(N)}(t)\big) \\ -\mathcal{P}_-\big(\beta_-^{(N)}(t)\alpha_+^{(N)}(t)H_\alpha^{(N)}(t)\big) & 1 + \mathcal{P}_-\big(\beta_-^{(N)}(t)\alpha_+^{(N)}(t)H_0^{(N)}(t)\big) \end{pmatrix},$$
$$a_N^+(t) = \begin{pmatrix} H_0^{(N)}(t) & \mathcal{P}_+\big(\beta_-^{(N)}(t)H_0^{(N)}(t)\big) \\ H_\alpha^{(N)}(t) & 1 + \mathcal{P}_+\big(\beta_-^{(N)}(t)H_\alpha^{(N)}(t)\big) \end{pmatrix}. \tag{7.3}$$

Доказательство. Существенные индексы для матрицы–функции $a_N(t)$ по теореме 6.1 совпадают с факторизационными индексами $a_N(t)$. Существенные индексы равны нулю тогда и только тогда, когда ядро теплицева оператора $T_0 := T_{a_N}$ тривиально. В самом деле, если существенные индексы равны нулю, то $a_N(t)$ допускает каноническую факторизацию, оператор T_0 обратим и его ядро тривиально.

С другой стороны, если $\ker T_0 = \{0\}$, то для существенных индексов μ_1, μ_2 имеем $\mu_2 \geqslant \mu_1 \geqslant 0$. Если предположить, что $\mu_1 > 0$, то $0 = \operatorname{ind}\det a_N(t) = \mu_1 + \mu_2 > 0$, что невозможно. Поэтому $\mu_1 = \mu_2 = 0$. Таким образом, тривиальность ядра оператора T_0 является критерием существования канонической факторизации $a_N(t)$.

Вектор–функция $x_+(t) = \big(x_1(t), x_2(t)\big)^T$, $x_1(t), x_2(t) \in W_+$, принадлежит ядру теплицева оператора T_0 тогда и только тогда, когда этот вектор является решением следующей операторной системы уравнений:

$$\begin{cases} x_1(t) + T_{\beta_-^{(N)}}x_2(t) = 0, \\ T_{\alpha_+^{(N)}}x_1(t) + (\mathcal{I} + T_{\beta_-^{(N)}\alpha_+^{(N)}})x_2(t) = 0. \end{cases}$$

Отсюда следует, что ядро оператора T_0 состоит из вектор–функций вида $x_+(t) = \big(-T_{\beta_-^{(N)}}x_2(t), x_2(t)\big)^T$, где $x_2(t)$ — произвольная функция из ядра оператора $\mathcal{D} = \mathcal{I} + \big(T_{\beta_-^{(N)}}T_{\alpha_+^{(N)}} - T_{\alpha_+^{(N)}}T_{\beta_-^{(N)}}\big)$. Это означает, что ядро T_0 тривиально тогда и только тогда, когда тривиально ядро $\mathcal{D}$.

Для нахождения ядра оператора $\mathcal{D}$ разобьем пространство W_+ в прямую сумму $W_+ = P_N W_+ \oplus Q_N W_+$, где P_N — проектор, действующий по правилу

$$P_N\left(\sum_{k=0}^{\infty} x_k t^k\right) = \sum_{k=0}^{N-1} x_k t^k,$$

и $Q_N = \mathcal{I} - P_N$ — дополнительный проектор. Легко видеть, что справедлива формула: $Q_N = T_{t^N}T_{t^{-N}}$.

Оператор $\mathcal{D}$ представим в виде операторной матрицы, соответствующей этому разложению пространства W_+:

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} P_N\mathcal{D}P_N|\operatorname{Im}P_N & P_N\mathcal{D}Q_N|\operatorname{Im}Q_N \\ Q_N\mathcal{D}P_N|\operatorname{Im}P_N & Q_N\mathcal{D}Q_N|\operatorname{Im}Q_N \end{pmatrix}.$$

Найдем элементы этой операторной матрицы, учитывая, что $\beta_-^{(N)}(t)$, $\alpha_+^{(N)}(t)$ — многочлены от t^{-1}, t, соответственно, степени не выше N

$$\begin{aligned} \mathcal{D}Q_N &= Q_N + \big(T_{\beta_-^{(N)}}T_{\alpha_+^{(N)}} - T_{\alpha_+^{(N)}}T_{\beta_-^{(N)}}\big)T_{t^N}T_{t^{-N}} \\ &= Q_N + \big(T_{\beta_-^{(N)}\alpha_+^{(N)}t^N} - T_{\alpha_+^{(N)}}T_{\beta_-^{(N)}t^N}\big)T_{t^{-N}} \\ &= Q_N + \big(T_{\beta_-^{(N)}\alpha_+^{(N)}t^N} - T_{\alpha_+^{(N)}\beta_-^{(N)}t^N}\big)T_{t^{-N}} = Q_N. \end{aligned}$$

