ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 18 № 3 (2026). С. 26-40.

УДК 517.956

ОПЕРАТОРНЫЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ В ОБЛАСТЯХ С БЫСТРО ЛОКАЛЬНО–ПЕРИОДИЧЕСКИ ОСЦИЛЛИРУЮЩЕЙ ГРАНИЦЕЙ И ТРЕТЬИМ КРАЕВЫМ УСЛОВИЕМ: УСРЕДНЕННОЕ УСЛОВИЕ ДИРИХЛЕ

Д.И. БОРИСОВ

Аннотация. В работе рассматривается общий эллиптический оператор в многомерной области с быстро локально–периодически осциллирующей границей. На осциллирующей границе задаётся третье краевое условие со строго положительным коэффициентом. Предполагается, что амплитуда осцилляций границы существенно больше линейного размера ячейки периодичности. В таких предположениях показано, что при усреднении возникает условие Дирихле на предельной границе. Основной полученный результат — операторные оценки в W_2^1 и L_2.

Ключевые слова: эллиптическая задача, быстро осциллирующая граница, операторная оценка, третье краевое условие.

Mathematics Subject Classification: 35B27, 35B40

1. Введение

Задачи в областях с быстро осциллирующими границами — один из основных объектов изучения в теории усреднения. Такие задачи изучались во многих работах, см., например, [1], [11], [13]–[20], [32]–[35]. Классические результаты дают классификацию возможных усреднённых задач и утверждают сходимость решений возмущённых задач к решениям усреднённых для заданных правых частей в уравнениях и краевых условиях. Имеется и большое число оценок скорости сходимости, вновь для фиксированных правых частей.

Упомянутые классические результаты говорят о наличии слабой или сильной резольвентной сходимостей. Имеются также и более сильные результаты о наличии равномерной операторной сходимости, то есть, сходимости резольвент в операторной норме. В терминах исходных задач это означает сходимость решений возмущённых задач к решениям усреднённых равномерно по правой части. Соответствующие оценки скорости сходимости носят название операторных. Для задач с быстро осциллирующей границей такие результаты были получены в нескольких работах. В [16, Гл. III, §4] операторная оценка была установлена для скалярного оператора в двумерной области с третьим краевым условием на периодически осциллирующей границе, причем амплитуда и период осцилляций были пропорциональны одному и тому же малому параметру. Разность резольвент здесь оценивалась как оператор из L_2 в W_2^1. В [36], [37] аналогичные оценки были получены для линейной системы уравнений Стокса и уравнения Пуассона в многомерной области с краевым условием Дирихле на компактной локально–периодически осциллирующей границе.

D.I. Borisov, Operator estimates for elliptic problems in domains with fast locally periodic oscillating boundary and Robin boundary condition: homogenized Dirichlet condition.

© Борисов Д.И. 2026.

Работа поддержана FCT 2023.08031.CEECIND и UID/00212/2025.

Поступила 25 июня 2026 г.

В [21] операторные оценки были выведены для самосопряжённого эллиптического оператора второго порядка в плоской полосе с одним из классических краевых условий на быстро и периодически осциллирующей границей, период и амплитуда осцилляций были независимыми малыми параметрами. Были описаны возможные усреднённые задачи и установлены W_2^1–операторные оценки. В [6] аналогичные результаты были получены для общих плоских областей с осциллирующей границей, которая являлась графиком произвольной ограниченной функции с малыми значениями и осциллирующей произвольным, необязательно периодическим образом. На этой границе выставлялось условие Дирихле или Неймана; оно же сохранялось при усреднении. Были доказаны операторные W_2^1– и L_2–операторные оценки. Случаи смены краевых условий Дирихле и Неймана на осциллирующей границе рассматривались в работах [2], [5], при этом смена могла быть в одной точке [2] или частой [5]. Усреднённая задача либо сохраняла смену краевых условий [2], либо она заменялась на условие Дирихле [5]. Были доказаны соответствующие W_2^1– и L_2–операторные оценки и оказалось, что наличие смены существенно изменяет скорость сходимости как по сравнению с задачами с осциллирующей границей без смены, так и по сравнению с задачами о частой смене на гладкой границе. В [3], [4] рассматривалась общая многомерная задача с осциллирующей границей произвольной структуры. На такой границе ставилось условие Дирихле или Неймана. Были получены общие, весьма слабые условия на геометрию границы, при которых удалось провести усреднение и получить W_2^1– и L_2–операторные оценки. Данные условия были выполнены для широкого класса существенно непериодически осциллирующих границ, а также для многих других геометрических возмущений границы. Отметим ещё, что известны и операторные оценки для задач с частой сменой краевых условий и с перфорацией как по всей области, так и вдоль заданного многообразия, см. [7]–[10], [22]–[31].

