ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 18 № 3 (2026). С. 61-71.

УДК 519.8

О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ И УКЛОНЕНИЯ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГР С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ХИЛЬФЕРА

Е.М. МУХСИНОВ, Р.И. ХАКИМОВ

Аннотация. В данной работе в банаховом пространстве исследуется разрешимость задач преследования и уклонения для дифференциальных игр с дробными производными Хильфера порядка α, $0 < \alpha < 1$, типа μ, $0 \leqslant \mu \leqslant 1$. Используя первый метод Понтрягина и теорему о строгой отделимости доказаны две теоремы о достаточных условиях разрешимости задач преследования и уклонения на промежутке. Решена одна игровая задача, описывающая процесс релаксации при стеклообразовании переохлажденных жидкостей.

Ключевые слова: дифференциальная игра с дробными производными Хильфера, банахово пространство, задача преследования, задача уклонения на промежутке.

Mathematics Subject Classification: 34B45, 81Q15

1. Введение. Постановка задач преследования и убегания

В области теории дифференциальных игр основополагающие результаты получили академики Л.С. Понтрягин [15] и Н.Н. Красовский [7].

Если академик Н.Н. Красовский исследовал позиционные дифференциальные игры, то академик Л.С. Понтрягин рассматривая дифференциальную игру отдельно с точки зрения преследующего и с точки зрения убегающего разбивают игровую задачу на две различные задачи: задачу преследования и задачу убегания. Этот подход позволил применить первый метод Л.С. Понтрягина к более широким классам игр. Например, разрешимость задачи преследования с помощью первого метода исследованы в работах:

- [4], [16], [1], когда на управление игроков наложены геометрические и интегральные ограничения;
- [3], [8], [9], когда дифференциальная игра описывается уравнением запаздывающего или нейтрального типа;
- [13], [11], [12], когда динамика игры описывается дифференциальным уравнением в бесконечномерном банаховом пространстве;
- [17], [2], [10], [14], когда динамика игры описывается дифференциальным уравнением дробного порядка.

E.M. Mukhsinov, R.I. Hakimov, On solvability of pursuit and evasion problems for differential games with Hilfer fractional derivatives.

© Мухсинов Е.М., Хакимов Р.И. 2026.

Поступила 17 декабря 2024 г.

В банаховом пространстве X рассматривается дифференциальная игра, описываемая дифференциальным уравнением дробного порядка

$$\begin{cases} D_{0+}^{\alpha,\mu}x(t) = Ax(t) + F(t,u(t),v(t)) \\ I_{0+}^{(1-\alpha)(1-\mu)}x(0) = x_0 \end{cases} \tag{1.1}$$

и замкнутым терминальным множеством $M \subset X$, где заканчивается игра. В игре (1.1) $t \in (0,T]$, $T > 0$, $x(t) \in X$, Y, Z — банаховые пространства, $U((0,T],Y)$ — множество измеримых отображений, действующих из $(0,T]$ в Y, $u(\cdot) \in U((0,T],Y)$ — управления преследования, $v(\cdot) \in U((0,T],Z)$ — управления убегания, $D_{0+}^{\alpha,\mu}$ — дробная производная Хильфера порядка α, $0 < \alpha < 1$ и типа μ, $0 \leqslant \mu \leqslant 1$, A — линейный замкнутый оператор, имеющий плотную в X область определения, который порождает сильно непрерывную полугруппу $S(t)$, $t \geqslant 0$, а $I_{0+}^{(1-\alpha)(1-\mu)}$ — дробный интеграл порядка $\rho = (1-\alpha)(1-\mu)$. Полагаем, что для любых допустимых $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$ отображение $t \to F(t,u(t),v(t))$ локально интегрируемо и задача Коши (1.1) имеет решение [19]:

$$x(t) = S_{\alpha,\mu}(t)x_0 + \int\limits_0^t K_\alpha(t-s)F(s,u(s),v(s))ds, \qquad t \in (0,T], \tag{1.2}$$

где интеграл понимается в смысле Бохнера [18],

$$K_\alpha(t) = t^{\alpha-1}P_\alpha(t), \qquad P_\alpha(t) = \int\limits_0^\infty \alpha s M_\alpha(s)S(t^\alpha s)ds, \qquad S_{\alpha,\mu}(t) = I_{0+}^{\mu(1-\alpha)}K_\alpha(t),$$

а функция Райт

$$M_\alpha(z) = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-z)^{n-1}}{(n-1)!\Gamma(1-\alpha n)}, \qquad 0 < \alpha < 1, \qquad z \in \mathbb{C},$$

удовлетворяет уравнению

$$\int\limits_0^\infty s^\sigma M_\alpha(s)ds = \frac{\Gamma(1+\sigma)}{\Gamma(1+\alpha\sigma)}, \qquad s \geqslant 0,$$

где

$$\Gamma(z) = \int\limits_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt$$

— гамма–функция.

