УДК 517.9

ВОЗМУЩЕННЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ХИЛЬФЕРА

В.Е. ФЕДОРОВ, А.А. БЫКОВ

Аннотация. Вопросы однозначной разрешимости задачи типа Коши исследуются для линейных уравнений в банаховом пространстве с дробной производной Хильфера, с оператором, порождающим сильно непрерывное разрешающее семейство, и с ограниченным возмущающим оператором, постоянным или зависящим от времени. Показано, что добавление постоянного ограниченного оператора не выводит за класс генераторов сильно непрерывных разрешающих семейств операторов. На основе техники доказательства этого результата показано существование единственного решения задачи типа Коши для уравнения с нестационарным возмущающим оператором. Абстрактные результаты использованы при изучении однозначной разрешимости начально–краевой задачи с периодическими условиями по пространственной переменной для уравнения с дробной производной Хильфера по времени и с оператором Лапласа, возмущенным нестационарным линейным интегральным оператором.

Ключевые слова: дробная производная Хильфера, разрешающее семейство операторов, теорема о возмущении, нестационарное возмущение, начально-краевая задача.

Mathematics Subject Classification: 34G10, 35R11.

1. Введение

Дифференциальные уравнения с дробными производными в последние десятилетия являются объектом активных теоретических исследований [9], [8] и часто используются при математическом моделировании в прикладных задачах [2], [10], [11], [12]. Интерес к исследованию уравнений с дробной производной Хильфера $D^{\alpha,\beta}z = J^{\beta(m-\alpha)}D^m J^{(1-\beta)(m-\alpha)}z$ [7] обусловлен тем, что класс этих производных включает в себя дробные производные Герасимова — Капуто (при $\beta = 1$) и Римана — Лиувилля (при $\beta = 0$), наиболее часто используемые в математических моделях. Ранее для уравнений в банаховых пространствах

$$D^{\alpha,\beta}z(t) = Az(t), \qquad t \in \mathbb{R}_+, \tag{1.1}$$

получены необходимые и достаточные условия для существования сильно непрерывных [4] и аналитических [5] разрешающих семейств операторов в терминах резольвенты линейного замкнутого плотно определенного в банаховом пространстве $\mathcal{Z}$ оператора A. В работе [5] получена теорема о возмущении, дающая достаточные условия на возмущающий линейный оператор B для того, чтобы из порождения оператором A аналитического разрешающего семейства операторов следовало порождение оператором $A + B$ такого семейства. Этой теореме о возмущении удовлетворяет любой ограниченный оператор B.

В настоящей работе исследуются вопросы разрешимости уравнения

$$D^{\alpha,\beta}z(t) = Az(t) + Bz(t), \qquad t \in \mathbb{R}_+,$$

V.E. Fedorov, A.A. Bykov, Perturbed linear equations with Hilfer fractional derivative.

© Федоров В.Е., Быков А.А. 2026.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-11-20002, https://rscf.ru/project/24-11-20002/ и поддержано Правительством Челябинской области.

Поступила 28 февраля 2026 г.

с оператором A, порождающим сильно непрерывное разрешающее семейство операторов. Сначала показано, что добавление к такому оператору A ограниченного оператора B дает оператор $A+B$, также порождающий сильно непрерывное разрешающее семейство. Затем рассмотрен случай оператора $B = B(t)$, зависящего от t и ограниченного при каждом t, и получены результаты о разрешимости однородного и неоднородного уравнений

$$D^{\alpha,\beta}z(t) = Az(t) + B(t)z(t), \qquad D^{\alpha,\beta}z(t) = Az(t) + B(t)z(t) + f(t).$$

В §2 введены предварительные сведения, определен класс операторов $\mathcal{C}_{\alpha,\beta}$. Приведена теорема о необходимости и достаточности включения $A \in \mathcal{C}_{\alpha,\beta}$ для существования сильно непрерывного разрешающего семейства операторов уравнения (1.1). В §3 получена теорема о разрешимости линейного неоднородного уравнения $D^{\alpha,\beta}z(t) = Az(t) + f(t)$ в случае $A \in \mathcal{C}_{\alpha,\beta}$ при более общих, чем в работе [4], условиях на функцию f, допускающих наличие у нее степенной особенности в нуле. В §4 получена теорема о возмущении оператора $A \in \mathcal{C}_{\alpha,\beta}$: доказано, что из включений $A \in \mathcal{C}_{\alpha,\beta}$, $B \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$ следует, что $A + B \in \mathcal{C}_{\alpha,\beta}$. §5 содержит теорему о разрешимости уравнения с производной Хильфера и нестационарным оператором возмущения $B = B(t)$. В последнем параграфе полученные результаты используются для доказательства однозначной разрешимости одной начально-краевой задачи для уравнения в частных производных с дробной производной по времени.

2. Сильно непрерывные и аналитические разрешающие семейства операторов

Пусть $\mathcal{Z}$ — банахово пространство, $h \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;\mathcal{Z})$. Дробным интегралом Римана — Лиувилля порядка $\beta > 0$ для функции h называется

$$J^\beta h(t) := \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int\limits_0^t (t-s)^{\beta-1}h(s)ds, \qquad t > 0.$$

Дробная производная Римана — Лиувилля порядка α имеет вид $D^\alpha h(t) := D^m J^{m-\alpha}h(t)$, где $m-1 < \alpha \leqslant m \in \mathbb{N}$, D^m — оператор дифференцирования целого порядка m. При $\alpha > 0$ будем использовать обозначение $J^\alpha h(t) = D^{-\alpha}h(t)$.

Обозначим

$$D^\gamma h(0) := \lim_{t\to 0+} D^\gamma h(t), \qquad \gamma \in \mathbb{R}.$$

Производную Хильфера порядка $\alpha \in (m-1, m]$, $m \in \mathbb{Z}$, и типа $\beta \in [0,1]$ определим как

$$\begin{aligned} D^{\alpha,\beta}h(t) &= D^{m-\beta(m-\alpha)}\left(J^{(1-\beta)(m-\alpha)}h(t) - \sum_{k=0}^{m-1} D^{k-(1-\beta)(m-\alpha)}h(0)\frac{t^k}{k!}\right) \\ &= D^m\left(J^{m-\alpha}h(t) - \sum_{k=0}^{m-1}\frac{D^{k-(1-\beta)(m-\alpha)}h(0)t^{k+\beta(m-\alpha)}}{\Gamma(k+\beta(m-\alpha)+1)}\right). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Для достаточно гладкого h равенство (2.1) влечет стандартную форму производной Хильфера [7, с. 113]

$$D^{\alpha,\beta}h(t) = J^{\beta(m-\alpha)}D^m J^{(1-\beta)(m-\alpha)}h(t).$$

Замечание 2.1. *Понятно, что при $\beta = 0$ дробная производная Хильфера совпадает с дробной производной Римана — Лиувилля, а при $\beta = 1$ — с дробной производной Герасимова — Капуто.*

Замечание 2.2. *При $\alpha = m$ имеем $D^{\alpha,\beta} = D^{m,\beta} = D^m$ при любом $\beta \in [0,1]$.*

Преобразование Лапласа для функции $h : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{Z}$ обозначим через $\mathfrak{L}[h]$. Далее всюду будем использовать обозначение $\overline{\mathbb{R}}_+ := \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ и главную ветвь степенной функции комплексного переменного.