В настоящей работе рассматривается эллиптический оператор в многомерной области с быстро локально–периодически осциллирующей границей. На границе задаётся третье краевое условие, причём коэффициент считается строго положительным. Предполагается, что амплитуда осцилляций существенно больше линейного размера соответствующей ячейки периодичности. При таких условиях показано, что усреднении приводит к условию Дирихле на предельной границе. Основной полученный результат — это W_2^1– и L_2–операторные оценки для рассматриваемой задачи.

2. Постановка задачи и основные результаты

Пусть $x = (x_1, \dots, x_n)$ — декартовы координаты в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, а Ω — некоторая ограниченная или неограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с границей гладкости C^1. Через Γ обозначим одну из связных компонент границы $\partial\Omega$, и будем считать, что она имеет гладкость C^3, не имеет края, а область Ω лежит по одну сторону от поверхности Γ.

Будем предполагать, что на поверхности Γ можно корректно ввести единые глобальные переменные $s = (s_1, \dots, s_{n-1})$, $s \in S \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$, причём все собственные значения матрицы Грамма, соответствующей выбранным переменным, равномерно отделены от нуля. Множество S предполагается замкнутым.

Пусть $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ — внешняя нормаль к границе Γ, а τ — расстояние от точки до границы, измеренное в направлении нормали ν. Будем считать, что переменные (τ, s) корректно определены в области $\Pi_{2\tau_0}$, где $\tau_0 > 0$ — некоторое фиксированное число, и обозначено

$$\Pi_r := \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \Gamma) < r\}.$$

Дополнительно будем считать, что производные переменных x по (τ, s) и переменных (τ, s) по x вплоть до второго порядка равномерно ограничены в области Π_r.

Произвольно выберем периодическую решетку в пространстве $\mathbb{R}^{n-1}$ с ячейкой периодичности $\square$ и рассмотрим вещественную функцию $\gamma = \gamma(s,\xi)$, заданную на декартовом произведении $S \times \mathbb{R}^{n-1}$ и $\square$–периодическую по ξ для каждого значения $s \in S$. Будем считать, что для каждого s функция $\gamma(\xi, s)$ является элементом пространства Гельдера $C^{1+\alpha}(\mathbb{R}^{n-1})$, а отображение $s \mapsto \gamma(s,\xi)$, действующее из S в $C^{1+\alpha}(\mathbb{R}^{n-1})$, является элементом пространства $W^1_\infty(S)$, а именно,

$$\operatorname*{ess\,sup}_{s\in S} \|\gamma(s,\,\cdot\,)\|_{C^{1+\alpha}(\overline{\square})} + \operatorname*{ess\,sup}_{s\in S} \|\nabla_s \gamma(s,\,\cdot\,)\|_{C^{1+\alpha}(\overline{\square})} < +\infty. \tag{2.1}$$

Также считаем, что

$$0 \leqslant \gamma(s,\xi) \leqslant 1, \quad s \in S, \quad \xi \in \mathbb{R}^{n-1}, \tag{2.2}$$

$$\langle |\nabla_\xi \gamma(\,\cdot\,, s)|^2 \rangle \geqslant c_1 > 0, \quad s \in S, \tag{2.3}$$

где константа c_1 фиксирована и для произвольной $\square$–периодической функции $h = h(\xi)$ обозначено

$$\langle h \rangle := \frac{1}{\operatorname{mes} \square} \int\limits_{\square} h(\xi)\, d\xi.$$

Через ε и $\eta(\varepsilon)$ обозначим малый положительный параметр и малую положительную функцию от этого параметра и предположим, что выполнена сходимость

$$\frac{\varepsilon}{\eta(\varepsilon)} \to 0, \quad \varepsilon \to +0. \tag{2.4}$$

Вдоль поверхности Γ зададим быстро осциллирующую поверхность

$$\Gamma_\varepsilon := \Big\{ x \in \mathbb{R}^n : \tau = -\eta(\varepsilon)\gamma\big(s, s\varepsilon^{-1}\big) \Big\}.$$

Условие (2.4) означает, что амплитуда осцилляций поверхности Γ_ε существенно больше, чем линейный размер ячейки периодичности. Через Ω_ε обозначим область с границами $\partial\Omega \setminus \Gamma$ и Γ_ε. С учётом условия (2.2) и малости функции $\eta(\varepsilon)$ ясно, что область Ω_ε мало отличается от Ω в смысле вложений

$$\Omega_\varepsilon \subseteq \Omega, \qquad \Omega \setminus \Omega_\varepsilon \subset \overline{\Pi_\eta},$$

где обозначено

$$\Pi_r := \big\{ x \in \mathbb{R} : \operatorname{dist}(x,\Gamma) < r,\ x \in \Omega \big\}, \quad r > 0.$$