Замечание 1.1. *В силу* [19] *дробный интеграл порядка* p *с нижним пределом* a *от функции* $f : [a,\infty) \to X$ *определяется по формуле*

$$I_{a+}^p f(t) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int\limits_a^t \frac{f(s)}{(t-s)^{1-p}}ds, \qquad t > a, \qquad p > 0.$$

Производная Римана — Лиувилля порядка p от функции $f : [a,\infty) \to X$ определяется по формуле

$$D_{a+}^p f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-p)}\frac{d^n}{dt^n} \int\limits_a^t \frac{f(s)}{(t-s)^{p+1-n}}ds, \qquad t > a, \qquad n-1 < p < n.$$

Производная Капуто порядка p от функции $f:[a,\infty)\to X$ определяется по формуле

$$ {}^{C}D^{p}_{a+}f(t)=D^{p}_{a+}\left(f(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^k}{k!}f^{(k)}(0)\right),\qquad t>a,\qquad n-1<p<n. $$

Если $f\in\mathbb{C}^n([a,\infty),X)$, то

$$ {}^{C}D^{p}_{a+}f(t)=\frac{1}{\Gamma(n-p)}\int\limits_a^t\frac{f^{(n)}(s)}{(t-s)^{p+1-n}}ds,\qquad t>a,\qquad n-1<p<n. $$

Замечание 1.2. *В силу* [19] *производная Хильфера порядка* α, $0<\alpha<1$ *и типа* μ, $0\leqslant\mu\leqslant 1$ *с нижним пределом* a *от функции* $f:[a,\infty)\to X$ *определяется по формуле*

$$ D^{\alpha,\mu}_{a+}f(t)=I^{\mu(1-\alpha)}_{a+}\frac{d}{dt}I^{(1-\alpha)(1-\mu)}_{a+}f(t). $$

Замечание 1.3. *При* $\mu=0$, $0\leqslant\alpha\leqslant 1$ *и* $a=0$ *мы получаем производную Римана — Лиувилля:*

$$ D^{\alpha,0}_{0+}f(t)=\frac{d}{dt}I^{1-\alpha}_{0+}f(t)=D^{\alpha}_{0+}f(t). $$

Когда $\mu=1$, $0\leqslant\alpha\leqslant 1$ *и* $a=0$ *мы получаем производную Капуто:*

$$ D^{\alpha,1}_{0+}f(t)=I^{1-\alpha}\frac{d}{dt}f(t)={}^{C}D^{\alpha}_{0+}f(t). $$

Для дифференциальной игры (1.1) дадим следующие определения и постановку задачи преследования в смысле Л.С. Понтрягина.

Определение 1.1. *В игре* (1.1) *из начальной точки* $x_0\in X\setminus M$ *возможно завершение преследования, если существует число* $T=T(x_0)>0$ *такое, что для любого управления убегания* $v(\cdot)\in U([0,\infty),Z)$, *зная уравнение* (1.1) *и величины* x_0 *и* $v(s)$, $0\leqslant s\leqslant t$, *можно выбрать такое управление преследования* $u(\cdot)\in U([0,\infty),Y)$, *что для решения* $x(\cdot)$ *задачи* (1.1), *соответствующего управлениям* $u(\cdot)$ *и* $v(\cdot)$, *выполняется включение* $x(T_1)\in M$, *при некотором* $T_1\in(0,T]$. *В этом случае, число* T *называется гарантированным временем преследования. При этом выбор* $v(t)$ *осуществляется на основании информации о* x_0 *и* $v(t)$.

Задача преследования. Найти множество начальных точек, из которых в игре (1.1) возможно завершение преследования в смысле определения 1.1.

Для дифференциальной игры (1.1) дадим следующие определения и постановку задачи уклонения на промежутке в смысле Л.С. Понтрягина.

Определение 1.2. *В игре* (1.1) *из начальной точки* $x_0\in X\setminus M$ *возможно уклонение на промежутке* $[0,T_0)$, *если при всех* $t\in[0,T_0)$ *и для любого управления преследования* $u(\cdot)\in U([0,T_0),Y)$ *существует такое управление убегания* $v(\cdot)\in U([0,T_0),Z)$, *что для решения* $x(\cdot)$ *задачи* (1.1) *выполняется условие* $x(t)\notin M$. *При этом выбор* $v(t)$ *осуществляется по формуле* $v(t)=w(u(t-\varepsilon))$, *где* $\varepsilon\in(0,T_0)$. *Отображение* $w:Y\to Z$ *такое, что для каждого измеримого отображения* $u(\cdot)$ *суперпозиция* $w(u(\cdot))$ *измерима.*

Задача уклонения. Найти множество начальных точек, из которых в игре (1.1) возможно уклонение на промежутке $[0,T_0)$ в смысле определения 1.2.