Аналогично доказывается, что $Q_N\mathcal{D} = Q_N$. Отсюда следует, что

$$P_N\mathcal{D}Q_N = 0, \qquad Q_N\mathcal{D}P_N = 0, \qquad Q_N\mathcal{D}Q_N = Q_N.$$

Осталось найти $P_N\mathcal{D}P_N$

$$\begin{aligned} P_N\mathcal{D}P_N &= P_N + P_N\Big(T_{\beta_-^{(N)}}T_{\alpha_+^{(N)}} - T_{\alpha_+^{(N)}}T_{\beta_-^{(N)}}\Big)P_N \\ &= P_N + P_N\Big(T_{t^{-N}\alpha_+^{(N)}}T_{t^N\beta_-^{(N)}} - T_{t^{-N}\alpha_+^{(N)}}T_{t^N}T_{t^{-N}}T_{t^N\beta_-^{(N)}}\Big)P_N \\ &= P_N + P_NT_{t^{-N}\alpha_+^{(N)}}(\mathcal{I}-Q_N)T_{t^N\beta_-^{(N)}}P_N = P_N + P_NT_{t^{-N}\alpha_+^{(N)}}P_NT_{t^N\beta_-^{(N)}}P_N. \end{aligned}$$

Окончательно,

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} (P_N+\mathcal{K}_N)|\operatorname{Im}P_N & 0 \\ 0 & Q_N|\operatorname{Im}Q_N \end{pmatrix}, \tag{7.4}$$

где $\mathcal{K}_N = P_NT_{t^{-N}\alpha_+^{(N)}}P_NT_{t^N\beta_-^{(N)}}P_N$. Таким образом, $x_2(t) = P_Nx_2(t) + Q_Nx_2(t)$ принадлежит ядру оператора $\mathcal{D}$ тогда и только тогда, когда

$$(P_N+\mathcal{K}_N)P_Nx_2(t) = 0, \qquad Q_Nx_2(t) = 0.$$

В стандартном базисе оператор $(P_N+\mathcal{K}_N)|\operatorname{Im}P_N$ имеет матрицу $D_N = I_N + K_N$. Итак, мы получаем, что $x_2(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} x_kt^k$ принадлежит ядру $\mathcal{D}$ только в том случае, когда вектор $(x_0,\dots,x_{N-1})^T$ принадлежит ядру матрицы $D_N = I_N + K_N$ и $x_N = x_{N+1} = \ldots = 0$.

Это означает, что ядро $\mathcal{D}$ тривиально тогда и только тогда, когда матрица $D_N = I_N + K_N$ обратима. Критерий канонической факторизациии $a_N(t)$ получен.

Пусть матрица D_N обратима, тогда существенные индексы равны нулю, $\mu_1 = \mu_2 = 0$. Это означает, что существенные функции $R_1(t)$, $R_2(t)$ лежат в двумерном пространстве $\ker T_1 := \ker T_{t^{-1}a_N}$. Найдем базис этого пространства.

Если $R(t) = \big(r_1(t), r_2(t)\big)^T \in \ker T_1$, то $T_{a_N}R(t) \in \ker T_{t^{-1}I_2}$. Последнее ядро состоит из постоянных вектор–функций. Таким образом,

$$\begin{cases} r_1(t) + T_{\beta_-^{(N)}}r_2(t) = u_1, \\ T_{\alpha_+^{(N)}}r_1(t) + (\mathcal{I} + T_{\beta_-^{(N)}\alpha_+^{(N)}})r_2(t) = u_2, \end{cases}$$

где $u_1, u_2 \in \mathbb{C}$. Тогда $R(t) = \big(u_1 - T_{\beta_-^{(N)}}r_2(t), r_2(t)\big)^T$, где $r_2(t)$ — решение операторного уравнения $\mathcal{D}r_2(t) = u_2 - T_{\alpha_+^{(N)}}u_1$, т.е.

$$\big[\mathcal{I} + \big(T_{\beta_-^{(N)}}T_{\alpha_+^{(N)}} - T_{\alpha_+^{(N)}}T_{\beta_-^{(N)}}\big)\big]r_2(t) = u_2 - u_1\alpha_+^{(N)}(t).$$

Учитывая формулу (7.4), получаем

$$(P_N+\mathcal{K}_N)P_Nr_2(t) = u_2 - u_1P_N\alpha_+^{(N)}(t), \qquad Q_Nr_2(t) = Q_N(u_2 - u_1\alpha_+^{(N)}(t)) = -u_1\alpha_Nt^N.$$