На области Ω зададим комплекснозначные функции $A_{ij} = A_{ij}(x)$, $A_j = A_j(x)$, $A_0 = A_0(x)$, $i,j = 1,\dots,n$, удовлетворяющие условиям

$$\operatorname{Re} \sum_{i,j=1}^n A_{ij} z_i \overline{z}_j \geqslant c_2 |z|^2, \qquad A_{ij} \in W^1_\infty(\Omega), \qquad A_j,\, A_0 \in L_\infty(\Omega), \tag{2.5}$$

где $z = (z_1,\dots,z_n) \in \mathbb{C}^n$ и c_2 — некоторая положительная константа, не зависящая от x и z. Пусть $a = a(x)$ — некоторая вещественная функция, заданная в Π_{τ_0} и удовлетворяющая условиям

$$a \in L_\infty(\Pi_{r_0}), \qquad a(x) \geqslant a_0 > 0 \quad \text{для почти всех} \quad x \in \Pi_{\tau_0}, \tag{2.6}$$

где a_0 — некоторая константа.

Через $\mathring{W}^1_2(\Omega,\Upsilon)$ обозначим пространство Соболева функций, имеющих нулевой след на поверхности $\Upsilon \subset \Omega$. В пространстве $L_2(\Omega_\varepsilon)$ определим полуторалинейную форму

$$\mathfrak{h}_\varepsilon(u,v) = \sum_{i,j=1}^n \left(A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L_2(\Omega_\varepsilon)} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left(A_j \frac{\partial u}{\partial x_j}, v \right)_{L_2(\Omega_\varepsilon)}$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(u,\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{A_j}v\right)_{L_2(\Omega_\varepsilon)}+(A_0u,v)_{L_2(\Omega_\varepsilon)}+(au,v)_{L_2(\Gamma_\varepsilon)}$$

на области определения $\mathfrak{D}(\mathfrak{h}_\varepsilon):=\mathring{W}_2^1(\Omega_\varepsilon,\partial\Omega\setminus\Gamma)$. Используя приведённые выше условия на функции A_{ij}, A_j, A_0 и a, элементарно проверяется, что введённая форма секториальная и замкнутая. Поэтому в силу первой теоремы о представлении [12, Гл. VI, §2.1] существует единственный m–секториальный оператор, соответствующий форме $\mathfrak{h}_\varepsilon$. Данный оператор обозначим через $\mathcal{H}_\varepsilon$.

Аналогично, в пространстве $L_2(\Omega)$ определим полуторалинейную форму

$$\mathfrak{h}_0(u,v)=\sum_{i,j=1}^{n}\left(A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j},\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)_{L_2(\Omega)}+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(A_j\frac{\partial u}{\partial x_i},v\right)_{L_2(\Omega)}$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(u,\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{A_j}v\right)_{L_2(\Omega)}+(A_0u,v)_{L_2(\Omega)}$$

на области определения $\mathfrak{D}(\mathfrak{h}_0):=\mathring{W}_2^1(\Omega,\partial\Omega)$. Данная форма также секториальная и замкнутая и в силу первой теоремы о представлении [12, Гл. VI, §2.1] существует единственный m–секториальный оператор, соответствующий форме $\mathfrak{h}_0$. Этот оператор обозначим через $\mathcal{H}_0$.

Отметим, что оба оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$ и $\mathcal{H}_0$ имеют одно и то же дифференциальное выражение

$$\hat{\mathcal{H}}:=-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}A_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}+\sum_{j=1}^{n}A_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}+A_0(x).$$

Граничные условия для оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$ имеют вид

$$u=0\quad\text{на}\quad\partial\Omega\setminus\Gamma,\qquad\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{\nu}}+au=0\quad\text{на}\quad\Gamma_\varepsilon,\tag{2.7}$$
$$\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\nu}}:=-\sum_{i,j=1}^{n}\nu_iA_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\nu_jA_j,$$

а для оператора $\mathcal{H}_0$ всюду на границе $\partial\Omega$ задаётся условие Дирихле. Из стандартных теорем о повышении гладкости легко вывести, что область определения оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$ состоит из функций $u\in\mathring{W}_2^2(\Omega_\varepsilon,\partial\Omega\setminus\Gamma)$, удовлетворяющих краевым условиям (2.7), а область определения оператора $\mathcal{H}_0$ совпадает с пространством $\mathring{W}_2^2(\Omega,\partial\Omega)$.

Через $\|\cdot\|_{X\to Y}$ обозначим норму ограниченного оператора, действующего из банахова пространства X в банахово пространство Y.

Наш основной результат выглядит следующим образом.

