ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 18 № 3 (2026). С. 41-49.

УДК 514.174.5

ТРИАНГУЛЯЦИЯ ПЛОСКИХ ОБЛАСТЕЙ, ЗАДАННЫХ СИСТЕМОЙ НЕРАВЕНСТВ

А.А. КЛЯЧИН

Аннотация. В работе представлен метод построения триангуляции плоской, в общем случае многосвязной, области, которая задается системой неравенств. Основная идея данного подхода заключается в следующем. На первом шаге осуществляется построение стандартной триангуляции по прямоугольной сетке некоторого многоугольника, лежащего в заданной области. На втором шаге крайние узлы полученной триангуляции методом градиентного спуска сдвигаются на границу области. Доказывается, что синусы углов треугольников такой триангуляции не стремятся к нулю (треугольники не вырождаются) при стремлении к нулю их диаметров, если заданная область имеет гладкую границу.

Ключевые слова: триангуляция, метод градиентного спуска, качество триангуляции.

Mathematics Subject Classification: 51N20, 51M15

1. Введение

Пусть задан конечный набор точек $\{P_i\}_{i=1}^m$ на плоскости $\mathbb{R}^2$. Триангуляцией данного набора точек называется совокупность невырожденных треугольников $\mathcal{T} = \{T_j\}_{j=1}^N$ такая, что

1) вершины треугольников принадлежат множеству точек $\{P_i\}_{i=1}^m$ и любая точка P_i является вершиной хотя бы одного треугольника;
2) треугольники либо имеют общую вершину, либо общее ребро, либо не имеют общих точек.

Через $\alpha(\mathcal{T})$ обозначим минимальный синус углов всех треугольников триангуляции $\mathcal{T}$.

Отметим, что всякая точка P_i является вершиной некоторого набора треугольников из триангуляции $\mathcal{T}$. Если сумма углов при вершине P_i по таким треугольникам равна 2π, то узел P_i будем называть внутренним узлом триангуляции. В противном случае узел назовем крайним.

Пусть Ω ограниченная область в $\mathbb{R}^2$. Триангуляцией области Ω называется триангуляция произвольного конечного набора точек, лежащего в замыкании области Ω. Есть несколько подходов к построению расчетной треугольной сетки (триангуляции). Например, можно взять конечное число точек, лежащих в $\overline{\Omega}$, и сформировать на их основе триангуляцию одним из соответствующих алгоритмов (см., например, [17], [18], [11]). Существуют и другие способы, в которых применяются либо вариационные принципы, либо разрезание области (или ее границы) на простые части, либо решение различных краевых задач и т. д.(см., например, [1], [15], [6], [2], [8], [16], [7], [12]).

Мы предлагаем несколько иной подход, который заключается в следующем. Будем считать, что область Ω задана с помощью системы неравенств. В качестве начальной триангуляции области берется триангуляция, построенная на основе прямоугольной сетки

A.A. Klyachin, Triangulation of planar domains defined by system of inequalities.

© Клячин А.А. 2026.

Поступила 20 марта 2025 г.

плоскости. В эту триангуляцию включатся треугольники, вершины которых попадают в область. После этого, все крайние узлы начальной триангуляции сдвигаются на границу области методом градиентного спуска. Отметим, что градиенты здесь вычисляются для функций, определяющих границу области. Подход, связанный со сдвигом крайних узлов на границу области не является новым. Например, он был применен для построения пространственной сетки в работе [22]. Отличие нашего алгоритма заключается в том, что в этой работе область задается только одним неравенством и несколько иначе осуществляется сам сдвиг крайних узлов на границу области.

Отметим, что в роли числовой характеристики, отвечающей за качество триангуляции, мы рассматриваем минимальный синус углов треугольников триангуляции. Нужно отметить, что синусы углов треугольника существенно влияют на степень погрешности вычисления функции и ее производных при их приближении кусочно–полиномиальными функциями в этом треугольнике (см. работы [21], [19], [20], [13], [14], [3], [4], [10], [9]).