Таким образом, для нахождения коэффициентов Фурье $r_k^{(2)}$ функции $r_2(t)$ получаем систему

$$\begin{cases} D_N\begin{pmatrix} r_0^{(2)} \\ \vdots \\ r_{N-1}^{(2)} \end{pmatrix} = u_2\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} - u_1\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_{N-1} \end{pmatrix}, \\ r_N^{(2)} = -u_1\alpha_N, \\ r_k^{(2)} = 0, k > N. \end{cases}$$

Если H_N — обратная матрица к D_N, то

$$\begin{pmatrix} r_0^{(2)} \\ \vdots \\ r_{N-1}^{(2)} \end{pmatrix} = u_2 H_N \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} - u_1 H_N \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_{N-1} \end{pmatrix},$$

и мы получаем

$$\begin{cases} P_N r_2(t) = u_2 H_0^{(N)}(t) - u_1 \sum\limits_{k=0}^{N-1} \alpha_k H_k^{(N)}(t), \\ Q_N r_2(t) = -u_1 \alpha_N t^N. \end{cases}$$

Напомним, что здесь $H_k^{(N)}(t)$ — производящий многочлен k-го столбца матрицы H_N. Окончательно, мы приходим к выражению для $r_2(t)$:

$$r_2(t) = P_N r_2(t) + Q_N r_2(t) = u_2 H_0^{(N)}(t) - u_1 H_\alpha^{(N)}(t),$$

где $H_\alpha^{(N)}(t) = \sum\limits_{k=0}^{N} \alpha_k H_k^{(N)}(t)$. Значит,

$$r_1(t) = u_1\big(1 + T_{\beta_-^{(N)}} H_\alpha^{(N)}(t)\big) - u_2 T_{\beta_-^{(N)}} H_0^{(N)}(t).$$

Таким образом, произвольная вектор–функция из $\ker T_1$ представляется в виде:

$$R(t) = u_1 \begin{pmatrix} 1 + T_{\beta_-^{(N)}} H_\alpha^{(N)}(t) \\ -H_\alpha^{(N)}(t) \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} -T_{\beta_-^{(N)}} H_0^{(N)}(t) \\ H_0^{(N)}(t) \end{pmatrix}.$$

Вектор–функции

$$R_1(t) = \begin{pmatrix} 1 + \mathcal{P}_+ \beta_-^{(N)} H_\alpha^{(N)}(t) \\ -H_\alpha^{(N)}(t) \end{pmatrix}, \qquad R_2(t) = \begin{pmatrix} -\mathcal{P}_+ \beta_-^{(N)} H_0^{(N)}(t) \\ H_0^{(N)}(t) \end{pmatrix}$$

образуют базис пространства $\ker T_1$, т.е. являются существенными вектор–функциями $a_N(t)$.

По теореме 6.1 тогда получаем

$$\big(a_N^+(t)\big)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 + \mathcal{P}_+ \beta_-^{(N)}(t) H_\alpha^{(N)}(t) & -\mathcal{P}_+ \beta_-^{(N)}(t) H_0^{(N)}(t) \\ -H_\alpha^{(N)}(t) & H_0^{(N)}(t) \end{pmatrix}.$$

Фактор

$$a_N^-(t) = \begin{pmatrix} a_{11}^-(t) & a_{12}^-(t) \\ a_{21}^-(t) & a_{22}^-(t) \end{pmatrix}$$