2. Основные результаты

Справедлива следующая теорема, которая дает достаточные условия разрешимости задачи преследования.

Теорема 2.1. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) X, Y — *сепарабельные банаховы пространства;*

2) *начальная точка* $x_0 \in X \setminus M$ *такая, что при некотором* $T > 0$ *имеет место включение*

$$S_{\alpha,\mu}(T)x_0 \in M - \int_0^T \bigcap_{v\in Z} K_\alpha(T-s)F(s,Y,v)ds; \tag{2.1}$$

3) *отображение* $F : [0,\infty)\times Y\times Z \to X$ *удовлетворяет условиям Каратеодори, т.е. оно измеримо по* $t \in [0,\infty)$ *и непрерывно по* $(u,v) \in Y\times Z$ *и существует такая локально суммируемая функция* $\eta : [0,\infty) \to [0,\infty)$, *что при всех* $t \in [0,\infty), u \in Y, v \in Z$ *имеет место неравенство* $\|F(t,u,v)\| \leqslant \eta(t)$.

Тогда из начальной точки x_0 *в игре* (1.1) *возможно завершение преследования за время* T.

Доказательство. На основании (2.1) существуют некоторая точка $m \in M$ и интегрируемый селектор $w(\cdot)$ отображения

$$s \to \bigcap_{v\in Z} K_\alpha(T-s)F(s,Y,v), \tag{2.2}$$

что имеет место равенство

$$S_{\alpha,\mu}(T)x_0 = m - \int_0^T w(s)ds. \tag{2.3}$$

В силу того, что X, Y — сепарабельные, отображения (2.2) и $s \to w(s)$ измеримые, а отображение $(s,u,v) \to F(s,u,v)$ непрерывно по (u,v) и измеримо по s, то в силу леммы 1 [11] об измеримом селекторе для любого измеримого управления убегания $v(\cdot) \in U([0,T],Z)$ существует такое измеримое управление преследования $u(\cdot) \in U([0,T],Y)$, что имеет место равенство

$$w(s) = K_\alpha(T-s)F(s,u(s),v(s)) \tag{2.4}$$

для почти всех $s \in [0,T]$.

Следовательно, в силу (2.3), (2.4) для решения $x(\cdot)$ задачи (1.1) соответствующего управлениям $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ имеем:

$$\begin{aligned} x(T) &= S_{\alpha,\mu}(T)x_0 + \int_0^T K_\alpha(T-s)F(s,u(s),v(s))ds \\ &= m - \int_0^T w(s)ds + \int_0^T K_\alpha(T-s)F(s,u(s),v(s))ds \\ &= m - \int_0^T K_\alpha(T-s)F(s,u(s),v(s))ds + \int_0^T K_\alpha(T-s)F(s,u(s),v(s))ds = m \in M, \end{aligned}$$

т.е. $x(T) \in M$.

Поэтому из начальной точки x_0 в игре (1.1) возможно завершение преследования за время T. □

Следующая теорема дает достаточные условия разрешимости задачи уклонения на промежутке.

Теорема 2.2. *Пусть выполнены условия 1) – 3) теоремы 2.1 и следующие условия:*

4) *терминальное множество M выпукло и компактно относительно слабой топологии $\sigma(X, X^*)$ [5];*

5) *многозначное отображение*

$$t \to \int_0^t \bigcap_{v \in Z} K_\alpha(t-s)F(s,Y,v)ds, \qquad t \in [0,T]$$

выпуклозначно и замкнуто относительно слабой топологии $\sigma(X, X^*)$;

6) *существует отображение $w : Y \to Z$ такое, что при всех $u \in Y$, $t \in [0,T]$, $0 \leqslant s \leqslant t$ выполняется включение*

$$K_\alpha(t-s)F(s,u,w(u)) \in \bigcap_{v \in Z} K_\alpha(t-s)F(s,Y,v)$$

и для каждого измеримого $u(\cdot)$ суперпозиция $w(u(\cdot))$ измерима.

Тогда:

1) *из начальной точки x_0 в игре (1.1) возможно завершение преследования за время*

$$T_0 = \min\{T > 0 : \text{ для которых выполняется включение (2.1)}\};$$

2) *из начальной точки x_0 в игре (2.1) возможно уклонение на промежутке $[0, T_0)$.*

Доказательство. 1) В силу условия 4) терминальное множество M компактно, а в силу условия 5) отображение $t \to \int_0^t \bigcap_{v \in Z} K_\alpha(t-s)F(s,Y,v)ds$ замкнуто относительно слабой топологии $\sigma(X, X^*)$. Тогда отображение $t \to M - \int_0^t \bigcap_{v \in Z} K_\alpha(t-s)F(s,Y,v)ds$ секвенциально замкнуто относительно слабой топологии $\sigma(X, X^*)$ [13].