2. Описание алгоритма

Рассмотрим разбиение плоскости (x, y) прямыми $x = ih$, $y = jh$, где $i, j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ и h — произвольное положительное число. Предположим, что для всех x, y определены непрерывные функции $F_1(x, y), \ldots, F_p(x, y)$, которые задают область

$$\Omega = \{(x, y) : F_i(x, y) < 0 \quad \forall\, i = 1, \ldots, p\}.$$

Пример такой области приведен на рисунке 1. В этом примере область задается неравенствами

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{16} - 1 < 0, \\ 4 - (x-3)^2 - y^2 < 0, \\ 4 - (x+3)^2 - y^2 < 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

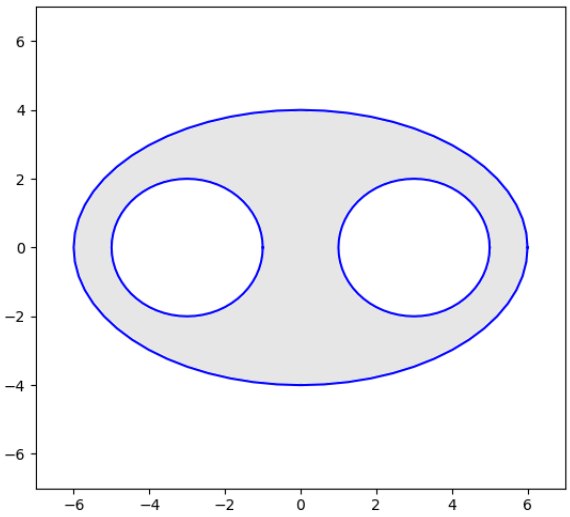


Рис. 1. Область, заданная системой неравенств (2.1)

Будем строить начальную триангуляцию следующим образом. Рассмотрим квадрат с вершинами (ih, jh), $((i+1)h, jh)$, $(ih, (j+1)h)$, $((i+1)h, (j+1)h)$. Если все вершины такого квадрата попадают в область Ω, то в триангуляцию включаем два треугольника, которые получаются разбиением квадрата одной из его диагоналей. Выбор диагонали опишем

позже. Если в области Ω оказываются только 3 вершины этого квадрата, то в триангуляцию включаем треугольник, который образуют эти вершины. В остальных случаях такой квадрат не используем для построения триангуляции. Пусть $\{P_i = (x_i, y_i)\}_{i=1}^{m}$ — множество узлов построенной триангуляции, а $\mathcal{T}_h = \{T_k\}_{k=1}^{N}$ — все ее треугольники.

Построенная начальная триангуляция (см. рисунок 2) не будет, вообще говоря, приближать границу области $\partial\Omega$, так как стороны треугольников триангуляции $\mathcal{T}_h$ либо параллельны осям координат, либо образуют с ними угол $\frac{\pi}{4}$. Для того, чтобы триангуляция хорошо аппроксимировала границу $\partial\Omega$, выполним следующие преобразования. Во всех треугольниках T_k, в которых есть вершины P_i, являющиеся крайними узлами триангуляции $\mathcal{T}_h$, заменим эти вершины на ближайшую точку $P_i' \in \partial\Omega$. Таким образом, точка $P_i' \in \partial\Omega$ определяется равенством

$$|P_i - P_i'| = \operatorname{dist}(P_i, \partial\Omega).$$

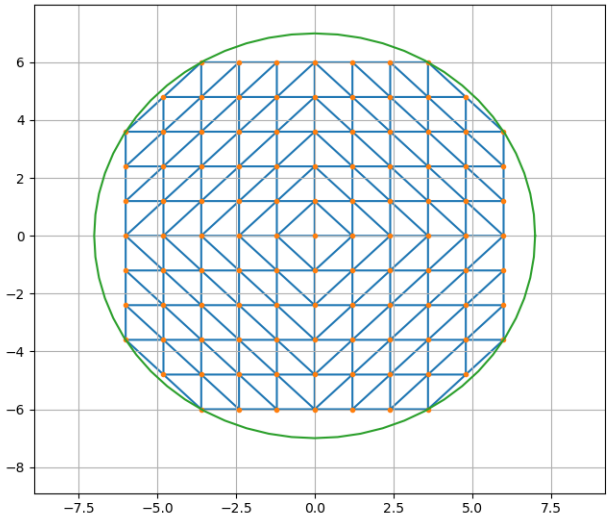


Рис. 2. Начальная триангуляция круга $x^2 + y^2 - 49 < 0$

Получаем новую триангуляцию ${\mathcal{T}^*}_h$, которая помимо внутренних точек области Ω будет содержать узлы, лежащие на $\partial\Omega$. Отметим, что точки P_i' приближенно можно рассчитать методом градиентного спуска. Если точка P_i' находится на той части границы $\partial\Omega$, которая описывается уравнением $F_l(x, y) = 0$, $l = 1, \ldots, m$, то положим $P_i^{(0)} = P_i$ и