найдем из равенства $a_N^-(t) = a_N(t)\big(a_N^+(t)\big)^{-1}$. Тогда

$$\begin{aligned}
a_{11}^-(t) &= 1 + \mathcal{P}_+ \beta_-^{(N)}(t) H_\alpha^{(N)}(t) - \beta_-^{(N)}(t) H_\alpha^{(N)}(t) \\
&= 1 - \mathcal{P}_- \beta_-^{(N)}(t) H_\alpha^{(N)}(t) \in W_-, \qquad a_{11}^-(\infty) = 1, \\
a_{12}^-(t) &= \beta_-^{(N)}(t) H_0^{(N)}(t) - \mathcal{P}_+ \beta_-^{(N)}(t) H_0^{(N)}(t) = \mathcal{P}_- \beta_-^{(N)}(t) H_0^{(N)}(t) \in W_-, \qquad a_{12}^-(\infty) = 0, \\
a_{21}^-(t) &= (\mathcal{P}_+ + \mathcal{P}_-)\big[\alpha_+^{(N)}(t) + \alpha_+^{(N)}(t) T_{\beta_-^{(N)}} H_\alpha^{(N)}(t) - H_\alpha^{(N)}(t) - \alpha_+^{(N)}(t) \beta_-^{(N)}(t) H_\alpha^{(N)}(t)\big] \\
&= \alpha_+^{(N)}(t) - \big[\mathcal{I} + T_{\beta_-^{(N)}} T_{\alpha_+^{(N)}} - T_{\alpha_+^{(N)}} T_{\beta_-^{(N)}}\big] H_\alpha^{(N)}(t) - \mathcal{P}_- \alpha_+^{(N)}(t) \beta_-^{(N)}(t) H_\alpha^{(N)}(t) \\
&= \alpha_+^{(N)}(t) - \mathcal{D} H_\alpha^{(N)}(t) - \mathcal{P}_- \alpha_+^{(N)}(t) \beta_-^{(N)}(t) H_\alpha^{(N)}(t) \\
&= -\mathcal{P}_- \alpha_+^{(N)}(t) \beta_-^{(N)}(t) H_\alpha^{(N)}(t) \in W_-, \qquad a_{21}^-(\infty) = 0.
\end{aligned}$$

Здесь мы учли, что $\mathcal{D}H_\alpha^{(N)}(t) = \sum\limits_{k=0}^{N} \alpha_k \mathcal{D}H_k^{(N)}(t)$, а поскольку из формулы (7.4) легко следует, что $\mathcal{D}H_k^{(N)}(t) = t^k$, имеем $\mathcal{D}H_\alpha^{(N)}(t) = \alpha_+^{(N)}(t)$. Аналогичные выкладки проводятся для элемента $a_{22}^-(t)$:

$$\begin{aligned} a_{22}^-(t) &= (\mathcal{P}_+ + \mathcal{P}_-)\big[H_0^{(N)}(t) + \alpha_+^{(N)}(t)\beta_-^{(N)}(t)H_0^{(N)}(t) - \alpha_+^{(N)}(t)T_{\beta_-^{(N)}}H_0^{(N)}(t)\big] \\ &= \big[\mathcal{I} + T_{\beta_-^{(N)}}T_{\alpha_+^{(N)}} - T_{\alpha_+^{(N)}}T_{\beta_-^{(N)}}\big]H_0^{(N)}(t) + \mathcal{P}_-\alpha_+^{(N)}(t)\beta_-^{(N)}(t)H_0^{(N)}(t) \\ &= \mathcal{D}H_0^{(N)}(t) + \mathcal{P}_-\alpha_+^{(N)}(t)\beta_-^{(N)}(t)H_0^{(N)}(t) = 1 + \mathcal{P}_-\alpha_+^{(N)}(t)\beta_-^{(N)}(t)H_0^{(N)}(t) \in W_-, \\ a_{22}^-(\infty) &= 1. \end{aligned}$$

Итак, мы получили следующий результат:

$$a_N^-(t) = \begin{pmatrix} 1 - \mathcal{P}_-\beta_-^{(N)}(t)H_\alpha^{(N)}(t) & \mathcal{P}_-\beta_-^{(N)}(t)H_0^{(N)}(t) \\ -\mathcal{P}_-\alpha_+^{(N)}(t)\beta_-^{(N)}(t)H_\alpha^{(N)}(t) & 1 + \mathcal{P}_-\alpha_+^{(N)}(t)\beta_-^{(N)}(t)H_0^{(N)}(t) \end{pmatrix} \in W_-^{2\times 2},$$

причем, $\det a_N^-(\infty) = 1$. Поскольку $\det a_N^-(t) = \text{const}$, то $\det a_N^-(t) = 1$, а значит и $\det a_N^+(t) = 1$. Тогда

$$a_N^+(t) = \begin{pmatrix} H_0^{(N)}(t) & \mathcal{P}_+\beta_-^{(N)}(t)H_0^{(N)}(t) \\ H_\alpha^{(N)}(t) & 1 + \mathcal{P}_+\beta_-^{(N)}(t)H_\alpha^{(N)}(t) \end{pmatrix}.$$

Теорема полностью доказана. □

Приведем пример применения данной теоремы.