Тогда, в силу непрерывности отображения $t \to S_{\alpha,\mu}(t)x_0$, в силу (2.1) и леммы 2 [13] множество $\{T > 0 :$ для которых выполняется включение (2.1)$\}$ замкнуто. А это означает, что имеет место включение

$$S_{\alpha,\mu}(T_0)x_0 \in M - \int_0^{T_0} \bigcap_{v \in Z} K_\alpha(T_0-s)F(s,Y,v)ds. \tag{2.5}$$

Следовательно, в силу теоремы 2.1 из начальной точки x_0 в игре (1.1) возможно завершение преследования за время T_0.

2) В силу определения числа T_0 заключаем, что при всех $t \in [0, T_0)$ имеет место следующее соотношение

$$\left(S_{\alpha,\mu}(t)x_0 + \int_0^t \bigcap_{v \in Z} K_\alpha(t-s)F(s,Y,v)ds \right) \bigcap M = \varnothing. \tag{2.6}$$

Если $\varepsilon_t \in (0, T_0)$, то значения $v(t)$ управления убегания $v(\cdot)$ на $(0, \varepsilon_t)$ выбираем произвольно, а при $t \in (\varepsilon_t, T_0)$ — специальным образом: $v(t) = w(u(t-\varepsilon_t))$. Тогда для решения $x(t)$

задачи (1.1), соответствующего выбранным управлениям $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ на $(0,T_0)$, имеем:

$$\begin{aligned} x(t) =& S_{\alpha,\mu}(t)x_0 + \int\limits_0^t K_\alpha(t-s)F(s,u(s),v(s))ds \\ =& S_{\alpha,\mu}(t)x_0 + \int\limits_0^{\varepsilon_t} K_\alpha(t-s)F(s,u(s),v(s))ds \\ &+ \int\limits_{\varepsilon_t}^t K_\alpha(t-s)F(s,u(s),w(u(s-\varepsilon_t)))ds. \end{aligned} \tag{2.7}$$

В силу (2.6), условий 4), 5) и согласно теореме о строгой отделимости [5] в локально выпуклом топологическом пространстве X со слабой топологией $\sigma(X,X^*)$ компактное множество M и замкнутое множество $S_{\alpha,\mu}(t)x_0 + \int\limits_0^t \bigcap\limits_{v\in Z} K_\alpha(t-s)F(s,Y,v)ds$ при всех $t\in[0,T_0)$ строго отделимы, т.е. при всех $t\in[0,T_0)$ можно найти такой непрерывный линейный функционал $\varphi_t\in X^*$ и такие числа c_t и $\delta_t>0$, что

$$\varphi_t(x) \leqslant c_t - \delta_t < c_t \leqslant \varphi(m) \tag{2.8}$$

при всех $x\in S_{\alpha,\mu}(t)x_0 + \int\limits_0^t \bigcap\limits_{v\in Z} K_\alpha(t-s)F(s,Y,v)ds$ и $m\in M$.

Если $\overline{w}(\cdot)$ — произвольный интегрируемый селектор отображения

$$s \to \bigcap_{v\in Z} K_\alpha(t-s)F(s,Y,v), \quad s\in(0,\varepsilon_t],$$

то на основании 6), (2.7) и (2.8) имеем:

$$\begin{aligned} \varphi_t(x(t)) =& \varphi_t\left(S_{\alpha,\mu}(t)x_0 + \int\limits_0^{\varepsilon_t} K_\alpha(t-s)F(s,u(s),v(s))ds \right. \\ &\left. + \int\limits_{\varepsilon_t}^t K_\alpha(t-s)F(s,u(s),w(u(s-\varepsilon_t)))ds \right) \\ =& \varphi_t\left(S_{\alpha,\mu}(t)x_0 + \int\limits_0^{\varepsilon_t} \overline{w}(s)ds - \int\limits_0^{\varepsilon_t} \overline{w}(s)ds + \int\limits_0^{\varepsilon_t} K_\alpha(t-s)F(s,u(s),v(s))ds \right. \\ &\left. + \int\limits_{\varepsilon_t}^t K_\alpha(t-s)F(s,u(s),w(u(s-\varepsilon_t)))ds \right) \\ =& \varphi_t\left(S_{\alpha,\mu}(t)x_0 + \int\limits_0^{\varepsilon_t} \overline{w}(s)ds + \int\limits_{\varepsilon_t}^t K_\alpha(t-s)F(s,u(s),w(u(s-\varepsilon_t)))ds \right) \\ &+ \varphi_t\left(\int\limits_0^{\varepsilon_t} K_\alpha(t-s)F(s,u(s),v(s))ds - \int\limits_0^{\varepsilon_t} \overline{w}(s)ds \right) \\ \leqslant& c_t - \delta_t + \int\limits_0^{\varepsilon_t} \varphi_t\left(K_\alpha(t-s)F(s,u(s),v(s)) - \overline{w}(s)\right)ds \end{aligned}$$

В силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега [6] существует число $\varepsilon_t = \theta_t > 0$ такое, что

$$\left| \int_0^{\theta_t} \varphi_t \left(K_\alpha(t-s) F(s, u(s), v(s)) - \overline{w}(s) \right) ds \right| < \frac{\delta_t}{2}.$$

Следовательно,

$$\varphi_t(x(t)) \leqslant c_t - \delta_t + \frac{\delta_t}{2} = c_t - \frac{\delta_t}{2} < c_t \leqslant \varphi_t(m).$$

Поэтому при всех $t \in [0, T_0)$ число $\varepsilon_t = \theta_t > 0$ и соответствующее ему управление $v(\cdot)$ можно выбрать таким образом, что $x(t) \notin M$, что и доказывает возможность уклонения на промежутке $[0, T_0)$. Теорема доказана. □

3. Пример

В сепарабельном рефлексивном банаховом пространстве X рассмотрим дифференциальную игру с производной Капуто

$$y'(t) + bD^{0,5}y(t) = -\overline{u} + \overline{v} \tag{3.1}$$

с начальной точкой $y(0) = y_0 \in X$, $\|y_0\| > 0$ и терминальным множеством $M_1 = 0$. Предполагается, что $t \geqslant 0$, $b \neq 0$ — действительное число, измеримые управления преследования $\overline{u} = \overline{u}(t)$ и убегания $\overline{v} = \overline{v}(t)$ удовлетворяют соотношениям $\overline{u}(t) \in Y = \{y : \|y\| \leqslant \rho\} = S_\rho$ — шар с радиусом ρ и центром 0, $\overline{v}(t) \in Z = \{z : \|z\| \leqslant \sigma\} = S_\sigma$, $\rho > \sigma > 0$.

Положив

$$x_1 = y, \qquad x_2 = D^{0,5}x_1, \qquad D^{0,5}x_2 = D^{0,5}D^{0,5}x_1 = x_1' = y'$$

игру (3.1) перепишем в виде

$$\begin{cases} D^{0,5}x_1 = x_2, \\ D^{0,5}x_2 = -bx_2 - \overline{u}(t) + \overline{v}(t) \end{cases}$$

или в виде

$$D^{0,5}x = Ax - u + v \tag{3.2}$$

с начальным условием $x(0) = \begin{pmatrix} y_0 \\ 0 \end{pmatrix}$ и терминальным множеством

$$M = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : x_1 = 0 \right\},$$

где

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -b \end{pmatrix}, \qquad u = \begin{pmatrix} 0 \\ \overline{u} \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} 0 \\ \overline{v} \end{pmatrix}.$$

В нашем примере $\mu = 1$, $\alpha = 0,5$, $I_{0+}^{(1-\alpha)(1-\mu}} = I$ — единичный оператор, A — линейный ограниченный оператор, который порождает сильно непрерывную группу $S(t) = e^{At}$.

В силу [19], [17] и используя преобразование Лапласа получим:

$$\begin{aligned} S_{0,5;1}(t) =& I_{0+}^{0,5} K_{0,5}(t) = \frac{1}{\Gamma(0,5)} \int\limits_0^t \frac{K_{0,5}(s)}{(t-s)^{0,5}} ds = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \frac{s^{-0,5} P_{0,5}(s)}{(t-s)^{0,5}} ds \\ =& \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t [s(t-s)]^{-0,5} \left(\int\limits_0^\infty 0,5 \cdot \theta \cdot M_{0,5}(\theta) S(s^{0,5}\theta) d\theta \right) ds \\ =& \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t [s(t-s)]^{-0,5} \left(\int\limits_0^\infty \theta \cdot \sum_{n=1}^\infty \frac{(-\theta)^{n-1}}{(n-1)!\Gamma(1-0,5n)} e^{s^{0,5}\theta A} d\theta \right) ds \\ =& \sum_{n=0}^\infty \frac{(At^{0,5})^n}{\Gamma(0,5n+1)} = E_2(At^{0,5}; 1) \end{aligned} \tag{3.3}$$