$$P_i^{(n+1)} = P_i^{(n)} - \delta \cdot F_l(P_i^{(n)}) \nabla F_l(P_i^{(n)}), \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots. \tag{2.2}$$

где $\delta > 0$ — шаг градиентного спуска. В качестве P_i' берем некоторое приближение, вычисленное по формуле (2.2).

Поясним теперь способ выбора диагонали, разбивающей квадраты на два треугольника. При построении начальной триангуляции может возникнуть ситуация, когда у некоторого треугольника все его вершины будут крайними узлами триангуляции. В этом случае, при сдвиге этих узлов на границу области треугольник будет почти вырожденным для малых значений h. Чтобы избежать этого, мы будем проводить диагональ в квадрате следующим образом. Пусть точка Q является центром квадрата, а Q' — ближайшая к ней точка границы $\partial\Omega$. Предположим точка Q' принадлежит той части границы, которая задается уравнением $F_l(x, y) = 0$. Тогда возьмем ту диагональ квадрата, которая образует меньший угол с вектором градиента функции $\nabla F_l(Q)$.

3. Обоснование алгоритма

Покажем, что при выбранном способе триангуляции в пределе при $h \to 0$ не будут получаться вырожденные треугольники. Для этого приведем доказательство того, что при $h \to 0$ величина $\alpha(\mathcal{T}^*{}_h)$ остается отделенной от нуля некоторым положительным числом.

Рассмотрим вначале частный случай, когда область Ω представляет собой полуплоскость, граница которой прямая L. Отметим, что узел $P_i = (x_i, y_i)$ начальной триангуляции $\mathcal{T}_h$ является внутренним тогда и только тогда, когда точки $(x_i - h, y_i)$, $(x_i + h, y_i)$, $(x_i, y_i - h)$, $(x_i, y_i + h)$ лежат в области Ω.

Пусть некоторый треугольник T_k начальной триангуляции $\mathcal{T}_h$ имеет две вершины A и B, которые являются крайними узлами триангуляции, а третья вершина C является внутренним узлом. Обозначим через A' и B' проекции точек A и B на прямую L. Покажем, что верно неравенство

$$|A' - B'| \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}|A - B|. \tag{3.1}$$

Предположим сначала, что AB — катет треугольника T_k. Тогда угол между отрезком AB и прямой L не может быть больше чем $\frac{\pi}{4}$. Действительно, предположим противное. Рассмотрим прямую L', параллельную прямой L и проходящую через точку A (см. рисунок 3). Если угол $\angle BAE$, $E \in L'$, больше чем $\frac{\pi}{4}$, то точка D будет лежать в полуплоскости Ω. Следовательно, вершина B не может быть крайним узлом триангуляции $\mathcal{T}_h$. Приходим к противоречию.