Пример 7.1. *Рассмотрим лорановский матричный многочлен*

$$a_3(t) = \begin{pmatrix} 1 & \beta_-^{(3)}(t) \\ \alpha_+^{(3)}(t) & 1 + \beta_-^{(3)}(t)\alpha_+^{(3)}(t) \end{pmatrix},$$

где $N = 3$ *и*

$$\alpha_+^{(3)}(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!}, \qquad \beta_-^{(3)}(t) = 1 + \frac{1}{2t} + \frac{1}{2^2 2! t^2} + \frac{1}{2^3 3! t^3}.$$

Здесь в качестве $\alpha_+^{(3)}(t)$, $\beta_-^{(3)}(t)$ *взяты лорановские многочлены функций* $\alpha_+(t) = e^t$, $\beta_-(t) = e^{1/2t}$, *соответственно. Все дальнейшие вычисления проводились в точной арифметике с использованием CAS Maple.*

Поскольку матрица

$$D_3 = I_3 + K_3 = \begin{pmatrix} \frac{451}{288} & \frac{13}{96} & \frac{1}{48} \\ \frac{13}{48} & \frac{307}{288} & \frac{1}{96} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{48} & \frac{289}{288} \end{pmatrix}$$

обратима, тогда $a_3(t)$ *допускает каноническую факторизацию. Чтобы не загромождать изложение, ограничимся нахождением только фактора* $a_3^+(t)$.

Найдем $H_3 = D_3^{-1}$ *и выпишем производящие многочлены для столбцов этой матрицы*

$$H_0^{(3)}(t) = \frac{5109408}{7817645} - \frac{1294272}{7817645}t - \frac{79488}{1563529}t^2,$$
$$H_1^{(3)}(t) = -\frac{647136}{7817645} + \frac{7499232}{7817645}t - \frac{101952}{7817645}t^2,$$
$$H_2^{(3)}(t) = -\frac{19872}{1563529} - \frac{50976}{7817645}t + \frac{7799904}{7817645}t^2.$$

По определению

$$H_3^{(3)}(t) = t^3, \qquad H_\alpha^{(3)}(t) = H_0^{(3)}(t) + H_1^{(3)}(t) + \frac{1}{2}H_2^{(3)}(t) + \frac{1}{6}H_3^{(3)}(t).$$

Находим $H_\alpha^{(3)}(t)$

$$H_\alpha^{(3)}(t) = \frac{4412592}{7817645} + \frac{6179472}{7817645}t + \frac{680112}{1563529}t^2 + \frac{1}{6}t^3.$$

Вычислим $\beta_-^{(3)}(t)H_0^{(3)}(t)$, $\beta_-^{(3)}(t)H_\alpha^{(3)}(t)$, *и в полученных лорановских многочленах выберем только слагаемые с неотрицательными степенями* t

$$\mathcal{P}_+\big(\beta_-^{(3)}(t)H_0^{(3)}(t)\big) = \frac{4412592}{7817645} - \frac{1492992}{7817645}t - \frac{79488}{1563529}t^2,$$
$$1 + \mathcal{P}_+\big(\beta_-^{(3)}(t)H_\alpha^{(3)}(t)\big) = \frac{4542390029}{2251481760} + \frac{386045741}{375246960}t + \frac{9724873}{18762348}t^2 + \frac{1}{6}t^3.$$

Мы нашли все элементы матричного многочлена $a_3^+(t)$: $H_0^{(3)}(t)$, $\mathcal{P}_+\big(\beta_-^{(3)}(t)H_0^{(3)}(t)\big)$, $H_\alpha^{(3)}(t)$, $1 + \mathcal{P}_+\big(\beta_-^{(3)}(t)H_\alpha^{(3)}(t)\big)$.

Замечание 7.1. *Факторизация* $a_3(t)$ *проверена с помощью пакета* ExactMPF [14]. *После нормировки факторизации, возвращаемой* ExactMPF, *получаем такой же результат, как в примере 7.1.*

Замечание 7.2. *Имеет смысл сравнить факторизации* $a_N(t)$, *которые строятся с помощью пакета* ExactMPF *и по явным формулам (7.3). Пакет* ExactMPF *универсален, он может строить факторизацию матричных многочленов не только вида* $a_N(t)$. *Однако, алгоритм, по которому работает пакет, основан на понятиях индексов и существенных многочленов некоторой конечной последовательности числовых матриц* [1], [13]. *Поэтому его можно применять только для построения факторизации матрицы-функции* $a_N(t)$, *в которой многочлены* $\alpha_+(t)$, $\beta_-(t)$ *имеют числовые коэффициенты. Метод индексов и существенных функций, предложенный в данной работе, позволяет построить факторизацию для случая, когда* $\alpha_+(t)$, $\beta_-(t)$ *имеют символьные коэффициенты. Это очень важно для проведения теоретического исследования задачи. Кроме того, данный метод экономичен – факторизация строится в терминах обратной к одной явно заданной матрице.*

7.2. Асимптотика норм $a_\pm^{(N)}(t)$**.** Для получения эффективного условия канонической факторизации $a(t)$ нам потребуются оценки норм $a_\pm^{(N)}(t)$.