— обобщенная функция Миттаг–Леффлера;

$$\begin{aligned} K_{0,5}(t-s) =& (t-s)^{-0,5} P_{0,5}(t-s) = (t-s)^{-0,5} \int\limits_0^\infty 0,5 \cdot \theta \cdot M_{0,5}(\theta) S((t-s)^{0,5}\theta) d\theta \\ =& \frac{1}{2}(t-s)^{0,5} \int\limits_0^\infty \theta \cdot \sum_{n=1}^\infty \frac{(-\theta)^{n-1}}{(n-1)!\Gamma(1-0,5n)} e^{(t-s)^{0,5}\theta A} d\theta \\ =& (t-s)^{0,5} \sum_{n=0}^\infty \frac{(A(t-s)^{0,5})^n}{\Gamma(0,5n+0,5)} \\ =& (t-s)^{0,5} \cdot E_2(A(t-s)^{0,5}; 0,5). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Для нашего примера в силу (3.3) и (3.4) включение (2.1) примет вид:

$$E_2(AT^{0,5}; 1)x_0 \in M + \int\limits_0^T \bigcap_{v \in \tilde{Z}} (T-s)^{0,5} E_2(A(T-s)^{0,5}; 0,5)(\tilde{Y} - v) ds, \tag{3.5}$$

где

$$\tilde{Z} = \begin{pmatrix} 0 \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ S_\sigma \end{pmatrix} = \tilde{S}_\sigma, \qquad \tilde{Y} = \begin{pmatrix} 0 \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ S_\rho \end{pmatrix} = \tilde{S}_\rho.$$

В силу того, что

$$E_2(z; 1) = e^{z^2} \operatorname{erfc}(-z)$$

и

$$E_2(z; 0,5) = zE_2(z; 1) + \frac{1}{\Gamma(0,5)} = ze^{z^2} \operatorname{erfc}(-z) + \frac{1}{\sqrt{\pi}},$$

где

$$\operatorname{erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_z^\infty e^{-t^2} dt$$

— дополнительная функция ошибок [17], имеем:

$$E_2(AT^{0,5}; 1) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(AT^{0,5})^n}{\Gamma(n \cdot 0,5 + 1)}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} I + \ldots + \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{T^{0,5n} \cdot b^{n-1}}{\Gamma(n \cdot 0,5+1)} \\ 0 & \dfrac{T^{0,5n} \cdot b^{n}}{\Gamma(n \cdot 0,5+1)} \end{pmatrix} I + \ldots$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & b^{-1}E_2(bT^{0,5};1) - b^{-1} \\ 0 & E_2(bT^{0,5};1) \end{pmatrix} I$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & b^{-1}[e^{b^2T}\operatorname{erfc}(-bT^{0,5})] - b^{-1} \\ 0 & e^{b^2T}\operatorname{erfc}(-bT^{0,5}) \end{pmatrix} I,$$

$$E_2(A(T-s)^{0,5};0,5) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A(T-s)^{0,5})^n}{\Gamma(n \cdot 0,5+0,5)}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(0,5)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \ldots + \frac{(T-s)^{0,5n}}{\Gamma(n \cdot 0,5+0,5)} \begin{pmatrix} 0 & b^{n-1} \\ 0 & b^n \end{pmatrix} + \ldots$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\pi}} & b^{-1}E_2(b(T-s)^{0,5};0,5) - \frac{1}{b\sqrt{\pi}} \\ 0 & E_2(b(T-s)^{0,5};0,5) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\pi}} & (T-s)^{0,5}e^{(T-s)b^2}\operatorname{erfc}(-b(T-s)^{0,5}) \\ 0 & b(T-s)^{0,5}e^{(T-s)b^2}\operatorname{erfc}(-b(T-s)^{0,5}) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \end{pmatrix}.$$

Если

$$\pi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1$$

и

$$A \overset{*}{-} B = C = \{c : c + B \subset A\}$$

— геометрическая разность, то имеем:

$$\pi E_2(AT^{0,5};1)x_0 = \pi E_2(AT^{0,5};1) \begin{pmatrix} y_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \pi \begin{pmatrix} y_0 \\ 0 \end{pmatrix} = y_0, \qquad \pi M = 0,$$

$$\bigcap_{v \in \tilde{Z}} \pi(T-s)^{-0,5}E_2(A(T-s)^{0,5};0,5)(\tilde{Y} - v)$$

$$= (T-s)^{-0,5}\pi E_2(A(T-s)^{0,5};0,5)\tilde{S}_\rho \overset{*}{-} (T-s)^{-0,5}\pi E_2(A(T-s)^{0,5};0,5)\tilde{S}_\sigma$$