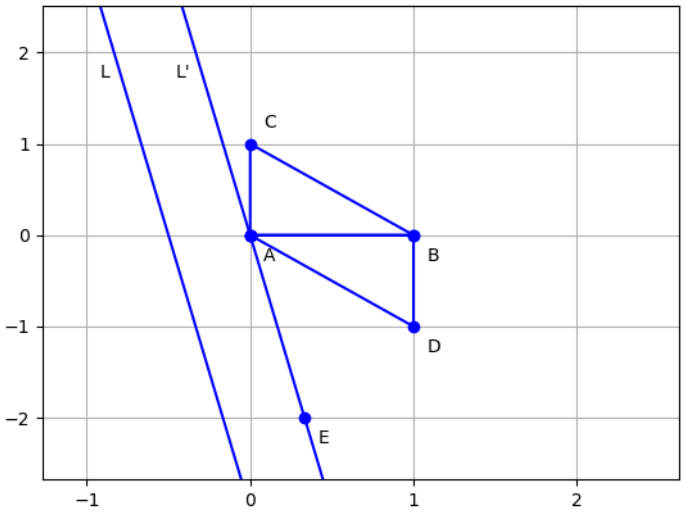


Рис. 3. Случай, когда AB — катет треугольника T_k

Предположим теперь, что AB — гипотенуза треугольника T_k. Тогда угол между отрезком AB и прямой L также не может быть больше чем $\frac{\pi}{4}$. Действительно, предположим противное. Рассмотрим прямую L', параллельную прямой L и проходящую через точку A (см. рисунок 4). Если угол $\angle BAE$, $E \in L'$, больше чем $\frac{\pi}{4}$, то точка D будет лежать в полуплоскости Ω. Следовательно, вершина B не может быть крайним узлом триангуляции $\mathcal{T}_h$. Опять приходим к противоречию.

Итак, угол между отрезком AB и прямой L не превосходит $\frac{\pi}{4}$. Отсюда легко получается неравенство (3.1). Дальнейшие рассуждения одинаковы и для катета и для гипотенузы.

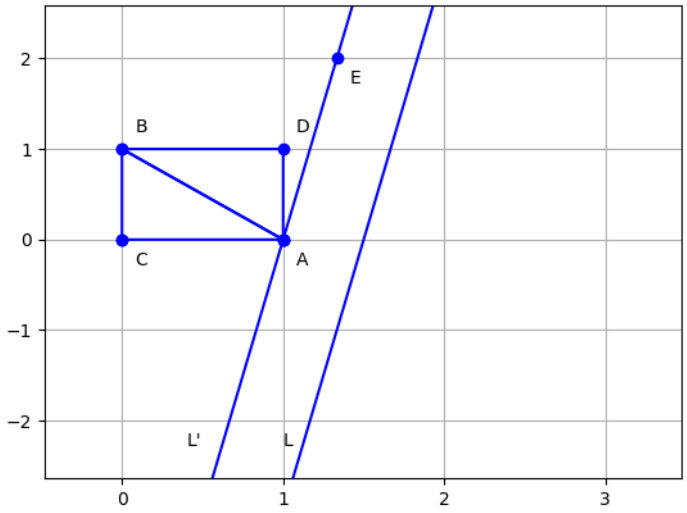


Рис. 4. Случай, когда AB — гипотенуза треугольника T_k

Отметим, что расстояние от третьей вершины C до прямой L удовлетворяет неравенству

$$\operatorname{dist}(C, L) \geqslant \frac{h}{\sqrt{2}}. \tag{3.2}$$

С другой стороны

$$\operatorname{dist}(C, L) \leqslant |C - A| + |A - A'| \leqslant 2h.$$

Оценим теперь сверху расстояния от C до A' и от C до B'. Из неравенства треугольника получаем

$$|C - A'| \leqslant |C - A| + |A - A'| \leqslant h\sqrt{2} + h = (1 + \sqrt{2})h.$$

Тогда

$$\sin \angle CA'B' = \frac{\operatorname{dist}(C, L)}{|C - A'|} \geqslant \frac{\frac{h}{\sqrt{2}}}{(1 + \sqrt{2})h} = \frac{1}{2 + \sqrt{2}}.$$

Аналогично,

$$\sin \angle CB'A' = \frac{\operatorname{dist}(C, L)}{|C - B'|} \geqslant \frac{\frac{h}{\sqrt{2}}}{(1 + \sqrt{2})h} = \frac{1}{2 + \sqrt{2}}.$$

Используя теорему синусов, приходим к нижней оценке и для угла $\angle A'CB'$:

$$\sin \angle A'CB' = \frac{|A' - B'|}{|C - A'|} \cdot \sin \angle CB'A' \geqslant \frac{\frac{h}{\sqrt{2}}}{(1 + \sqrt{2})h} \cdot \frac{1}{2 + \sqrt{2}} = \frac{1}{(2 + \sqrt{2})^2}.$$

Рассмотрим теперь случай, когда у треугольника T_k только одна вершина C является крайним узлом триангуляции $\mathcal{T}_h$, а вершины A и B являются внутренними. Будем для определенности предполагать, что вершина C у прямого угла треугольника T_k. Обозначим через C' ортогональную проекцию точки C на прямую L. В этом случае узлы триангуляции H и D лежат в полуплоскости Ω (см. рисунок 5). А так как точка C — крайний узел триангуляции, то одна из точек G или E (или обе) не лежит в Ω. Отметим, что расстояние от точки C' до прямой AB не меньше, чем $\dfrac{h}{\sqrt{2}}$.