Для нормы матрицы–функции $A(t) = (a_{ij}) \in W^{p\times p}$ справедлива оценка

$$\|A(t)\|_W \leqslant \sum_{i,j} \|a_{ij}\|_W.$$

Результаты, полученные при использовании этой оценки, будут справедливы как для нормы $\|\cdot\|_{W,1}$, так и для $\|\cdot\|_{W,\infty}$. Нам также потребуются очевидные оценки

$$\|\beta_-^{(N)}(t)\|_W \leqslant \|\beta_-(t)\|_W, \qquad \|\alpha_+^{(N)}(t)\|_W \leqslant \|\alpha_+(t)\|_W.$$

Далее $\|\cdot\|_W$ означает $\|\cdot\|_{W,1}$.

Поскольку $a_N^-(\infty) = I_2$, имеем

$$\|a_N^-(t)\|_W = 1 + \|a_N^-(t) - I_2\|_W.$$

Из формулы (7.3) следует:

$$\begin{aligned}\|a_N^-(t) - I_2\|_W \leqslant &\|\beta_-(t)\|_W \big(\|H_\alpha^{(N)}(t)\|_W + \|H_0^{(N)}(t)\|_W\big) \\ &+ \|\beta_-(t)\|_W \|\alpha_+(t)\|_W \big(\|H_\alpha^{(N)}(t)\|_W + \|H_0^{(N)}(t)\|_W\big) \\ = &\|\beta_-(t)\|_W \big(1 + \|\alpha_+(t)\|_W\big)\big(\|H_\alpha^{(N)}(t)\|_W + \|H_0^{(N)}(t)\|_W\big).\end{aligned}$$

Обозначим $\|\cdot\|_1$ — гельдеровскую норму для вектора и максимальную столбцовую норму для матриц. Тогда

$$\|H_0^{(N)}(t)\|_W = \|H_0^{(N)}\|_1 \leqslant \|H_N\|_1$$

и

$$\begin{aligned}\|H_\alpha^{(N)}(t)\|_W &\leqslant \sum_{k=0}^{N-1} |\alpha_k| \|H_k^{(N)}\|_1 + |\alpha_N| \\ &\leqslant \Big(\sum_{k=0}^{N-1} |\alpha_k|\Big)\|H_N\|_1 + |\alpha_N| \leqslant \|\alpha_+(t)\|_W \max\{\|H_N\|_1, 1\}.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\|H_\alpha^{(N)}(t)\|_W + \|H_0^{(N)}(t)\|_W \leqslant \big(1 + \|\alpha_+(t)\|\big)_W \max\{\|H_N\|_1, 1\}$$

и, окончательно,

$$\|a_N^-(t)\|_W \leqslant 1 + \|\beta_-(t)\|_W \big(1 + \|\alpha_+(t)\|_W\big)^2 \max\{\|H_N\|_1, 1\}. \tag{7.5}$$

Аналогичным образом мы можем получить оценку

$$\|a_N^+(t)\|_W \leqslant 1 + \big(1 + \|\beta_-(t)\|_W\big)\big(1 + \|\alpha_+(t)\|_W\big) \max\{\|H_N\|_1, 1\}. \tag{7.6}$$

Итак, мы получили асимптотику $\|a_N^\pm(t)\|_W = \mathrm{O}(\max\{\|H_N\|_1, 1\})$ при $N \to \infty$.

7.3. Эффективный признак канонической факторизации $a(t)$. Теперь, опираясь на результаты работы [15], мы можем получить эффективный признак канонической факторизации $a(t)$.

Аппроксимируем матрицу–функцию $a(t)$ лораповским матричным многочленом $a_N(t)$. Обозначим $\delta_N = \|a(t) - a_N(t)\|_W$. Эффективные оценки величины δ_N приведены в [15].

Теорема 7.2. *Если существует такой номер N, что выполняются условия*

1. *матрица D_N обратима,*
2. *справедливо неравенство*

$$\begin{aligned}q_N := &\big[1 + \|\beta_-(t)\|_W \big(1 + \|\alpha_+(t)\|_W\big)^2 \max\{\|H_N\|_1, 1\}\big] \\ &\cdot \big[1 + \big(1 + \|\beta_-(t)\|_W\big)\big(1 + \|\alpha_+(t)\|_W\big) \max\{\|H_N\|_1, 1\}\big]\delta_N < 1,\end{aligned}$$

то $a(t)$ допускает каноническую факторизацию. Здесь $H_N = D_N^{-1}$.