Теорема 2.1. *Существует λ_0, не зависящее от ε, такое, что полуплоскость $\operatorname{Re}\lambda\leqslant\lambda_0$ попадает в резольвентные множества операторов $\mathcal{H}_0$ и $\mathcal{H}_\varepsilon$ для всех достаточно малых ε. При выполнении условия (2.4) верна операторная оценка*

$$\|(\mathcal{H}_\varepsilon-\lambda)^{-1}-(\mathcal{H}_0-\lambda)^{-1}\|_{L_2(\Omega)\to W_2^1(\Omega_\varepsilon)}\leqslant C\left(\eta^{\frac{1}{2}}(\varepsilon)+\frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{\eta^{\frac{1}{2}}(\varepsilon)}\right),\tag{2.8}$$

где константа C не зависит от ε и η. Если дополнительно

$$A_j\in W_\infty^1(\Omega),\tag{2.9}$$

то верна операторная оценка

$$\|(\mathcal{H}_\varepsilon-\lambda)^{-1}-(\mathcal{H}_0-\lambda)^{-1}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega_\varepsilon)}\leqslant C\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}+\eta(\varepsilon)+\frac{\varepsilon}{\eta(\varepsilon)}\right),\tag{2.10}$$

где константа C не зависит от ε и η.

Кратко обсудим полученные результаты. Главный нетривиальный эффект состоит в том, что при усреднении третье краевое условие меняется на краевое условие Дирихле. Условия, обеспечивающие такой эффект — это строгая положительность коэффициента в третьем краевом условии, см. (2.6), и сходимость (2.4). Важно также и условие (2.3), но оно скорее означает невырожденность осцилляций, исключающее отсутствие зависимости функции γ_ε от быстрой переменной ξ. Исходная постановка задачи также требует задания функции γ_ε в терминах единых локальных переменных на всей поверхности Γ. Ясно, что это накладывает существенные ограничения на геометрические свойства такой поверхности. Такое условие выполнено, например, для поверхности, являющейся графиком заданной функции на какой-то гиперплоскости, или для поверхностей, имеющих цилиндрическую либо тороидальную форму. Случай поверхностей типа сферы предполагает разбиение поверхности с помощью подходящего атласа на отдельные куски, на каждом из которых можно задавать свою локально–периодически осциллирующую функцию γ_ε, а затем эти функции сшивать в единую с помощью подходящего разбиения единицы. Вместе с тем, неожиданно оказалось, что такая постановка существенно усложняет задачу и делает её сопоставимой по сложности со случаем произвольной непериодически осциллирующей функции. Это требует совершенно иного подхода и техники, и такую ситуацию мы рассмотрим в следующей работе.

Основной результат настоящей работы, теорема 2.1, устанавливает операторные оценки в W_2^1 и L_2. Первая оценка (2.8) описывает скорость сходимости резольвенты возмущённого оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$ к резольвенте усреднённого оператора $\mathcal{H}_0$ в норме операторов, действующих из $L_2(\Omega)$ в $W_2^1(\Omega_\varepsilon)$. При этом порядок малости оказывается не зависящим от размерности области n. Для L_2–операторной оценки (2.10) приходится налагать стандартное условие (2.9) повышенной гладкости коэффициентов при первых производных, которое ранее возникало и ранее, см., например, [3]–[6]. Так как здесь операторная норма слабее, скорость сходимости оказывается выше. А именно, скорость сходимости из W_2^1–операторной оценки удваивается и дополнительно добавляется слагаемое $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$. Данное слагаемое возникало и в случае условия Неймана на осциллирующей границе [4], поэтому его появление здесь совершенно ожидаемо.

3. Операторная оценка в W_2^1

В настоящем параграфе мы доказываем наш основной результат, теорему 2.1. Начнём с доказательства существования числа λ_0. Непосредственно из условий (2.5), (2.6) следует, что верны оценки

$$\begin{aligned}
&|\operatorname{Im}\mathfrak{h}_\varepsilon(u,u)| \leqslant c_3\|\nabla u\|^2_{L_2(\Omega_\varepsilon)} + c_4\|u\|^2_{L_2(\Omega_\varepsilon)}, && u\in\mathfrak{D}(\mathfrak{h}_\varepsilon),\\
&\frac{c_2}{2}\|\nabla u\|^2_{L_2(\Omega_\varepsilon)} \leqslant \operatorname{Re}\mathfrak{h}_\varepsilon(u,u) + c_5\|u\|^2_{L_2(\Omega_\varepsilon)}, && u\in\mathfrak{D}(\mathfrak{h}_\varepsilon),\\
&|\operatorname{Im}\mathfrak{h}_0(u,u)| \leqslant c_3\|\nabla u\|^2_{L_2(\Omega)} + c_4\|u\|^2_{L_2(\Omega)}, && u\in\mathfrak{D}(\mathfrak{h}_0),\\
&\frac{c_2}{2}\|\nabla u\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant \operatorname{Re}\mathfrak{h}_0(u,u) + c_5\|u\|^2_{L_2(\Omega)}, && u\in\mathfrak{D}(\mathfrak{h}_0).
\end{aligned} \tag{3.1}$$