Оценим синусы углов треугольника $\Delta ABC'$. Высота этого треугольника, проведенная из вершины C', не меньше чем $\dfrac{h}{\sqrt{2}}$, а $|C' - A| \leqslant |C' - C| + |C - A| \leqslant 2h$. Следовательно,

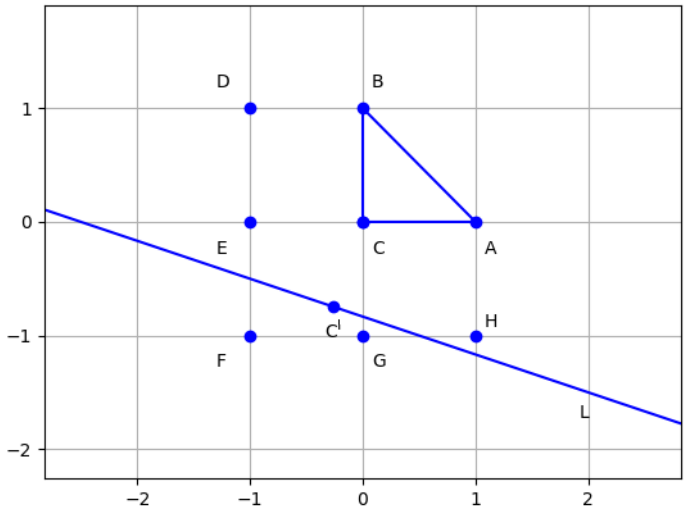


Рис. 5. Случай, когда C является крайним узлом начальной триангуляции

$\sin\angle C'AB \geqslant \frac{1}{2\sqrt{2}}$. Аналогично получаем, что $\sin\angle C'BA \geqslant \frac{1}{2\sqrt{2}}$. Применяя теорему синусов для треугольника $\Delta ABC'$, приходим к неравенству

$$\sin\angle AC'B = \frac{|A-B|}{|C'-B|}\cdot\sin\angle C'AB \geqslant \frac{h\sqrt{2}}{2h}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{4} \geqslant \frac{1}{(2+\sqrt{2})^2}.$$

Аналогично рассматривается случай, когда вершина C не у прямого угла. Отличие лишь в том, что $|A-B| = h$ и, поэтому,

$$\sin\angle AC'B = \frac{|A-B|}{|C'-B|}\cdot\sin\angle C'AB \geqslant \frac{h}{2h}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \geqslant \frac{1}{(2+\sqrt{2})^2}.$$

Тем самым, нами доказана

Теорема 3.1. *Если область Ω является полуплоскостью с границей L, то для триангуляции ${\mathcal{T}^*}_h$, построенной по начальной триангуляции $\mathcal{T}_h$, выполняется неравенство*

$$\alpha({\mathcal{T}^*}_h) \geqslant \frac{1}{(2+\sqrt{2})^2}. \tag{3.3}$$

Полученная оценка (3.3) для произвольной области с гладкой границей $\partial\Omega$ будет выполняться только в пределе при $h \to 0$. Это следует из того, что при достаточно малом h граница в окрестности крайних узлов с точностью до 2-го порядка малости, будет прямолинейным отрезком, а во всех вышеприведенных рассуждениях мы рассматривали только ограниченное число ячеек квадратной сетки. На этом основании мы можем сформулировать следующее утверждение.