Лемма 2.1 ([5]). *Пусть $m-1 < \alpha \leqslant m \in \mathbb{N}$, $\beta \in [0,1]$, для $h : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{Z}$ существуют $\mathfrak{L}[h]$, $D^{\alpha,\beta}h$, $\mathfrak{L}[D^{\alpha,\beta}h]$. Тогда*

$$\mathfrak{L}[D^{\alpha,\beta}h](\lambda) = \lambda^\alpha \mathfrak{L}[h](\lambda) - \sum_{k=0}^{m-1} D^{k-(1-\beta)(m-\alpha)}h(0)\lambda^{m-1-k-\beta(m-\alpha)}.$$

Символом $\mathcal{L}(\mathcal{Z})$ будем обозначать банахово пространство всех линейных ограниченных операторов на пространстве $\mathcal{Z}$, а через $\mathcal{C}l(\mathcal{Z})$ — множество всех линейных замкнутых операторов, плотно определенных в пространстве $\mathcal{Z}$ и действующих в это пространство. Снабдим область определения D_A оператора $A \in \mathcal{C}l(\mathcal{Z})$ его нормой графика $\|\cdot\|_{D_A} := \|\cdot\|_{\mathcal{Z}} + \|A\cdot\|_{\mathcal{Z}}$ и получим тем самым банахово пространство D_A.

Через $AC^m(\mathbb{R}_+;\mathcal{Z})$ обозначим множество всех функций $h \in C^{m-1}(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathcal{Z})$, имеющих абсолютно непрерывную на каждом отрезке $[t_0,T] \subset \mathbb{R}_+$ производную порядка $m-1$.

Рассмотрим задачу типа Коши

$$D^{k-(1-\beta)(m-\alpha)}z(0) = z_k, \qquad k = 0,1,\dots,m-1, \tag{2.2}$$

для линейного уравнения

$$D^{\alpha,\beta}z(t) = Az(t), \qquad t \in \mathbb{R}_+, \tag{2.3}$$

где $m-1 < \alpha \leqslant m \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{C}l(\mathcal{Z})$. Решением задачи (2.2), (2.3) будем называть такую функцию $z \in C(\mathbb{R}_+;D_A) \cap L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;\mathcal{Z})$, что $J^{(1-\beta)(m-\alpha)}z \in AC^m(\mathbb{R}_+;\mathcal{Z})$, $D^{\alpha,\beta}z \in C(\mathbb{R}_+;\mathcal{Z})$, выполняются условия (2.2) и равенство (2.3) при $t \in \mathbb{R}_+$.

Пусть $m-1 < \alpha \leqslant m \in \mathbb{N}$, $\beta \in [0,1]$. Семейство операторов $\{S(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}) : t \in \mathbb{R}_+\}$ называется разрешающим семейством для уравнения (2.3), если выполняются следующие условия:

(i) существуют такие $\omega \geqslant 0$ и $K > 0$, что

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leqslant Kt^{-(1-\beta)(m-\alpha)}e^{\omega t}$$

для всех $t \in \mathbb{R}_+$;

(ii) при любом $z_0 \in \mathcal{Z}$ $S(t)z_0 \in C(\mathbb{R}_+;\mathcal{Z})$,

$$\operatorname*{s-lim}_{t\to 0+} J^{(1-\beta)(m-\alpha)}S(t) = I;$$

(iii) $S(t)[D_A] \subset D_A$, $S(t)Az_0 = AS(t)z_0$ при всех $z_0 \in D_A$, $t \in \mathbb{R}_+$;

(iv) для любого $z_0 \in D_A$ функция $S(t)z_0$ является решением задачи типа Коши

$$D^{-(1-\beta)(m-\alpha)}z(0) = z_0, \qquad D^{k-(1-\beta)(m-\alpha)}z(0) = 0, \quad k = 1,2,\dots,m-1,$$

для уравнения (2.3).

Нетрудно показать, что при любых $z_0, z_1, \dots, z_{m-1} \in D_A$ $\sum\limits_{k=0}^{m-1} J^k S(t)z_0$ является решением задачи (2.2), (2.3).

Замечание 2.3. *Для $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$ разрешающее семейство операторов уравнения (2.3) имеет вид (см, например, [1])*

$$S(t) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{t^{\alpha l+(1-\beta)(\alpha-m)}A^l}{\Gamma(\alpha l+(1-\beta)(\alpha-m)+1)} = t^{(1-\beta)(\alpha-m)}E_{\alpha,(1-\beta)(\alpha-m)+1}(t^\alpha A), \qquad t \in \mathbb{R}_+,$$

где

$$E_{\alpha,\beta}(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)}$$

— функция Миттаг–Леффлера.

При $m-1 < \alpha \leqslant m \in \mathbb{N}$, $\beta \in [0,1]$ оператор $A \in \mathcal{C}l(\mathcal{Z})$ будем называть оператором класса $\mathcal{C}_{\alpha,\beta}(K,\omega)$, где $K > 0$, $\omega \geqslant 0$, если выполняются следующие два условия:

(i) если $\operatorname{Re}\lambda > \omega$, то $\lambda^\alpha \in \rho(A) := \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu - A)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})\}$;

(ii) при всех $\operatorname{Re}\lambda > \omega$ и $n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\left\| \frac{d^n}{d\lambda^n} \left(\lambda^{m-1-\beta(m-\alpha)} (\lambda^\alpha - A)^{-1} \right) \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leqslant \frac{K\Gamma((1-\beta)(\alpha-m)+n+1)}{(\operatorname{Re}\lambda - \omega)^{(1-\beta)(\alpha-m)+n+1}}.$$

Введем также обозначения

$$\mathcal{C}_{\alpha,\beta}(\omega) := \bigcup_{K>0} \mathcal{C}_{\alpha,\beta}(K,\omega), \qquad \mathcal{C}_{\alpha,\beta} := \bigcup_{\omega \geqslant 0} \mathcal{C}_{\alpha,\beta}(\omega).$$

Теорема 2.1 ([4]). *Пусть $\beta \in [0,1]$, $\alpha > 2$. Тогда $C_{\alpha,\beta} \subset \mathcal{L}(\mathcal{Z})$.*

Пусть $A \in \mathcal{C}_{\alpha,\beta}(\omega)$ при некотором $\omega \geqslant 0$, для $\operatorname{Re}\lambda > \omega$,

$$H_\beta(\lambda) := \lambda^{m-1-\beta(m-\alpha)} (\lambda^\alpha - A)^{-1},$$

при $n \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}_+$ определим операторы

$$\mathcal{S}_n(t) := e^{-nt} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (n(n+\omega)t)^{k+1}}{k!(k+1)!} H_\beta^{(k)}(n+\omega).$$

Теорема 2.2 ([4]). *Пусть $m-1 < \alpha \leqslant m \in \mathbb{N}$, $\beta \in [0,1]$. Тогда существует разрешающее семейство операторов уравнения (2.3) в том и только в том случае, когда $A \in \mathcal{C}_{\alpha,\beta}$. При этом $S(t) = s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{S}_n(t)$ для всех $t > 0$.*

3. Линейное неоднородное уравнение с производной Хильфера

Рассмотрим задачу типа Коши (2.2) для линейного неоднородного уравнения

$$D^{\alpha,\beta} z(t) = Az(t) + f(t), \qquad t \in (0,T], \tag{3.1}$$

где $m-1 < \alpha \leqslant m \in \mathbb{N}$, $\beta \in [0,1]$, $A \in \mathcal{C}l(\mathcal{Z})$, $f : [0,T] \to \mathcal{Z}$. Решением задачи (2.2), (3.1) будем называть такую функцию $z \in C((0,T]; D_A) \cap L_1(0,T;\mathcal{Z})$, что

$$J^{(1-\beta)(m-\alpha)} z \in C^{m-1}([0,T];\mathcal{Z}) \cap AC^m((0,T];\mathcal{Z}), \qquad D^{\alpha,\beta} z \in C((0,T];\mathcal{Z}),$$

выполняются условия (2.2) и равенство (2.3) при $t \in (0,T]$.

Пространство функций $v \in C((0,T];\mathcal{Z})$, таких, что $t^\gamma v(t) \in C([0,T];\mathcal{Z})$ для некоторого $\gamma \in \mathbb{R}$ обозначим $C_\gamma((0,T];\mathcal{Z})$ и наделим нормой

$$\|v\|_{C_\gamma((0,T];\mathcal{Z})} := \sup_{t\in[0,T]} \|t^\gamma v(t)\|_{\mathcal{Z}}.$$

В этих обозначениях $C_0((0,T];\mathcal{Z}) = C([0,T];\mathcal{Z})$. При $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$, $\gamma < \delta$, $C_\gamma((0,T];\mathcal{Z}) \subset C_\delta((0,T];\mathcal{Z})$.