Доказательство. Применим теорему 4.2 из работы [15]. Из условия 1) следует существование канонической факторизации $a_N(t) = a_N^-(t)a_N^+(t)$, т.е. первое условие теоремы 4.2 выполнено. Для проверки второго условия этой теоремы нам потребуются оценки норм $\|(a_N^\pm)^{-1}(t)\|_{W,1}$. Поскольку $\det a_N^\pm(t) = 1$, эти нормы совпадают с

$$\|(a_N^\pm)^\#(t)\|_{W,1} = \|a_N^\pm(t)\|_{W,\infty}.$$

Здесь $(a_N^{\pm})^{\#}(t)$ — присоединенная к $a_N^{\pm}(t)$ матрица–функция. Как отмечалось, оценки (7.5), (7.6) справедливы как для $\|\cdot\|_{W,1}$, так и для $\|\cdot\|_{W,\infty}$. Поэтому, если выполняется условие 2) данной теоремы, то выполняется и второе условие теоремы 4.2. Из этой теоремы следует, что $a(t)$ допускает каноническую факторизацию. □

Заметим, что $a(t) \approx a_N^-(t)a_N^+(t)$ — приближенная факторизация $a(t)$. В работе [15] приведены эффективные оценки погрешности этой факторизации.

Вышеприведенный признак можно сформулировать не обращаясь к факторизации $a_N(t)$, а используя только коэффициенты функций $\alpha_+(t)$, $\beta_-(t)$.

Следствие 7.1. *Если существует такой номер N_0, что*

1. *матрица D_N обратима при $N \geqslant N_0$,*
2. $\sup\limits_{N\geqslant N_0} \|D_N^{-1}\| < \infty$,

то $a(t)$ допускает каноническую факторизацию. Здесь $\|\cdot\|$ — любая матричная норма.

Доказательство. Поскольку $\delta_N \to 0$ при $N \to \infty$, а последовательность $\{\|H_N\|\}_{N\geqslant N_0}$ ограничена, то величина q_N может быть сделана меньше любого наперед заданного числа. Условие 2) предыдущей теоремы выполняется и $a(t)$ допускает каноническую факторизацию. □

В заключение рассмотрим пример.

Пример 7.2. *Пусть*

$$a(t) = \begin{pmatrix} 1 & e^{\frac{1}{2t}} \\ e^t & 1 + e^{t+\frac{1}{2}t} \end{pmatrix}.$$

В этом примере

$$\|\alpha_+\|_W = \|e^t\|_W = e, \qquad \|\beta_-\|_W = \|e^{\frac{1}{2}t}\|_W = e^{\frac{1}{2}}.$$

Оценим $\|a - a_N\|_W$:

$$\begin{aligned} \|a - a_N\|_W &\leqslant \|\alpha_+ - \alpha_+^{(N)}\|_W + \|\beta_- - \beta_-^{(N)}\|_W + \|\alpha_+\beta_- - \alpha_+^{(N)}\beta_-^{(N)}\|_W \\ &\leqslant (1 + \|\alpha_+\|_W)\|\beta_- - \beta_-^{(N)}\|_W + (1 + \|\beta_-\|_W)\|\alpha_+ - \alpha_+^{(N)}\|_W. \end{aligned}$$

Осталось оценить $\|\alpha_+ - \alpha_+^{(N)}\|_W$, $\|\beta_- - \beta_-^{(N)}\|_W$

$$\|\alpha_+ - \alpha_+^{(N)}\|_W = \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k!} \leqslant \frac{1}{(N+1)!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(N+2)^k} \leqslant \frac{N+2}{(N+1)(N+1)!}.$$

Аналогично,

$$\|\beta_- - \beta_-^{(N)}\|_W \leqslant \frac{N+2}{2^N(2N+3)(N+1)!}.$$

Окончательно получаем нужную оценку:

$$\delta_N := \|a - a_N\|_W \leqslant (1+e)\frac{N+2}{2^N(2N+3)(N+1)!} + (1+e^{\frac{1}{2}})\frac{N+2}{(N+1)(N+1)!}.$$

Для q_N имеем теперь выражение:

$$q_N := \left[1 + e^{\frac{1}{2}}(1+e)^2 \max\{\|H_N\|_1, 1\}\right]\left[1 + (1+e^{\frac{1}{2}})(1+e)\right) \max\{\|H_N\|_1, 1\}]\delta_N.$$

Дальнейшие вычисления проведем с помощью CAS Maple и результаты сведем в следующую таблицу

Таблица 1.