Теорема 3.2. *Если область Ω имеет гладкую границу $\partial\Omega$, то для триангуляции ${\mathcal{T}^*}_h$, построенной по начальной триангуляции $\mathcal{T}_h$, выполняется неравенство*

$$\liminf_{h\to 0}\alpha({\mathcal{T}^*}_h) \geqslant \frac{1}{(2+\sqrt{2})^2}. \tag{3.4}$$

4. Примеры построения триангуляции

В настоящем параграфе мы приведем примеры построения триангуляции различных многосвязных областей методом, описанным в предыдущих разделах статьи.

Пример 4.1. *Пусть область* Ω *задана системой неравенств*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 49 < 0, \\ 1 - |x| - |y| < 0, \\ 1 - (x-3)^2 - (y-3)^2 < 0, \\ 1 - (x+3)^2 - (y-3)^2 < 0, \\ 1 - (x+3)^2 - (y+3)^2 < 0, \\ 1 - (x-3)^2 - (y+3)^2 < 0. \end{cases} \tag{4.1}$$

На рисунке 6 изображена триангуляция данной области с шагом $h = 0.6$.

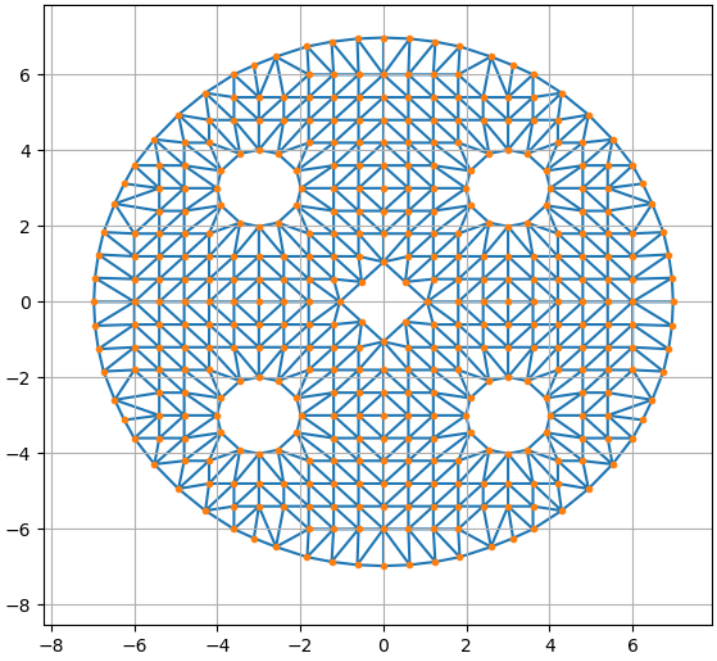


Рис. 6. Триангуляция области, заданной неравенствами (4.1)

Пример 4.2. *Рассмотрим область, заданную системой неравенств (2.1). Для построения триангуляции этой области был выбран меньший шаг* $h = 0.24$ *из-за малого зазора между внешним контуром (эллипсом) и внутренними окружностями (см. рисунок 7).*

Любую триангуляцию можно немного поправить с помощью стандартного метода, основанного на том, чтобы любой внутренний узел стал центром множества вершин многоугольника, составленного из треугольников, окружающих этот узел. Тогда сама поправка будет выглядеть так. Пробегаем по всем внутренним узлам P_i *и для каждой из них определяем вершины* $P_{i_1}, \ldots, P_{i_s}$*, являющиеся соседними с* P_i*. После чего вершину* P_i *заменяем на*

$$P_i' = \frac{1}{s} \sum_{j=1}^{s} P_{i_j}.$$

Данную процедуру (цикл по всем внутренним узлам триангуляции) делаем несколько раз, пока не будет достигнута необходимая точность. Например, триангуляция, изображенная на рисунке 6, после такого преобразования будет иметь вид как на рисунке 8.