Для любого $\gamma \in \mathbb{R}$ при $v \in C_\gamma((0,T];\mathcal{Z})$

$$\|v(t)\|_{\mathcal{Z}} \leqslant t^{-\gamma} \|v\|_{C_\gamma((0,T];\mathcal{Z})}, \qquad t \in (0,T].$$

Поэтому при $\gamma < 0$ $v(0) = 0$ для $v \in C_\gamma((0,T];\mathcal{Z})$.

Теорема 3.1. *Пусть* $\alpha \in (1,2]$, $\beta \in [0,1]$, $A \in \mathcal{C}_{\alpha,\beta}$, $f \in C_\gamma((0,T];\mathcal{Z})$, $\gamma < 1-\beta(2-\alpha)$, $f(t) \in D_A$ *при* $t>0$. *Тогда задача типа Коши*

$$D^{-(1-\beta)(2-\alpha)}z(0) = z_0, \qquad D^{1-(1-\beta)(2-\alpha)}z(0) = z_1$$

для уравнения (3.1) *при любых* $z_0, z_1 \in D_A$ *имеет единственное решение. При этом оно имеет вид*

$$z(t) = S(t)z_0 + J^1 S(t)z_1 + \int\limits_0^t J^{1-\beta(2-\alpha)}S(t-s)f(s)ds.$$

Доказательство. Единственность решения задачи следует из единственности решения $z(t) = S(t)z_0 + J^1S(t)z_1$ задачи типа Коши для однородного уравнения $D^{\alpha,\beta}z(t) = Az(t)$, которая доказана в [4, следствие 5]. Достаточно доказать, что решением задачи

$$D^{-(1-\beta)(2-\alpha)}z(0) = 0, \qquad D^{1-(1-\beta)(2-\alpha)}z(0) = 0$$

для уравнения (3.1) является функция

$$z_f(t) = \int\limits_0^t J^{1-\beta(2-\alpha)}S(t-s)f(s)ds.$$

При $t>0$ с учетом определения разрешающего семейства операторов

$$\|J^{1-\beta(2-\alpha)}S(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leqslant K\int\limits_0^t \frac{(t-s)^{-\beta(2-\alpha)}s^{-(1-\beta)(2-\alpha)}}{\Gamma(1-\beta(2-\alpha))}e^{\omega s}ds \leqslant C_1 e^{\omega t}t^{\alpha-1},$$

$$\|z_f(t)\|_{\mathcal{Z}} \leqslant \frac{C_1e^{\omega t}}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1}\|f(s)\|_{\mathcal{Z}}ds \leqslant C_2e^{\omega t}t^{\alpha-\gamma},$$

$$\|J^{(1-2\beta)(2-\alpha)+1}S(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leqslant K\int\limits_0^t \frac{(t-s)^{(1-2\beta)(2-\alpha)}s^{-(1-\beta)(2-\alpha)}}{\Gamma((1-2\beta)(2-\alpha)+1)}e^{\omega s}ds \leqslant C_3e^{\omega t}t^{1-\beta(2-\alpha)}$$

при некотором $\omega \geqslant 0$. Поскольку $1-\beta(2-\alpha)>0$, имеем $J^{(1-2\beta)(2-\alpha)+1}S(0)=0$. Следовательно,

$$\|J^{(1-\beta)(2-\alpha)}z_f(t)\|_{\mathcal{Z}} = \left\|\int\limits_0^t J^{(1-2\beta)(2-\alpha)+1}S(t-s)f(s)ds\right\|_{\mathcal{Z}} \leqslant C_4e^{\omega t}t^{2-\beta(2-\alpha)-\gamma}$$

и поэтому $J^{(1-\beta)(2-\alpha)}z_f(0)=0$.

Далее

$$D^1J^{(1-2\beta)(2-\alpha)+1}S(t)z_0 = J^{1-\beta(2-\alpha)}D^1J^{(1-\beta)(2-\alpha)}S(t)z_0 + \frac{t^{-\beta(2-\alpha)}z_0}{\Gamma(1-\beta(2-\alpha))},$$

и в силу равенства $D^1J^{(1-\beta)(2-\alpha)}S(0)=0$, полученного при доказательстве теоремы 2.2 (см. [4]), имеем

$$\|D^1J^{(1-2\beta)(2-\alpha)+1}S(t)z_0\|_{\mathcal{Z}} \leqslant C_5e^{\omega t}t^{-\beta(2-\alpha)}\|z_0\|_{\mathcal{Z}},$$

$$D^{1-(1-\beta)(2-\alpha)}z_f(t) = D^1\int\limits_0^t J^{(1-2\beta)(2-\alpha)+1}S(t-s)f(s)ds = J^{(1-2\beta)(2-\alpha)+1}S(0)f(t)$$

$$+\int_0^t D^1 J^{(1-2\beta)(2-\alpha)+1} S(t-s)f(s)ds = \int_0^t D^1 J^{(1-2\beta)(2-\alpha)+1} S(t-s)f(s)ds.$$

Поэтому

$$\|D^{1-(1-\beta)(2-\alpha)} z_f(t)\|_{\mathcal{Z}} \leqslant C_5 e^{\omega t} \int_0^t (t-s)^{-\beta(2-\alpha)} \|f(s)\|_{\mathcal{Z}} ds \leqslant C_6 e^{\omega t} t^{1-\beta(2-\alpha)-\gamma},$$

а значит, $D^{1-(1-\beta)(2-\alpha)} z_f(0) = 0$, так как $1-\beta(2-\alpha)-\gamma > 0$.

По определению производная Хильфера имеет вид (2.1), т.е. в данном случае

$$D^{\alpha,\beta} h(t) = D^{2-\beta(2-\alpha)}(J^{(1-\beta)(2-\alpha)} h(t) - D^{-(1-\beta)(2-\alpha)} h(0) - D^{1-(1-\beta)(2-\alpha)} h(0)t).$$

Используя это равенство, при $t \in (0,T]$ получим в силу равенств

$$J^{(1-\beta)(2-\alpha)} S(0) = I, \qquad D^1 J^{(1-\beta)(2-\alpha)} S(0) = 0$$

и условия $f(s) \in D_A$ при $s > 0$

$$\begin{aligned}
A\int_0^t J^{1-\beta(2-\alpha)} S(t-s)f(s)ds &= \int_0^t J^{1-\beta(2-\alpha)} AS(t-s)f(s)ds \\
&= \int_0^t J^{1-\beta(2-\alpha)} D^{2-\beta(2-\alpha)}(J^{(1-\beta)(2-\alpha)} S(t-s) - I)f(s)ds \\
&= \int_0^t J^{1-\beta(2-\alpha)} D^1 J^{\beta(2-\alpha)} D^1 (J^{(1-\beta)(2-\alpha)} S(t-s) - I)f(s)ds \\
&= \int_0^t J^{1-\beta(2-\alpha)} D^1 J^{\beta(2-\alpha)} D^1 J^{(1-\beta)(2-\alpha)} S(t-s)f(s)ds \\
&= \int_0^t D^1 J^{1-\beta(2-\alpha)} J^{\beta(2-\alpha)} D^1 J^{(1-\beta)(2-\alpha)} S(t-s)f(s)ds \\
&= \int_0^t D^1 J^{(1-\beta)(2-\alpha)} S(t-s)f(s)ds.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Последний интеграл сходится, так как $\gamma < 1$, поэтому $z_f(t) \in D_A$ при всех $t \in (0,T]$.