N	2	3	4	5	6	7	8
δ_N	0.67713	0.14871	0.027543	0.0043788	0.00060676	0.000074285	0.0000081312
$\det D_N$	1.6289	1.6363	1.6364	1.6364	1.6364	1.6364	1.6364
$\|H_N\|$	1.0359	1.0550	1.0590	1.0597	1.0598	1.0598	1.0598
$\|a_N^-\|_W$	24.614	25.050	25.139	25.156	25.159	25.159	25.159
$\|a_N^+\|_W$	11.202	11.391	11.429	11.437	11.438	11.438	11.438
q_N	186.72	42.436	7.9144	1.2598	0.17461	0.021378	0.0023401

Для параметров δ_N, $\|a_N^{\pm}\|_W$ в таблице приведены их оценки. Все значения указаны с 5 значащими цифрами.

Все величины, приведенные в таблице, показывают тенденцию к стабилизации. Для всех $N = 2, \ldots, 8$ определитель $D_N \neq 0$, что, в соответствии с критерием канонической факторизации, означает, что $a_N(t)$, $N = 2, \ldots, 8$, допускает каноническую факторизацию. Параметр q_N становится меньше 1, начиная с $N = 6$. Это означает, что матрица–функция $a(t)$ допускает каноническую факторизацию.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. В.М. Адуков. *О факторизации аналитических матриц–функций* // Теор. мат. физ. **118**:3, 324–336 (1999).
2. Н.П. Векуа. *Системы сингулярных интегральных уравнений*. М.: Наука. 1970.
3. В.В. Воеводин, Ю.А. Кузнецов. *Матрицы и вычисления*. М.: Наука. 1984.
4. И.Ц. Гохберг, Н.Я. Крупник. *Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов*. Кишинев: Штиинца. 1973.
5. И.Ц. Гохберг. *Задача факторизации в нормированных кольцах, функции от изометрических и симметрических операторов и сингулярные интегральные уравнения* // Усп. мат. наук **19**:1(115), 71–124 (1964).
6. И.Ц. Гохберг, М.Г. Крейн. *Системы интегральных уравнений на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов* // Усп. мат. наук **13**:2(80), 3–72 (1958).
7. И.Ц. Гохберг, И.А. Фельдман. *Уравнения в свертках и проекционные методы их решения*. М.: Наука. 1974.
8. А.А. Кириллов, А.Д. Гвишиани. *Теоремы и задачи из функционального анализа*. М.: Наука. 1979.
9. Н.И. Мусхелишвили. *Сингулярные интегральные уравнения*. М.: Наука. 1968.
10. Л.А. Тахтаджан, Л.Д. Фаддеев. *Гамильтонов подход в теории солитонов*. М.: Наука. 1986.
11. I.D. Abrahams. *On the application of the Wiener — Hopf technique to problems in dynamic elasticity* // Wave Motion **36**:4, 311–333 (2002).
12. V.M. Adukov. *On factorization indices of strictly nonsingular 2×2 matrix function* // Integral Equations Oper. Theory **21**:1, 1–11 (1995).
13. V.M. Adukov. *Generalized inversion of block Toeplitz matrices* // Linear Algebra Appl. **274**, 85–124 (1998).
14. V.M. Adukov, N.V. Adukova, G. Mishuris. *An explicit Wiener — Hopf factorisation algorithm for matrix polynomials and its exact realizations within ExactMPF package* // Proc. R. Soc. Lond., A, Math. Phys. Eng. Sci. **478**:2263, 20210941 (2022).
15. N.A. Adukova, V.M. Adukov, G. Mishuris. *An effective criterion for a stable factorisation of a strictly nonsingular 2×2 matrix functions: use of the ExactMPF package* // Proc. R. Soc. Lond., A, Math. Phys. Eng. Sci. **480**:2299, 20249116 (2024).

16. V.G. Daniele, R.S. Zich. *The Wiener — Hopf Method in Electromagnetics.* SciTech Publishing, Edison, NJ (2014).
17. V.G. Daniele, G. Lombardi. *Scattering and diffraction by wedges 1: the Wiener — Hopf solution. Theory.* ISTE, London; John Wiley & Sons, Hoboken, New York (2020).
18. I.C. Gohberg, M.A. Kaashoek, I.M. Spitkovsky. *An overview of matrix factorization theory and operator applications* // in "Factorization and integrable systems", Birkhäuser, Basel **141**, 1–102 (2003).
19. A. Kisil, G. Mishuris. *Special issue: advances in Wiener — Hopf techniques: theory and applications* // Proc. R. Soc. Lond., A, Math. Phys. Eng. Sci. **479**:2273, 20230210 (2023).
20. G.S. Litvinchuk, I.M. Spitkovsky. *Factorization of measurable matrix functions.* Birkhäuser, Basel–Boston (1987).

Виктор Михайлович Адуков,
Институт естественных и точных наук,
Южно–Уральский государственный университет,
проспект Ленина, 76,
454080, г. Челябинск, Россия
E-mail: adukovvm@susu.ru