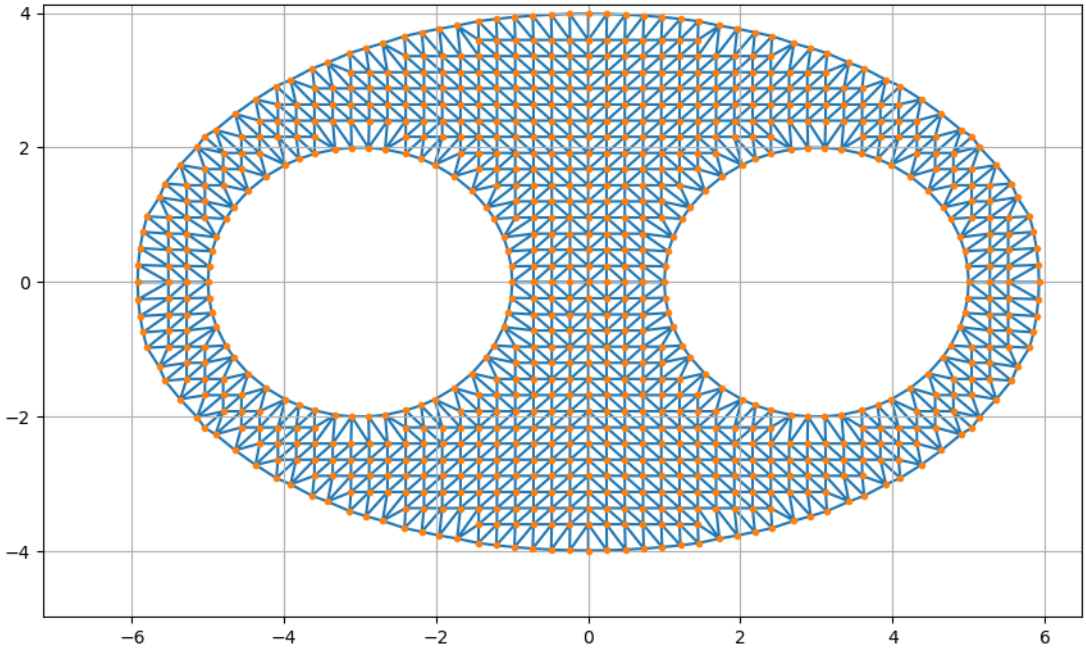


Рис. 7. Триангуляция области, заданной неравенствами (2.1)

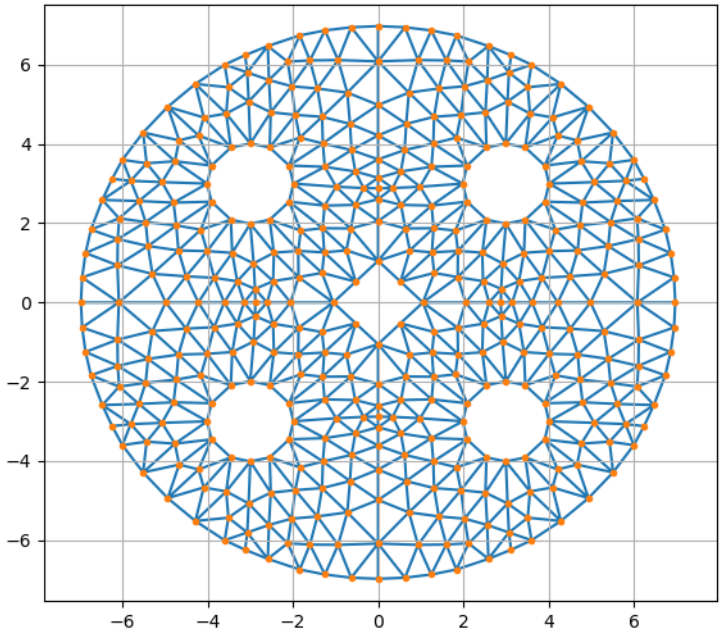


Рис. 8. Исправленная триангуляция области (4.1)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. С.М. Алейников, А.А. Седаев. *Алгоритм генерации сетки в методе граничных элементов для плоских областей* // Мат. модел. **7**:7, 81–93 (1995).
2. А.А. Андрекайте. *Вариационные методы построения расчетных сеток для конечно-элементных расчетов в многосвязных областях* // Вестн. науч.-техн. развития **8**:36, 1–7 (2010).