Наконец, так как

$$D^{-(1-\beta)(2-\alpha)} z_f(0) = D^{1-(1-\beta)(2-\alpha)} z_f(0) = 0,$$

имеем

$$D^{\alpha,\beta}z_f(t) = D^2 J^{2-\alpha}\int_0^t J^{1-\beta(2-\alpha)}S(t-s)f(s)ds = D^2\int_0^t J^{1+(1-\beta)(2-\alpha)}S(t-s)f(s)ds$$

$$= D^1[J^{1+(1-\beta)(2-\alpha)}S(0)f(t)] + D^1\int_0^t J^{(1-\beta)(2-\alpha)}S(t-s)f(s)ds \tag{3.3}$$

$$= J^{(1-\beta)(2-\alpha)}S(0)f(t) + \int_0^t D^1 J^{(1-\beta)(2-\alpha)}S(t-s)f(s)ds = f(t) + Az_f(t)$$

в силу (3.2) и равенств

$$J^{(1-\beta)(2-\alpha)}S(0) = I, \qquad J^{1+(1-\beta)(2-\alpha)}S(0) = 0.$$

□

4. Уравнение со стационарным возмущением

Теорема 4.1. *Пусть* $\alpha \in (1,2)$, $\beta \in [0,1]$, $A \in \mathcal{C}_{\alpha,\beta}(K,\omega)$, $B \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$. *Тогда*

$$A + B \in \mathcal{C}_{\alpha,\beta}(K_2, \omega + K^{\frac{1}{\alpha}}\|B\|^{\frac{1}{\alpha}}_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}\Gamma(1-(1-\beta)(2-\alpha))^{\frac{1}{\alpha}})$$

при некотором $K_2 > 0$.

Доказательство. Согласно теореме 3.1 решение задачи типа Коши

$$J^{(1-\beta)(m-\alpha)}z(0) = z_0, \qquad D^{1-(1-\beta)(m-\alpha)}z(0) = z_1$$

для уравнения

$$D^{\alpha,\beta}v(t) = (A+B)v(t), \tag{4.1}$$

в случае существования имеет вид

$$v(t) = S_A(t)z_0 + \int_0^t J^{1-\beta(2-\alpha)}S_A(t-s)Bv(s)ds,$$

где $S_A(t)$ — операторы разрешающего семейства операторов невозмущенного уравнения (2.3). Поэтому операторы разрешающего семейства уравнения (4.1) должны иметь вид

$$S_{A+B}(t) = S_A(t) + \int_0^t J^{1-\beta(2-\alpha)}S_A(t-s)BS_{A+B}(s)ds, \tag{4.2}$$

если учесть ограниченность операторов в обеих частях данного равенства и тот факт, что D_A плотно в $\mathcal{Z}$. Будем искать $S_{A+B}(t)$ методом последовательных приближений в виде

$$S_{A+B}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n(t), \tag{4.3}$$

где $S_0(t) = S_A(t)$,

$$S_{n+1}(t) = \int_0^t J^{1-\beta(2-\alpha)}S_0(t-s)BS_n(s)ds, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

При этом для $t > 0$

$$\begin{aligned}\|J^{1-\beta(2-\alpha)}S_0(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leqslant & K\int\limits_0^t \frac{(t-s)^{-\beta(2-\alpha)}}{\Gamma(1-\beta(2-\alpha))}e^{\omega s}s^{-(1-\beta)(2-\alpha)}ds \\ \leqslant & \frac{Ke^{\omega t}t^{\alpha-1}}{\Gamma(1-\beta(2-\alpha))}\mathcal{B}(1-\beta(2-\alpha),1-(1-\beta)(2-\alpha)) \\ = & \frac{K_1e^{\omega t}t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)},\end{aligned} \tag{4.4}$$

где $\mathcal{B}$ — бета–функция Эйлера, $K_1 = K\Gamma(1-(1-\beta)(2-\alpha))$. По индукции можно доказать неравенства

$$\|S_n(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leqslant \frac{K_1^{n+1}\|B\|^n_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}e^{\omega t}t^{n\alpha-(1-\beta)(2-\alpha)}}{\Gamma(n\alpha-(1-\beta)(2-\alpha)+1)}, \qquad t>0, \qquad n\in\mathbb{N}_0.$$

Действительно, при $n = 0$ неравенство выполняется, далее при $t > 0$ и выполнении этого неравенства при заданном $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\|S_{n+1}(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leqslant & \int\limits_0^t \frac{K_1e^{\omega(t-s)}(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\frac{K_1^{n+1}\|B\|^{n+1}_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}e^{\omega s}s^{n\alpha-(1-\beta)(2-\alpha)}}{\Gamma(n\alpha-(1-\beta)(2-\alpha)+1)}ds \\ \leqslant & \frac{K_1^{n+2}\|B\|^{n+1}_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}e^{\omega t}t^{(n+1)\alpha-(1-\beta)(2-\alpha)}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n\alpha-(1-\beta)(2-\alpha)+1)}\mathcal{B}(\alpha,n\alpha-(1-\beta)(2-\alpha)+1) \\ = & \frac{K_1^{n+2}\|B\|^{n+1}_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}e^{\omega t}t^{(n+1)\alpha-(1-\beta)(2-\alpha)}}{\Gamma((n+1)\alpha-(1-\beta)(2-\alpha)+1)}.\end{aligned}$$

Поэтому ряд (4.3) сходится и

$$\begin{aligned}\|S_{A+B}(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leqslant & \sum_{n=0}^{\infty}\frac{K_1^{n+1}\|B\|^n_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}e^{\omega t}t^{n\alpha-(1-\beta)(2-\alpha)}}{\Gamma(n\alpha-(1-\beta)(2-\alpha)+1)} \\ = & K_1t^{-(1-\beta)(2-\alpha)}e^{\omega t}E_{\alpha,1-(1-\beta)(2-\alpha)}(t^\alpha K_1\|B\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}) \\ \leqslant & K_2t^{-(1-\beta)(2-\alpha)}e^{t(\omega+K_1^{\frac{1}{\alpha}}\|B\|^{\frac{1}{\alpha}}_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})})}, \qquad t>0,\end{aligned}$$

при некотором $K_2 > 0$.

При $\operatorname{Re}\lambda > \omega + K_1^{\frac{1}{\alpha}}\|B\|^{\frac{1}{\alpha}}_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}$ из (4.2) получим

$$\widehat{S}_{A+B}(\lambda) = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}S_{A+B}(t)dt = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}S_A(t)dt + \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}\int\limits_0^t J^{1-\beta(2-\alpha)}S_A(t-s)BS_{A+B}(s)dsdt$$

$$= \lambda^{1-\beta(2-\alpha)}(\lambda^\alpha - A)^{-1} + \int\limits_0^\infty\int\limits_s^\infty e^{-\lambda t}J^{1-\beta(2-\alpha)}S_A(t-s)BS_{A+B}(s)dtds$$

$$= \lambda^{1-\beta(2-\alpha)}(\lambda^\alpha - A)^{-1} + \int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty e^{-\lambda(\tau+s)}J^{1-\beta(2-\alpha)}S_A(\tau)BS_{A+B}(s)d\tau ds$$

$$= \lambda^{1-\beta(2-\alpha)}(\lambda^\alpha - A)^{-1} + (\lambda^\alpha - A)^{-1}B\widehat{S}_{A+B}(\lambda),$$

так как

$$\mathfrak{L}[J^{1-\beta(2-\alpha)}S_A](\lambda) = (\lambda^\alpha - A)^{-1}.$$

Отсюда

$$\lambda^{\beta(2-\alpha)-1}(\lambda^\alpha - A - B)\widehat{S}_{A+B}(\lambda) = I.$$

Поскольку

$$\|B\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} < \frac{(\operatorname{Re}\lambda - \omega)^\alpha}{K_1} \leqslant \frac{(\operatorname{Re}\lambda - \omega)^{\alpha-1+\beta(2-\alpha)}|\lambda|^{1-\beta(2-\alpha)}}{K_1} = \|(\lambda^\alpha - A)^{-1}\|^{-1}_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})},$$