где c_3, c_4, c_5 — некоторые положительные константы, не зависящие от ε и u. Из этих оценок сразу следует, что числовые области значений операторов $\mathcal{H}_\varepsilon$ и $\mathcal{H}_0$ содержатся в секторе

$$\left\{ z\in\mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| \leqslant \frac{2c_3}{c_2}\left(\operatorname{Re} z + c_5 + \frac{c_4c_2}{2c_3}\right)\right\},$$

а потому открытая полуплоскость $\operatorname{Re}\lambda < -c_5 - \frac{c_4 c_2}{2c_3}$ попадает в резольвентное множество обоих операторов $\mathcal{H}_\varepsilon$ и $\mathcal{H}_0$. Поэтому далее в качестве λ_0 достаточно выбрать

$$\lambda_0 := -c_5 - \frac{c_4 c_2}{2c_3} - 1. \tag{3.2}$$

Пусть $f \in L_2(\Omega)$ — произвольная функция, $\operatorname{Re}\lambda \leqslant \lambda_0$, и

$$u_\varepsilon := (\mathcal{H}_\varepsilon - \lambda)^{-1} f, \qquad u_0 := (\mathcal{H}_\varepsilon - \lambda)^{-1} f.$$

Для функций u_ε и u_0 верны стандартные интегральные тождества

$$\mathfrak{h}_\varepsilon(u_\varepsilon, v) - \lambda(u_\varepsilon, v)_{L_2(\Omega_\varepsilon)} = (f, v)_{L_2(\Omega_\varepsilon)}, \qquad v \in \mathfrak{D}(\mathfrak{h}_\varepsilon), \tag{3.3}$$

$$\mathfrak{h}_0(u_0, v) - \lambda(u_0, v)_{L_2(\Omega)} = (f, v)_{L_2(\Omega)}, \qquad v \in \mathfrak{D}(\mathfrak{h}_0). \tag{3.4}$$

Из этих тождеств соответственно с $v = u_\varepsilon$ и $v = u_0$ в силу оценок (3.1) и указанного выбора числа λ_0 выполнены неравенства

$$\begin{aligned} &\|u_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega_\varepsilon)} + \|u_\varepsilon\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)} + (a u_\varepsilon, u_\varepsilon)^{\frac{1}{2}}_{L_2(\Gamma_\varepsilon)} \leqslant c_6 \|f\|_{L_2(\Omega)}, \\ &\|u_0\|_{W_2^1(\Omega)} + \|u\|_{L_2(\Omega)} \leqslant c_6 \|f\|_{L_2(\Omega)}, \end{aligned} \tag{3.5}$$

где c_6 — некоторая положительная константа, не зависящая от ε, u_0, u_ε и f. Кроме того, в силу (2.6) при $\operatorname{Re}\lambda \leqslant \lambda_0$ верна оценка

$$\operatorname{Re}\mathfrak{h}_\varepsilon(u, u) - \operatorname{Re}\lambda \|u\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)} \geqslant c_7 \|u\|^2_{W_2^1(\Omega_\varepsilon)} + a_0 \|u\|^2_{L_2(\Gamma_\varepsilon)}, \qquad u \in \mathfrak{D}(\mathfrak{h}_\varepsilon), \tag{3.6}$$

где c_7 — некоторая положительная константа, не зависящая от ε и u. Из оценки (3.5) и стандартных теорем о повышении гладкости эллиптических краевых задач сразу выводим неравенство

$$\|u_0\|_{W_2^2(\Pi_{r_0})} \leqslant c_8 \|f\|_{L_2(\Omega)}, \tag{3.7}$$

где c_8 — некоторая положительная константа, не зависящая от ε, u_0, u_ε и f.

Пусть $\chi = \chi(t)$ — бесконечно дифференцируемая невозрастающая срезающая функция, равная единице при $t < -3$ и нулю при $t > -2$. Положим

$$\chi_\varepsilon(x) := \begin{cases} \chi\left(\dfrac{\tau}{\eta(\varepsilon)}\right) & \text{в} \quad \overline{\Pi_{3\eta(\varepsilon)}}, \\ 1 & \text{в} \quad \overline{\Omega} \setminus \Pi_{3\eta(\varepsilon)}. \end{cases}$$

Ясно, что функция χ_ε бесконечно дифференцируема в $\Omega \cup \Omega_\varepsilon$ и тождественно равна нулю на $\Pi_{2\eta(\varepsilon)}$. Для функции χ_ε верны оценка и равенство

$$|\nabla \chi_\varepsilon(x)| \leqslant C \eta^{-1}(\varepsilon), \qquad \nabla_{s_k} \chi_\varepsilon(x) = 0, \qquad x \in \Pi_{3\eta(\varepsilon)} \setminus \Pi_{2\eta(\varepsilon)}, \tag{3.8}$$

где C — некоторая константа, не зависящая от ε, η, x, s. Поэтому функции

$$v_\varepsilon := u_\varepsilon - \chi_\varepsilon u_0 \tag{3.9}$$

и $\chi_\varepsilon v_\varepsilon$ принадлежат областям определения обеих форм $\mathfrak{h}_\varepsilon$ и $\mathfrak{h}_0$, и их можно использовать в качестве пробных функций в (3.3), (3.4).