3. Н.В. Байдакова. *Влияние гладкости на погрешность аппроксимации производных при локальной интерполяции на триангуляциях* // Тр. Инст. мат. мех. УрО РАН **17**:3, 83–97 (2011).
4. Н.В. Байдакова. *Новые оценки величин погрешности аппроксимации производных при интерполяции функции многочленами третьей степени на треугольнике* // Изв. Сарат. унив. (Н. с.), Сер. Мат. Мех. Информ. **13**:1(2), 15–19 (2013).
5. В.А. Гаранжа. *Билипшицевы параметризации негладких поверхностей и построение поверхностных расчетных сеток* // Ж. вычисл. мат. мат. физ. **45**:8, 1383–1398 (2005).
6. В.А. Гаранжа, И.Е. Капорин. *Регуляризация барьерного вариационного метода построения расчетных сеток* // Ж. вычисл. мат. мат. физ. **39**:9, 1489–1503 (1999).
7. Л.В. Гилева, В.В. Шайдуров. *Обоснование асимптотической устойчивости алгоритма триангуляции трехмерной области* // Сиб. ж. вычисл. мат. **3**:2, 123–136 (2000).
8. А.С. Караваев, С.П. Копысов, А.Б. Пономарёв. *Алгоритмы построения и перестроения неструктурированных четырехугольных сеток в односвязных областях* // Вычисл. мех. спл. сред **5**:2, 144–150 (2012).
9. В.А. Клячин, А.А. Широкий. *Триангуляция Делоне многомерных поверхностей* // Вестн. Самар. гос. унив., Естественнонаучн. сер. **78**:4, 51–55 (2010).
10. В.А. Клячин, А.А. Широкий. *Триангуляция Делоне многомерных поверхностей и ее аппроксимационные свойства* // Изв. высш. учебн. завед., Мат. **2012**:1, 31–39 (2012).
11. В.А. Клячин. *Алгоритм триангуляции, основанный на условии пустого выпуклого множества* // Вестн. Вол. гос. унив., Сер. 1. Мат. Физ. **28**:3, 27–33 (2015).
12. А.А. Клячин. *Построение триангуляции плоских областей методом измельчения* // Вестн. Вол. гос. унив., Сер. 1. Мат. Физ. **39**:2, 18–28 (2017).
13. Н.В. Латыпова. *Погрешность кусочно-параболической интерполяции на треугольнике* // Вестн. Удмуртск. унив., Мат. Мех. Комп. науки. **3**, 91–97 (2009).
14. Ю.В. Матвеева. *Об эрмитовой интерполяции многочленами третьей степени на треугольнике с использованием смешанных производных*// Изв. Сарат. унив., Сер. Мат. Мех. Информ. **7**:1, 23–27 (2007).
15. Ю.В. Немировский, С.Ф. Пятаев. *Автоматизированная триангуляция многосвязных областей со сгущением и разрежением узлов* // Вычисл. техн. **5**:2, 82–91 (2000).
16. Д.Ю. Полянский. *Триангуляция плоских областей решением методом конечных элементов в форме Галеркина задачи Дирихле* // Изв. высш. учебн. завед. Поволжск. рег. Физ.-мат. науки **3**, 38–46 (2012).
17. А.В. Скворцов. *Обзор алгоритмов построения триангуляции Делоне* // Вычисл. мет. прогр. **3**, 14–39 (2002).
18. А.В. Скворцов. *Алгоритмы построения триангуляции с ограничениями* // Вычисл. мет. прогр. **3**, 82–92 (2002).
19. Ю.Н. Субботин. *Зависимость оценок многомерной кусочно-полиномиальной аппроксимации от геометрических характеристик триангуляции* // Тр. мат. инст. им. В.А. Стеклова **189**, 117–137 (1989).
20. Ю.Н. Субботин. *Зависимость оценок аппроксимации интерполяционными полиномами пятой степени от геометрических характеристик треугольника* // Тр. Инст. мат. мех. УрО РАН **2**, 110–119 (1992).
21. I. Babuška, A.K. Aziz. *On the angle condition in the finite element method* // SIAM J. Numer. Anal. **13**:2, 214–226 (1976).
22. F. Labelle, J. Shewchuk. *Isosurface stuffing: fast tetrahedral meshes with good dihedral angles* // ACM Trans. Graph. **26**:3, (2007).

Алексей Александрович Клячин,
Волгоградский государственный университет,
пр-т Университетский, 100,
400062, г. Волгоград, Россия
E-mail: aleksey.klyachin@volsu.ru, klyachin-aa@yandex.ru