имеем

$$\|(\lambda^\alpha - A)^{-1}B\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} < 1,$$

оператор

$$\lambda^\alpha - A - B = (\lambda^\alpha - A)(I - (\lambda^\alpha - A)^{-1}B)$$

обратим и справедливо равенство

$$\widehat{S}_{A+B}(\lambda) = \lambda^{1-\beta(2-\alpha)}(\lambda^\alpha - A - B)^{-1}.$$

Тогда для всех $\operatorname{Re}\lambda > \omega + K_1^{\frac{1}{\alpha}}\|B\|^{\frac{1}{\alpha}}_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}$, $n \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned}\left\|\frac{d^n}{d\lambda^n}[\lambda^{1-\beta(2-\alpha)}(\lambda^\alpha - A - B)^{-1}]\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} &= \left\|\int_0^\infty (-t)^n e^{-\lambda t} S_{A+B}(t)dt\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \\ &\leqslant K_2 \int_0^\infty t^{n-(1-\beta)(2-\alpha)} e^{t(\omega + K_1^{\frac{1}{\alpha}}\|B\|^{\frac{1}{\alpha}}_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} - \operatorname{Re}\lambda)}dt \\ &= \frac{K_2\Gamma(n-(1-\beta)(2-\alpha)+1)}{(\operatorname{Re}\lambda - \omega - K_1^{\frac{1}{\alpha}}\|B\|^{\frac{1}{\alpha}}_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})})^{n-(1-\beta)(2-\alpha)+1}}.\end{aligned}$$

Следовательно, $A + B \in \mathcal{C}_{\alpha,\beta}(K_2, \omega + K_1^{\frac{1}{\alpha}}\|B\|^{\frac{1}{\alpha}}_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})})$. □

Замечание 4.1. *Понятно, что решением задачи*

$$J^{(1-\beta)(m-\alpha)}z(0) = z_0, \qquad D^{1-(1-\beta)(m-\alpha)}z(0) = z_1$$

для уравнения

$$D^{\alpha,\beta}z(t) = (A+B)z(t)$$

при $\alpha \in (1,2)$, $\beta \in [0,1]$, $A \in \mathcal{C}_{\alpha,\beta}(K,\omega)$, $B \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $z_0, z_1 \in D_A$ *является функция*

$$z(t) = S_{A+B}(t)z_0 + J^1 S_{A+B}(t)z_1.$$

Следствие 4.1. *В условиях теоремы 4.1*

$$\begin{aligned}&\|S_{A+B}(t) - S_A(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \\ &\qquad \leqslant K_1 e^{\omega t} t^{-(1-\beta)(2-\alpha)} \left(E_{\alpha,1-(1-\beta)(2-\alpha)}(t^\alpha K_1\|B\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}) - \frac{1}{\Gamma(1-(1-\beta)(2-\alpha))}\right).\end{aligned}$$

Доказательство. Из доказательства теоремы 4.1 по построению

$$S_{A+B}(t) - S_A(t) = \sum_{n=1}^\infty S_n(t),$$

поэтому

$$\|S_{A+B}(t) - S_A(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leqslant \sum_{n=1}^\infty \frac{K_1^{n+1}\|B\|^n_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} e^{\omega t} t^{n\alpha-(1-\beta)(2-\alpha)}}{\Gamma(n\alpha-(1-\beta)(2-\alpha)+1)},$$

откуда получаем требуемое. □

Поскольку $D^{\alpha,1}$ — оператор производной Герасимова — Капуто, а $D^{\alpha,0}$ — оператор производной Римана — Лиувилля, положив $\beta = 1$ и $\beta = 0$ в формулировке теоремы 4.1, получим утверждения для уравнений с производной Герасимова — Капуто и Римана — Лиувилля соответственно. Эти утверждения принимают следующий вид.

Следствие 4.2. *Пусть* $\alpha \in (1,2)$, $A \in \mathcal{C}_{\alpha,1}(K,\omega)$, $B \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$. *Тогда при некотором* $K_2 > 0$

$$A + B \in \mathcal{C}_{\alpha,1}(K_2, \omega + K^{\frac{1}{\alpha}}\|B\|^{\frac{1}{\alpha}}_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})})$$

при некотором $K_2 > 0$.

Следствие 4.3. *Пусть* $\alpha \in (1,2)$, $A \in \mathcal{C}_{\alpha,0}(K,\omega)$, $B \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$. *Тогда при некотором* $K_2 > 1$

$$A + B \in \mathcal{C}_{\alpha,0}(K_2, \omega + K^{\frac{1}{\alpha}}\|B\|^{\frac{1}{\alpha}}_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}\Gamma(\alpha-1)^{\frac{1}{\alpha}})$$

при некотором $K_2 > 0$.

5. Уравнение с нестационарным возмущением

Для $B \in C_\gamma(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathcal{Z}))$ обозначим $b_t := \max\limits_{s\in[0,t]} \|s^\gamma B(s)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}$ при $t > 0$, тогда при $s \in (0,t]$ имеем $\|B(s)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leqslant b_t s^{-\gamma}$.

Теорема 5.1. *Пусть* $\alpha \in (1,2)$, $\beta \in [0,1]$, $A \in \mathcal{C}_{\alpha,\beta}(K,\omega)$, $B \in C_\gamma(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathcal{Z}))$, $\operatorname{im} B(t) \subset D_A$ *при* $t \in \mathbb{R}_+$, $\gamma < \alpha - 1$. *Тогда при любом* $z_0 \in \mathcal{Z}$ *задача Коши*

$$J^{(1-\beta)(2-\alpha)}z(0) = z_0, \qquad D^{1-(1-\beta)(2-\alpha)}z(0) = 0 \tag{5.1}$$

для уравнения

$$D^{\alpha,\beta}z(t) = (A + B(t))z(t), \qquad t \in \mathbb{R}_+, \tag{5.2}$$

имеет единственное решение, при этом оно имеет вид

$$z(t) = Z_{A+B}(t)z_0 := \sum_{n=0}^{\infty} Z_n(t)z_0, \tag{5.3}$$

где $Z_0(t) = S_A(t)$,

$$Z_{n+1}(t) = \int_0^t J^{1-\beta(2-\alpha)}S_A(t-s)B(s)Z_n(s)ds, \qquad t \in \mathbb{R}_+, \qquad n \in \mathbb{N}_0.$$

Кроме того, существует такое $C > 0$, *что при всех* $t > 0$

$$\|Z_{A+B}(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leqslant Kt^{-(1-\beta)(2-\alpha)}e^{\omega t + Cb_t t^{\alpha-\gamma}}, \tag{5.4}$$

$$\|Z_{A+B}(t) - S_A(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leqslant Kt^{-(1-\beta)(2-\alpha)}e^{\omega t}(e^{Cb_t t^{\alpha-\gamma}} - 1). \tag{5.5}$$

Доказательство. В силу асимптотического представления гамма–функции

$$\Gamma(u) \sim \frac{\sqrt{2\pi}u^u}{\sqrt{u}e^u}, \qquad |\arg u| < \pi$$

имеем при некотором $C > 0$ и для всех $k \in \mathbb{N}$

$$\frac{\Gamma((k-1)(\alpha-\gamma) - (1-\beta)(2-\alpha) - \gamma + 1)}{\Gamma(k(\alpha-\gamma) - (1-\beta)(2-\alpha) + 1)} \leqslant C_1(k(\alpha-\gamma) + 1 - (1-\beta)(2-\alpha))^{-\alpha} \leqslant C_2 k^{-\alpha}.$$

Здесь учитывается, что при достаточно больших $k \in \mathbb{N}$

$$\gamma < \frac{1 - (1-\beta)(2-\alpha)}{k} + \left(1 - \frac{1}{k}\right)\alpha.$$

По индукции можно доказать неравенства

$$\|Z_n(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leqslant \frac{KK_1^n C_2^n b_t^n e^{\omega t} t^{n(\alpha-\gamma)-(1-\beta)(2-\alpha)}}{(n!)^\alpha}, \qquad t>0, \qquad n\in\mathbb{N}_0, \tag{5.6}$$