Выпишем интегральное тождество (3.3) с $v = v_\varepsilon$ и интегральное тождество (3.4) с $v = v_\varepsilon \chi_\varepsilon$ и учтём, что в силу определения функции χ_ε верно равенство

$$\mathfrak{h}_0(u_0, v_\varepsilon \chi_\varepsilon) = \mathfrak{h}_0(u_0 \chi_\varepsilon, v_\varepsilon) + F_\varepsilon, \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned} F_\varepsilon := &\sum_{i,j=1}^n \left(A_{ij} \frac{\partial u_0}{\partial x_j}, v_\varepsilon \frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial x_i} \right)_{L_2(\Pi_{3\eta(\varepsilon)} \setminus \Pi_{2\eta(\varepsilon)})} - \sum_{i,j=1}^n \left(A_{ij} \frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial x_j} u_0, \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_i} \right)_{L_2(\Pi_{3\eta(\varepsilon)} \setminus \Pi_{2\eta(\varepsilon)})} \\ &- \sum_{j=1}^n \left(A_j u_0, v_\varepsilon \frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial x_j} \right)_{L_2(\Pi_{3\eta(\varepsilon)} \setminus \Pi_{2\eta(\varepsilon)})}. \end{aligned}$$

Затем вычтем второе полученное равенство из первого

$$\mathfrak{h}_\varepsilon(v_\varepsilon, v_\varepsilon) - \lambda\|v_\varepsilon\|^2_{L_2(\Omega_\varepsilon)} = \big(f, (1-\chi_\varepsilon), v_\varepsilon\big)_{L_2(\Omega_\varepsilon)} + F_\varepsilon. \tag{3.11}$$

Для левой части этого тождества выполнена оценка (3.6) с $u = v_\varepsilon$.

Наша дальнейшая цель — оценка правой части равенства (3.11). Для этого нам понадобится вспомогательное утверждение.

Лемма 3.1. *Верны оценки*

$$\|u\|_{L_2(\Pi_{3\eta(\varepsilon)}\cap\Omega_\varepsilon)} \leqslant C\eta^{\frac12}(\varepsilon)\|u\|_{W_2^1(\Omega_\varepsilon)}, \qquad u \in W_2^1(\Omega_\varepsilon), \tag{3.12}$$

$$\|u\|_{L_2(\Pi_{3\eta(\varepsilon)})} \leqslant C\eta^{\frac32}(\varepsilon)\|u\|_{W_2^2(\Omega)}, \qquad u \in \mathring{W}_2^2(\Omega,\Gamma), \tag{3.13}$$

$$\int\limits_\Gamma |u|^2\big|_{\tau=\eta(\varepsilon)\gamma_\varepsilon(s)}\, ds \leqslant C\|u\|_{W_2^1(\Omega_\varepsilon)}, \qquad u \in W_2^1(\Omega_\varepsilon), \tag{3.14}$$

где C — некоторые константы, не зависящие от ε и u.

Доказательство. Доказательство первых двух оценок было приведено в [4, Lm. 2.2]. Третья оценка элементарно выводятся из очевидного равенства

$$|u|^2\big|_{\tau=\eta(\varepsilon)\gamma_\varepsilon(s)} = \int\limits_{\tau_0}^{\eta(\varepsilon)\gamma_\varepsilon(s)} \frac{\partial}{\partial\tau}|u|^2\left(1-\chi\left(\frac{3\tau}{\tau_0}\right)\right)d\tau.$$

□

Данная лемма, соотношения (3.8), неравенство (3.7) и оценки (3.13) с $u = u_0$, (3.12) с $u = v_\varepsilon$ позволяют нам сразу оценить большую часть слагаемых в правой части (3.11):