$$= (T-s)^{-0,5}\pi \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\pi}} & (T-s)^{0,5}e^{(T-s)b^2}\operatorname{erfc}(-b(T-s)^{0,5}) \\ 0 & b(T-s)^{0,5}e^{(T-s)b^2}\operatorname{erfc}(-b(T-s)^{0,5}) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ S_\rho \end{pmatrix}$$

$$\overset{*}{-} (T-s)^{-0,5}\pi \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\pi}} & (T-s)^{0,5}e^{(T-s)b^2}\operatorname{erfc}(-b(T-s)^{0,5}) \\ 0 & b(T-s)^{0,5}e^{(T-s)b^2}\operatorname{erfc}(-b(T-s)^{0,5}) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ S_\sigma \end{pmatrix}$$

$$= e^{(T-s)b^2}\operatorname{erfc}(-b(T-s)^{0,5})S_\rho \overset{*}{-} e^{(T-s)b^2}\operatorname{erfc}(-b(T-s)^{0,5})S_\sigma$$

$$= e^{(T-s)b^2}\operatorname{erfc}(-b(T-s)^{0,5})S_{\rho-\sigma} = S_{(\rho-\sigma)e^{(T-s)b^2}\operatorname{erfc}(-b(T-s)^{0,5})}$$

Поэтому включение (3.5) примет вид:

$$y_0 \in \int_0^T S_{(\rho-\sigma)e^{(T-s)b^2}\operatorname{erfc}(-b(T-s)^{0,5})}\, ds = S_{(\rho-\sigma)\int_0^T e^{(T-s)b^2}\operatorname{erfc}(-b(T-s)^{0,5})\, ds}$$

$$= S_{(\rho-\sigma)\left(\frac{e^{b^2T}}{b^2}\operatorname{erfc}(-b\sqrt{T}) - \frac{1}{b^2} - \frac{2\sqrt{T}}{b\sqrt{\pi}}\right)} = S_{r(T)},$$

где

$$r(t) = (\rho - \sigma)\left(\frac{e^{b^2 t}}{b^2}\operatorname{erfc}(-b\sqrt{t}) - \frac{1}{b^2} - \frac{2\sqrt{t}}{b\sqrt{\pi}}\right)$$

— положительная и возрастающая функция, так как $r(0) = 0$ и $r'(t) > 0$ при всех $t > 0$. С другой стороны известно, что $1 \geqslant \operatorname{erfc} x > 0$, когда $x \geqslant 0$, и $2 \geqslant \operatorname{erfc} x > 1$, когда $x < 0$. Поэтому, при $b > 0$ и $\|y_0\| = r_0$ существует такое $t = t_1$, что

$$r(t_1) = (\rho - \sigma)\left(\frac{e^{b^2 t_1}}{b^2}\operatorname{erfc}(-b\sqrt{t_1}) - \frac{1}{b^2} - \frac{2\sqrt{t_1}}{b\sqrt{\pi}}\right) > (\rho - \sigma)\left(\frac{e^{b^2 t_1}}{b^2} - \frac{1}{b^2} - \frac{2\sqrt{t_1}}{b\sqrt{\pi}}\right) \geqslant r_0,$$

а при $b < 0$ существует такое $t = t_2$, что

$$r(t_2) > (\rho - \sigma)\left(-\frac{1}{b^2} - \frac{2\sqrt{t_2}}{b\sqrt{\pi}}\right) \geqslant r_0.$$

Следовательно, для любой начальной точки y_0 существует такое $T > 0$, что имеет место включение

$$y_0 \in S_{r(T)}. \tag{3.6}$$

В силу того, что шар $S_{r(T)}$ есть замкнутое множество, то включение (3.6) имеет место и при $T = T_0 = \min\{T > 0 :$ выполняется включение (3.6)$\}$.

Этим мы доказали, что имеет место условие 2) теоремы 2.1. Условия 1) и 3) очевидны. Условия 4) и 5) выполняются, потому что в рефлексивном пространстве шары слабо компактны. Условие 6) следует из того, что в качестве отображения w можно брать отображение задаваемое формулой $w = v(u) = \dfrac{e}{\|e\|}\alpha_0\sigma$, когда $u = \dfrac{e}{\|e\|}\alpha_0\rho$, где $0 \leqslant \alpha_0 \leqslant 1$.

Следовательно,

1) в игре (3.1) из любой начальной точки y_0 возможно завершение преследования за время

$$T_0 = \min\{T > 0 : \|y_0\| = r(T_0)\}.$$

При этом управление преследования $\overline{u}(\cdot)$ выбирают по формуле

$$\overline{u}(s) = \frac{\sqrt{\pi}e^{-(T_0 - s)b^2}}{2T_0 \displaystyle\int_{-b(T_0-s)^{0,5}}^{\infty} e^{-t^2}dt}y_0 + \overline{v}(s), \qquad 0 < s \leqslant T_0;$$

2) в игре (3.1) из любой начальной точки y_0 возможно уклонение на промежутке $[0, T_0)$.