где $K_1 := K\Gamma(1-(1-\beta)(2-\alpha))$, как и прежде. Действительно, при $n=0$ это неравенство следует из определения $S_A(t)$. При $n\in\mathbb{N}$ с учетом неравенства (4.4) из (5.6) при заданном $n\in\mathbb{N}$ получаем

$$\begin{aligned}
\|Z_{n+1}(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} &\leqslant \int\limits_0^t \frac{K_1 e^{\omega(t-s)}(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \|B(s)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \frac{KK_1^n C_2^n b_t^n e^{\omega s} s^{n(\alpha-\gamma)-(1-\beta)(2-\alpha)}}{(n!)^\alpha} ds \\
&\leqslant \int\limits_0^t \frac{K_1 e^{\omega(t-s)}(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{KK_1^n C_2^n b_t^{n+1} e^{\omega s} s^{n(\alpha-\gamma)-(1-\beta)(2-\alpha)-\gamma}}{(n!)^\alpha} ds \\
&\leqslant \frac{KK_1^{n+1} C_2^n b_t^{n+1} e^{\omega t} t^{(n+1)(\alpha-\gamma)-(1-\beta)(2-\alpha)}}{\Gamma(\alpha)(n!)^\alpha} \mathcal{B}(\alpha, n(\alpha-\gamma)-(1-\beta)(2-\alpha)-\gamma+1) \\
&= \frac{KK_1^{n+1} C_2^n b_t^{n+1} e^{\omega t} t^{(n+1)(\alpha-\gamma)-(1-\beta)(2-\alpha)}}{(n!)^\alpha} \frac{\Gamma(n(\alpha-\gamma)-(1-\beta)(2-\alpha)-\gamma+1)}{\Gamma((n+1)(\alpha-\gamma)-(1-\beta)(2-\alpha)+1)} \\
&\leqslant \frac{KK_1^{n+1} C_2^{n+1} b_t^{n+1} e^{\omega t} t^{(n+1)(\alpha-\gamma)-(1-\beta)(2-\alpha)}}{(n!)^\alpha (n+1)^\alpha} \\
&= \frac{KK_1^{n+1} C_2^{n+1} b_t^{n+1} e^{\omega t} t^{(n+1)(\alpha-\gamma)-(1-\beta)(2-\alpha)}}{((n+1)!)^\alpha}.
\end{aligned}$$

Из неравенств (5.6) следует, что ряд (5.3) сходится в пространстве $\mathcal{L}(\mathcal{Z})$ равномерно на компактных подмножествах изменения переменной t. Поэтому оператор-функция $Z_{A+B}(t)$ сильно непрерывна на $\mathbb{R}_+$. При этом

$$\|z(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leqslant Ke^{\omega t} t^{-(1-\beta)(2-\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{K_1^n C_2^n b_t^n t^{n(\alpha-\gamma)}}{(n!)^\alpha} \|z_0\|_{\mathcal{Z}},$$

отсюда следуют неравенства (5.4) и (5.5).

Имеем

$$J^{(1-\beta)(2-\alpha)} S_A(0) z_0 = z_0, \qquad D^{1-(1-\beta)(2-\alpha)} S_A(0) z_0 = 0,$$

в силу (5.6) при $t>0$, $n\in\mathbb{N}$,

$$\|J^{(1-\beta)(2-\alpha)} Z_n(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leqslant \frac{KK_1^n C_2^n b_t^n e^{\omega t} t^{n(\alpha-\gamma)}}{(n!)^\alpha} \mathcal{B}((1-\beta)(2-\alpha), n(\alpha-\gamma)-(1-\beta)(2-\alpha)+1),$$

поэтому $J^{(1-\beta)(2-\alpha)} Z_n(0) z_0 = 0$. Кроме того,

$$\begin{aligned}
J^{(1-\beta)(2-\alpha)} Z_{n+1}(t) &= \int\limits_0^t J^{1-\beta(2-\alpha)} J^{(1-\beta)(2-\alpha)} S_A(t-s) B(s) Z_n(s) ds, \\
D^{1-(1-\beta)(2-\alpha)} Z_{n+1}(t) &= J^{1-\beta(2-\alpha)} J^{(1-\beta)(2-\alpha)} S_A(0) B(t) Z_n(t) \\
&\quad + \int\limits_0^t D^1 J^{1-\beta(2-\alpha)} J^{(1-\beta)(2-\alpha)} S_A(t-s) B(s) Z_n(s) ds \\
&= J^{1-\beta(2-\alpha)} \int\limits_0^t D^1 J^{(1-\beta)(2-\alpha)} S_A(t-s) B(s) Z_n(s) ds
\end{aligned}$$

$$+\int_0^t \frac{(t-s)^{-\beta(2-\alpha)}}{\Gamma(1-\beta(2-\alpha))}B(s)Z_n(s)ds,$$

$$\left\|\int_0^t \frac{(t-s)^{-\beta(2-\alpha)}}{\Gamma(1-\beta(2-\alpha))}B(s)Z_n(s)ds\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}$$

$$\leqslant \int_0^t \frac{(t-s)^{-\beta(2-\alpha)}}{\Gamma(1-\beta(2-\alpha))}\frac{KK_1^nC_2^nb_t^{n+1}e^{\omega s}s^{n(\alpha-\gamma)-(1-\beta)(2-\alpha)-\gamma}}{(n!)^\alpha}ds$$

$$\leqslant \frac{KK_1^nC_2^nb_t^{n+1}e^{\omega t}t^{n(\alpha-\gamma)-1+\alpha-\gamma}}{(n!)^\alpha}\frac{\Gamma(n(\alpha-\gamma)-(1-\beta)(2-\alpha)-\gamma+1)}{\Gamma(n(\alpha-\gamma)+\alpha-\gamma)}.$$

Поэтому с учетом равномерной сходимости ряда (5.3) и неравенства $\gamma<\alpha-1$ имеем

$$J^{(1-\beta)(2-\alpha)}z(0)=z_0,\qquad D^{1-(1-\beta)(2-\alpha)}z(0)=0.$$

В силу (5.3) и доказанной выше равномерной сходимости ряда

$$\begin{aligned}z(t)=Z_{A+B}(t)z_0:=&S_A(t)z_0+\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^t J^{1-\beta(2-\alpha)}S_A(t-s)B(s)Z_n(s)z_0ds\\ =&S_A(t)z_0+\int_0^t J^{1-\beta(2-\alpha)}S_A(t-s)B(s)z(s)ds.\end{aligned}\tag{5.7}$$

Поскольку

$$\begin{aligned}&J^{(1-\beta)(2-\alpha)}\int_0^t J^{1-\beta(2-\alpha)}S_A(t-s)B(s)z(s)ds|_{t=0}\\ &\quad=\sum_{n=0}^{\infty}J^{(1-\beta)(2-\alpha)}\int_0^t J^{1-\beta(2-\alpha)}S_A(t-s)B(s)Z_n(s)ds|_{t=0}\\ &\quad=J^{1-\beta(2-\alpha)}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^t J^{(1-\beta)(2-\alpha)}S_A(t-s)B(s)Z_n(s)ds|_{t=0}=0,\\ &D^1J^{(1-\beta)(2-\alpha)}\int_0^t J^{1-\beta(2-\alpha)}S_A(t-s)B(s)z(s)ds|_{t=0}\\ &\quad=\sum_{n=0}^{\infty}D^1J^{(1-\beta)(2-\alpha)}\int_0^t J^{1-\beta(2-\alpha)}S_A(t-s)B(s)Z_n(s)ds|_{t=0}\\ &\quad=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^t D^1J^{1-\beta(2-\alpha)}J^{(1-\beta)(2-\alpha)}S_A(t-s)B(s)Z_n(s)ds|_{t=0}=0,\\ &\quad=J^{1-\beta(2-\alpha)}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^t\left(D^1J^{(1-\beta)(2-\alpha)}S_A(t-s)-\frac{(t-s)^{-\beta(2-\alpha)}}{\Gamma(1-\beta(2-\alpha))}\right)B(s)Z_n(s)ds|_{t=0}=0,\end{aligned}$$