$$\begin{aligned}
&\left|\big(f, (1-\chi_\varepsilon), v_\varepsilon\big)_{L_2(\Omega_\varepsilon)}\right| \leqslant C\|f\|_{L_2(\Omega)}\|v_\varepsilon\|_{L_2(\Pi_{3\eta(\varepsilon)})} \leqslant C\eta^{\frac12}(\varepsilon)\|f\|_{L_2(\Omega)}\|v_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega_\varepsilon)},\\
&\left|\sum_{i,j=1}^n \left(A_{ij}\frac{\partial\chi_\varepsilon}{\partial x_i}u_0, \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_j}\right)_{L_2(\Pi_{3\eta(\varepsilon)}\setminus\Pi_{2\eta(\varepsilon)})}\right| \leqslant C\eta^{-1}(\varepsilon)\|u_0\|_{L_2(\Pi_{3\eta(\varepsilon)})}\|v_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega_\varepsilon)}\\
&\qquad\qquad \leqslant C\eta^{\frac12}(\varepsilon)\|f\|_{L_2(\Omega)}\|v_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega_\varepsilon)},\\
&\left|\sum_{j=1}^n \left(A_j u_0, v_\varepsilon\frac{\partial\chi_\varepsilon}{\partial x_j}\right)_{L_2(\Pi_{3\eta(\varepsilon)}\setminus\Pi_{2\eta(\varepsilon)})}\right| \leqslant C\eta^{-1}(\varepsilon)\|u_0\|_{L_2(\Pi_{3\eta(\varepsilon)})}\|v_\varepsilon\|_{L_2(\Pi_{3\eta(\varepsilon)})}\\
&\qquad\qquad \leqslant C\eta(\varepsilon)\|f\|_{L_2(\Omega)}\|v_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega_\varepsilon)}.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Здесь и всюду до конца параграфа через C обозначаем различные несущественные константы, не зависящие от ε, f, u_ε, u_0, v_ε и пространственных переменных.

Перепишем оставшееся слагаемое в правой части (3.11) виде

$$\sum_{i,j=1}^n \left(A_{ij}\frac{\partial u_0}{\partial x_j}, v_\varepsilon\frac{\partial\chi_\varepsilon}{\partial x_i}\right)_{L_2(\Pi_{3\eta(\varepsilon)}\setminus\Pi_{2\eta(\varepsilon)})} = \sum_{i,j=1}^n \int\limits_{L_2(\Pi_{3\eta(\varepsilon)}\setminus\Pi_{2\eta(\varepsilon)})} A_{ij}\frac{\partial u_0}{\partial x_j}\overline{v_\varepsilon}\frac{\partial\tau}{\partial x_i}\frac{\partial\chi_\varepsilon}{\partial\tau}\,dx.$$

В силу монотонности функции χ производная $\frac{\partial\chi_\varepsilon}{\partial\tau}$ неположительна. С учётом этого факта из приведённого выше равенства выводим оценку

$$\left|\sum_{i,j=1}^n \left(A_{ij}\frac{\partial u_0}{\partial x_j}, v_\varepsilon\frac{\partial\chi_\varepsilon}{\partial x_i}\right)_{L_2(\Pi_{3\eta(\varepsilon)}\setminus\Pi_{2\eta(\varepsilon)})}\right| \leqslant C\int\limits_\Gamma ds \int\limits_{-3\eta(\varepsilon)}^{-2\eta(\varepsilon)} |\nabla u_0||v_\varepsilon|\frac{\partial(1-\chi_\varepsilon)}{\partial\tau}\,d\tau, \tag{3.16}$$

причём подынтегральное выражение в интеграле в правой части неотрицательно. Чтобы продолжить оценки, нам нужно провести вспомогательные вычисления и доказать одну лемму.

Пусть $x = \rho(s)$ — параметрическое уравнение поверхности S, тогда уравнение осциллирующей границы Γ_ε имеет вид

$$x = \rho_\varepsilon(s) := \rho(s) - \eta(\varepsilon)\gamma\left(s, \frac{s}{\varepsilon}\right)\nu(s),$$

где $\nu = \nu(s)$ — введённая выше единичная нормаль к Γ. Касательные векторы к поверхности Γ_ε имеют вид

$$\frac{\partial \rho_\varepsilon}{\partial s_k} = \frac{\partial \rho}{\partial s_k} - \eta\frac{\partial \gamma_\varepsilon}{\partial s_k}\nu - \eta\gamma\frac{\partial \nu}{\partial s_k}, \qquad \frac{\partial \gamma_\varepsilon}{\partial s_k} := \left(\frac{\partial \gamma}{\partial s_k} + \varepsilon^{-1}\frac{\partial \gamma}{\partial \xi_k}\right).$$

Ясно, что векторы $\frac{\partial \rho}{\partial s_k}$ и ν, а также ν и $\frac{\partial \nu}{\partial s_k}$ ортогональны. С учётом этого обстоятельства и очевидного равенства

$$\frac{\partial \rho}{\partial s_k}\cdot\frac{\partial \nu}{\partial s_j} = -\frac{\partial^2 \rho}{\partial^2 s_k \partial s_j}\cdot\nu,$$

где $\cdot$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$, элементарно проверяется, что

$$\frac{\partial \rho_\varepsilon}{\partial s_k}\cdot\frac{\partial \rho_\varepsilon}{\partial s_j} = \frac{\partial \rho}{\partial s_k}\cdot\frac{\partial \rho}{\partial s_j} + 2\eta\gamma_\varepsilon\frac{\partial^2 \rho}{\partial^2 s_k \partial s_j}\cdot\nu - \eta^2\gamma_\varepsilon\frac{\partial \nu}{\partial s_k}\cdot\frac{\partial \nu}{\partial s_j} + \eta^2\frac{\partial \gamma_\varepsilon}{\partial s_k}\frac{\partial \gamma_\varepsilon}{\partial s_j}.$$