4. Заключение

В настоящей работе даны достаточные условия разрешимости задачи преследования за время T_0 и достаточные условия разрешимости задачи уклонения на конечном промежутке $(0, T_0)$, когда динамика игры описывается дифференциальным уравнением дробного порядка с производными Хильфера. Решена одна игровая задача, описывающая процесс релаксации при стеклообразовании переохлажденных жидкостей. Полученные результаты обобщают конечномерный результат работы [10] и бесконечномерный результат работы [14].

Эти результаты могут быть использованы в математической теории управляемых процессов, протекающих в условиях конфликта или неопределенности и при решении игровых задач, динамика которых описывается дифференциальными уравнениями в подходящих банаховых пространствах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А.Я. Азимов. *Об одном способе преследования в линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями* // Изв. акад. наук СССР, Тех. киберн. **1974**:2, 31–35 (1974).
2. Х.Н. Алимов, М.Ш. Маматов. *О задаче преследования, описываемой дробными дифференциальными уравнениями* // Научн. вестн. Самарканд. гос. унив. 1, 5–9 (2016).
3. Л.В. Барановская. *Метод разрешающих функций для одного класса задач преследования* // Восточно–Европейский журнал передовых технологий: Математика и кибернетика – прикладные аспекты **2**:4 (74), 4–8 (2015).
4. П.Б. Гусятников, М.С. Никольский. *Об оптимальности времени преследования* // Докл. акад. наук СССР **184**:3, 518–521 (1969).
5. Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. *Функциональный анализ.* М.: Наука. 1977.
6. А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. *Элементы теории функций и функционального анализа.* М.: Наука 1972.
7. Н.Н. Красовский, А.И. Субботин. *Позиционные дифференциальные игры.* М.: Наука. 1974.
8. Н.А. Мамадалиев. *Об одной линейной задаче преследования при наличии запаздывания* // Сиб. ж. индустр. мат. **13**:3, 86–100 (2010).
9. Н.А. Мамадалиев, Т.Т. Ибайдуллоев. *Модификация третьего метода преследования для дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа* // Изв. высш. учебн. завед. мат. 11, 21–33 (2021).
10. М.Ш. Маматов. *Задача преследования, описываемая дифференциальными уравнениями дробного порядка* // Актуал. пробл. гуманитар. и естеств. наук 04(87), часть 1, 28–32 (2016).
11. Е.М. Мухсинов. *О задаче преследования для квазилинейной дифференциальной игры нейтрального типа* // Дифф. уравн. проц. упр. **2022**:2, 66–82 (2022).
12. Е.М. Мухсинов. *Об одной дифференциальной игре нейтрального типа с интегральными ограничениями в гильбертовом пространстве* // Уфимск. мат. ж. **14**:3, 90–100 (2022).
13. Е.М. Мухсинов. *Разрешимость задачи преследования для одной дифференциальной игры в банаховом пространстве* // Дифф. уравн. **59**:1, 142–146 (2023).
14. Е.М. Мухсинов, Р.И. Хакимов. *Задача преследования для одной дифференциальной игры* // в материалах международной научной конференции «Уфимская осенняя математическая школа». Уфа: Аэтерна. **2**, 123–124 (2024).
15. Л.С. Понтрягин. *Линейные дифференциальные игры преследования* // Мат. сб. **112(154)**:3(7), 307–331 (1980).
16. Н.Ю. Сатимов. *К методам решения задачи преследования в дифференциальных играх* // Докл. акад. наук Уз. ССР. 11, 8–11 (1990).
17. А.А. Чикрий, И.И. Матичин. *О линейных конфликтно-управляемых процессах с дробными производными* // Тр. Инст. мат. мех. УрО РАН. **17**:2, 256–270 (2011).
18. Э. Хилле, Р. Филлипс. *Функциональный анализ и полугруппы.* М.: ИИЛ. 1962.
19. H.B. Gu, J.J. Trujillo. *Existence of mild solution for evolution equation with Hilfer fractional derivative* // Appl. Math. Comput. **257**, 344–354 (2015).

Едгор Мирзоевич Мухсинов,
Таджикский государственный университет права, бизнеса и политики,
ул. Панфилова, 1,
735700, г. Худжанд, Республика Таджикистан
E-mail: yodgor.mukhsinov@gmail.com

Рахматджон Иномович Хакимов,
Худжандский государственный университет имени академика Б. Гафурова,
проезд Мавлонбекова, 1,
735700, г. Худжанд, Республика Таджикистан
E-mail: rahmatjon@gmail.com