из (5.7) получаем равенство

$$D^{\alpha,\beta}z(t) = AS_A(t)z_0 + D^{\alpha}\int\limits_0^t J^{1-\beta(2-\alpha)}S_A(t-s)B(s)z(s)ds. \tag{5.8}$$

В силу условия $\operatorname{im} B(t) \subset D_A$ при $t > 0$, как при доказательстве равенств (3.2), (3.3) получим

$$\int\limits_0^t J^{1-\beta(2-\alpha)}AS_A(t-s)B(s)z(s)ds = \int\limits_0^t D^1 J^{(1-\beta)(2-\alpha)}S_A(t-s)B(s)z(s)ds,$$

при этом

$$\|D^1 J^{(1-\beta)(2-\alpha)}S_A(t-s)B(s)z(s)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leqslant C_3 s^{-(1-\beta)(2-\alpha)-\gamma}, \qquad -(1-\beta)(2-\alpha)-\gamma > -1,$$

поскольку $\gamma < \alpha - 1$, а значит, последний интеграл сходится,

$$\int\limits_0^t J^{1-\beta(2-\alpha)}S_A(t-s)B(s)z(s)ds \in D_A, \qquad t > 0,$$

и по аналогии с доказательством равенства (3.3) докажем равенство

$$D^{\alpha,\beta}\int\limits_0^t J^{1-\beta(2-\alpha)}S_A(t-s)B(s)z(s)ds = A\int\limits_0^t J^{1-\beta(2-\alpha)}S_A(t-s)B(s)z(s)ds + B(t)z(t).$$

Докажем единственность решения. Заметим, что

$$\begin{aligned} &J^{\beta(2-\alpha)}(J^{(1-\beta)(2-\alpha)}S_A(t)z_0 - z_0)|_{t=0} = 0,\\ &D^1 J^{\beta(2-\alpha)}(J^{(1-\beta)(2-\alpha)}S_A(t)z_0 - z_0)|_{t=0} = J^{\beta(2-\alpha)}D^1(J^{(1-\beta)(2-\alpha)}S_A(t)z_0 - z_0)|_{t=0}\\ &\qquad = J^{\beta(2-\alpha)}D^1 J^{(1-\beta)(2-\alpha)}S_A(0)z_0 = 0, \end{aligned}$$

поэтому

$$\begin{aligned} J^{\alpha}D^{\alpha,\beta}S_A(t)z_0 =& J^{\alpha}D^2 J^{\beta(2-\alpha)}(J^{(1-\beta)(2-\alpha)}S_A(t)z_0 - z_0)\\ =& D^2 J^{\alpha}J^{\beta(2-\alpha)}(J^{(1-\beta)(2-\alpha)}S_A(t)z_0 - z_0)\\ =& S_A(t)z_0 - \frac{t^{-(1-\beta)(2-\alpha)}z_0}{\Gamma(1-(1-\beta)(2-\alpha))} = J^{\alpha}AS_A(t)z_0. \end{aligned}$$

Таким образом, для любого $z_0 \in D_A$

$$\begin{aligned} z_0 =& J^{(1-\beta)(2-\alpha)}S_A(t)z_0 - J^{(1-\beta)(2-\alpha)}J^{\alpha}AS_A(t)z_0\\ =& (J^{(1-\beta)(2-\alpha)}S_A(t) - g_\alpha * AJ^{(1-\beta)(2-\alpha)}S_A(t))z_0, \end{aligned}$$

где $g_\beta(t) := t^{\beta-1}/\Gamma(\beta)$, свертка Лапласа $*$ определяется равенством

$$(f*g)(t) = \int\limits_0^t f(t-s)g(s)ds.$$

Пусть некоторая функция x удовлетворяет уравнению (5.2) и условиям (5.1) при $z_0 = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} &J^{\alpha}D^{\alpha,\beta}x(t) = J^{\alpha}D^2 J^{\beta(2-\alpha)}J^{(1-\beta)(2-\alpha)}x(t) = x(t) = J^{\alpha}(A+B)x(t),\\ &1 * x = (J^{(1-\beta)(2-\alpha)}S_A - g_\alpha * AJ^{(1-\beta)(2-\alpha)}S_A) * x\\ &\qquad = J^{(1-\beta)(2-\alpha)}S_A * (x - g_\alpha * Ax) = J^{(1-\beta)(2-\alpha)}S_A * J^{\alpha}Bx \end{aligned}$$

$$= J^{(1-\beta)(2-\alpha)+\alpha} S_A * Bx.$$

Таким образом,

$$x = D^1 J^{(1-\beta)(2-\alpha)+\alpha} S_A * Bx = J^{(1-\beta)(2-\alpha)+\alpha-1} S_A * Bx = J^{1-\beta(2-\alpha)} S_A * Bx$$

или

$$x(t) = \int_0^t J^{1-\beta(2-\alpha)} S_A(t-s) B(s) x(s) ds := (Fx)(t). \tag{5.9}$$

Для решения уравнения (5.9) в силу неравенства (4.4) имеем при $t > 0$

$$\|(Fz)(t)\|_{\mathcal{Z}} \leqslant \int_0^t \frac{K\Gamma(1-(1-\beta)(2-\alpha))e^{\omega(t-s)}(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \|B(s)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \|z(s)\|_{\mathcal{Z}} ds$$
$$\leqslant \frac{K\Gamma(1-(1-\beta)(2-\alpha))\Gamma(1-(1-\beta)(2-\alpha)-\gamma)}{\Gamma(\alpha-(1-\beta)(2-\alpha)-\gamma+1)} e^{\omega t} t^{\alpha-(1-\beta)(2-\alpha)-\gamma} b_t \|z\|_{C_{(1-\beta)(2-\alpha)}((0,t];\mathcal{Z})}.$$

Следовательно,

$$\|Fz\|_{C_{(1-\beta)(2-\alpha)}((0,T_1];\mathcal{Z})} \leqslant \frac{K\Gamma(1-(1-\beta)(2-\alpha))\Gamma(1-(1-\beta)(2-\alpha)-\gamma)e^{\omega T_1}}{\Gamma(\alpha-(1-\beta)(2-\alpha)-\gamma+1)}$$
$$\cdot T_1^{\alpha-\gamma} b_T \|z\|_{C_{(1-\beta)(2-\alpha)}((0,T_1];\mathcal{Z})}.$$

При достаточно малом $T_1 \leqslant T$ оператор F является сжимающим в банаховом пространстве $C_{(1-\beta)(2-\alpha)}((0,T_1];\mathcal{Z})$ и по теореме о сжимающем отображении $z \equiv 0$ на $(0,T_1]$. Если $T_1 < T$, возьмем пространство

$$C^{T_1}_{(1-\beta)(2-\alpha)}((0,T_2];\mathcal{Z}) := \{z \in C_{(1-\beta)(2-\alpha)}((0,T_2];\mathcal{Z}) : z(t) = 0, \quad t \in (0,T_1]\}$$

при $T_2 = 2^{(\alpha-\gamma)^{-1}} T_1$, тогда

$$\|Fz\|_{C^{T_1}_{(1-\beta)(2-\alpha)}((0,T_2];\mathcal{Z})} \leqslant \frac{K\Gamma(1-(1-\beta)(2-\alpha))\Gamma(1-(1-\beta)(2-\alpha)-\gamma)}{\Gamma(\alpha-(1-\beta)(2-\alpha)-\gamma+1)}$$
$$\cdot e^{\omega T_1}(2T_1^{\alpha-\gamma} - T_1^{\alpha-\gamma}) b_T \|z\|_{C^{T_1}_{(1-\beta)(2-\alpha)}((0,T_2];\mathcal{Z})}.$$

Поэтому оператор F сжимающий в банаховом пространстве $C^{T_1}_{(1-\beta)(2-\alpha)}((0,T_2];\mathcal{Z})$ и $z \equiv 0$ на $(0,T_2]$. За конечное число шагов n получим $2^{(\alpha-\gamma)^{-1}n} T_1 \geqslant T$. □

Аналогично теореме 3.1 с заменой операторов $S_A(t)$ на операторы $Z_{A+B}(t)$ доказывается следующее утверждение.

Теорема 5.2. *Пусть $\alpha \in (1,2]$, $\beta \in [0,1]$, $A \in \mathcal{C}_{\alpha,\beta}$, $B \in C_\gamma(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathcal{Z}))$, $f \in C_\gamma((0,T];\mathcal{Z})$, $\operatorname{im} B(t) \subset D_A$, $f(t) \in D_A$ при $t \in \mathbb{R}_+$, $\gamma < \alpha - 1$. Тогда задача типа Коши*

$$D^{-(1-\beta)(2-\alpha)} z(0) = z_0, \qquad D^{1-(1-\beta)(2-\alpha)} z(0) = z_1$$

для уравнения

$$D^{\alpha,\beta} z(t) = (A + B(t))z(t) + f(t)$$

при любых $z_0, z_1 \in D_A$ имеет единственное решение. При этом оно имеет вид

$$z(t) = Z_{A+B}(t) z_0 + J^1 Z_{A+B}(t) z_1 + \int_0^t J^{1-\beta(2-\alpha)} Z_{A+B}(t-s) f(s) ds.$$

6. Пример

При $\alpha \in (1,2)$, $\beta = 0$ рассмотрим задачу типа Коши

$$D_t^\alpha v(\xi,t) = \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}(\xi,t) + \int_0^{2\pi} b(\xi,\eta,t)v(\eta,t)d\eta, \qquad (\xi,t) \in (0,2\pi)\times\mathbb{R}_+, \tag{6.1}$$

$$v(0,t) = v(2\pi,t), \qquad \frac{\partial v}{\partial \xi}(0,t) = \frac{\partial v}{\partial \xi}(2\pi,t), \qquad t \in \mathbb{R}_+, \tag{6.2}$$

$$D_t^{\alpha-2+k} v(\xi,0) = v_k(\xi), \qquad \xi \in (0,2\pi), \quad k = 0,1, \tag{6.3}$$

где нижний индекс t обозначает переменную по которой вычисляется дробная производная или дробный интеграл. Выберем пространство $\mathcal{Z} = L_2(0,2\pi)$ и действующий в нем оператор $A = \rho D_\xi^2 = \rho\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}$ с областью определения

$$D_A = \{w \in H^2(0,2\pi) : w(0) = w(2\pi),\ D_\xi^1 w(0) = D_\xi^1 w(2\pi)\},$$

где $H^2(0,2\pi) := W_2^2(0,2\pi)$ — пространство Соболева. В силу теорем вложения для функций из этого пространства и их первых производных определено значение следа в точке.

Нетрудно вычислить спектр $\sigma(A) = \{-k^2 : k \in \mathbb{Z}\}$ и соответствующую ортонормированную систему собственных функций $\{(2\pi)^{-\frac12}e^{ik\xi} : k \in \mathbb{Z}\}$, которая образует базис в $L_2(0,2\pi)$. Поэтому при $\operatorname{Re}\gamma > 0$

$$(\lambda^\gamma - A)w(\xi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (\lambda^\gamma + k^2)\left\langle w, \frac{e^{ik\xi}}{\sqrt{2\pi}}\right\rangle \frac{e^{ik\xi}}{\sqrt{2\pi}}, \qquad (\lambda^\gamma - A)^{-1}w(\xi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{\left\langle w, \frac{e^{ik\xi}}{\sqrt{2\pi}}\right\rangle \frac{e^{ik\xi}}{\sqrt{2\pi}}}{\lambda^\gamma + k^2}.$$

Для операторной косинус–функции имеем

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}\left[\sum_{k\in\mathbb{Z}} \cos(kt)\left\langle \cdot, \frac{e^{ik\xi}}{\sqrt{2\pi}}\right\rangle \frac{e^{ik\xi}}{\sqrt{2\pi}}\right] &= \frac12 \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\frac{1}{\lambda+ik} + \frac{1}{\lambda-ik}\right)\left\langle \cdot, \frac{e^{ik\xi}}{\sqrt{2\pi}}\right\rangle \frac{e^{ik\xi}}{\sqrt{2\pi}} \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{\lambda}{\lambda^2+k^2}\left\langle \cdot, \frac{e^{ik\xi}}{\sqrt{2\pi}}\right\rangle \frac{e^{ik\xi}}{\sqrt{2\pi}} = \lambda(\lambda^2 - A)^{-1}.\end{aligned}$$

Поэтому по лемме 5.8 [3] оператор A порождает операторную косинус–функцию, т.е. $A \in \mathcal{A}_{2,0}$, а значит, по теореме 5 из [6] $A \in \mathcal{A}_{\alpha,0}$. По теореме 5.1 сразу получаем следующий результат.

Теорема 6.1. *Пусть $\alpha \in (1,2)$, $b(\xi,\eta,t) \in C_\gamma(\mathbb{R}_+; D_A \times L_2(0,2\pi))$, $\gamma < \alpha - 1$. Тогда при любых $v_0, v_1 \in D_A$ задача (6.1)–(6.3) имеет единственное решение.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А.Р. Волкова, В.Е. Федоров, Д.М. Гордиевских. *О разрешимости некоторых классов уравнений с производной Хилфера в банаховых пространствах* // Челяб. физ.-мат. журн. **7**:1, 11–19 (2022).
2. А.М. Нахушев. *Дробное исчисление и его применение*. М.: Физматлит. 2003.
3. H.O. Fattorini. *Ordinary differential equations in linear topological spaces. I.* // J. Differ. Eq. **5**:1, 72–105 (1969).
4. V.E. Fedorov, W.-Sh. Du, M. Kostić, M.V. Plekhanova, A.S. Skorynin. *Criterion of the existence of a strongly continuous resolving family for a fractional differential equation with the Hilfer derivative* // Fractal and Fractional **9**:2, 81 (2025).
5. V.E. Fedorov, A.S. Skorynin. *Analytic resolving families of operators for linear equations with Hilfer derivative* // J. Math. Sci. **277**:3, 385–402 (2023).

6. V.E. Fedorov, M.V. Plekhanova, D.A. Vershinina. *Subordination principle for equations with Riemann — Liouville derivative* // Lobachevskii J. Math. **46**:11, 5578–5588 (2025).
7. R. Hilfer. *Applications of Fractional Calculus in Physics*. World Scientific, Singapore (2000).
8. A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. Elsevier, Amsterdam (2006).
9. I. Podlubny. *Fractional Differential Equations*. Academic Press San Diego, CA (1999).
10. V.E. Tarasov. *Fractional Dynamics: Applications of Fractional Calculus to Dynamics of Particles, Fields and Media*. Springer, Berlin; Higher Education Press, Beijing (2011).
11. V.V. Uchaykin. *Fractional Derivatives for Physicists and Engineers. Vol. I. Background and Theory*. Springer, Heidelberg; Higher Education Press, Beijing (2013).
12. V.V. Uchaykin. *Fractional Derivatives for Physicists and Engineers. Vol. I. Applications*. Springer, Singapore; Higher Education Press, Beijing (2025).

Владимир Евгеньевич Федоров,
Челябинский государственный университет,
ул. Братьев Кашириных, 129,
454001, г. Челябинск, Россия
E-mail: kar@csu.ru

Антон Александрович Быков,
Югорский государственный университет,
ул. Чехова, 16,
Ханты–Мансийский автономный округ — Югра,
628011, г. Ханты–Мансийск, Россия
E-mail: bykov_antony@mail.ru