Отсюда и из сделанных предположений относительно поверхности G следует, что матрица Грамма поверхности Γ_ε, соответствующая переменным s и обозначаемая через $\Gamma_\varepsilon = \Gamma_\varepsilon(s)$, представляется в виде

$$G_\varepsilon(s) = M_0\left(s, \frac{s}{\varepsilon}, \varepsilon\right) + \frac{\eta^2}{\varepsilon^2}M_1\left(s, \frac{s}{\varepsilon}\right).$$

Здесь

$$\begin{aligned} M_0(s,\xi,\varepsilon) &= G_0(s) + \eta(\varepsilon)\gamma(s,\xi)M_2(s) + \eta^2\gamma^2(s,\xi)M_3(s),\\ M_1(s,\xi,\varepsilon) &:= \big(\nabla_\xi\gamma(s,\xi) + \varepsilon\nabla_s\gamma(s,\xi)\big)\big(\nabla_\xi\gamma(s,\xi) + \varepsilon\nabla_s\gamma(s,\xi)\big)^t, \end{aligned}$$

где $G_0(s)$ — матрица Грамма поверхности Γ, матрицы M_2, M_3 равномерно ограничены и эрмитовы, матрица M_1 неотрицательна. Эти равенства и условия на матрицу Грамма G_0, наложенные в постановке задачи, гарантируют оценку

$$c_9 + \frac{\eta^2(\varepsilon)}{\varepsilon^2}M_1\left(s, \frac{s}{\varepsilon}, \varepsilon\right) \leqslant G_\varepsilon(s) \leqslant c_9^{-1} + \frac{\eta^2(\varepsilon)}{\varepsilon^2}M_1\left(s, \frac{s}{\varepsilon}, \varepsilon\right)$$

где c_9 — некоторая фиксированная положительная константа, не зависящая от s и ε. Поэтому собственные значения матрицы G_ε оцениваются снизу через суммы c_9 и собственных значений неотрицательной матрицы M_1. Отсюда немедленно следует, что

$$\begin{aligned} \big(\det G_\varepsilon(s)\big)^{\frac14} &\geqslant \left(c_9^{n-1} + c_9\frac{\eta^2(\varepsilon)}{\varepsilon^2}\operatorname{Tr} M_1\left(s, \frac{s}{\varepsilon}, \varepsilon\right)\right)^{\frac14}\\ &\geqslant c_{10}\left(1 + \frac{\eta^{\frac12}(\varepsilon)}{\varepsilon^{\frac12}}\left(\operatorname{Tr} M_1\left(s, \frac{s}{\varepsilon}, \varepsilon\right)\right)^{\frac14}\right), \end{aligned} \tag{3.17}$$

где c_{10} — некоторая фиксированная положительная константа, не зависящая от s и ε, а также

$$\big(\det G_\varepsilon(s)\big)^{\frac14} \leqslant c_{11}\frac{\eta^{\frac12}(\varepsilon)}{\varepsilon^{\frac12}}, \tag{3.18}$$

где c_{11} — некоторая фиксированная положительная константа, не зависящая от s и ε. Отметим ещё, что в силу условия (2.3) верна оценка

$$c_{12}\langle|\nabla_\xi\gamma(s,\,\cdot\,)|^2\rangle \leqslant \langle \operatorname{Tr} M_1(s,\,\cdot\,,\varepsilon)\rangle \leqslant c_{13}\langle|\nabla_\xi\gamma(s,\,\cdot\,)|^2\rangle, \tag{3.19}$$

где c_{12}, c_{13} — некоторые фиксированные положительные константы, не зависящие от s и ε.

Введём теперь вспомогательную функцию

$$\theta(s,\xi,\varepsilon) := \operatorname{Tr} M_1(s,\xi,\varepsilon) - \langle \operatorname{Tr} M_1(s,\,\cdot\,,\varepsilon)\rangle, \qquad \langle\theta(s,\,\cdot\,,\varepsilon)\rangle = 0, \tag{3.20}$$

и рассмотрим вспомогательное уравнение

$$\Delta_\xi\Theta(s,\xi,\varepsilon) = \theta(s,\xi,\varepsilon), \qquad \xi\in\mathbb{R}^{n-1}. \tag{3.21}$$

В силу второго равенства в (3.20) это уравнение разрешимо в классе $\square$–периодических по ξ функций и имеет единственное решение, удовлетворяющее условию $\langle\Theta(s,\,\cdot\,,\varepsilon)\rangle = 0$. Для данного решения в силу имеющейся гладкости функции γ и стандартных оценок Шаудера верна оценка

$$\|\Theta(s,\,\cdot\,,\varepsilon)\|_{C^{2+\alpha}(\overline{\square})} \leqslant c_{12}\|\gamma_\perp(s,\xi)\|_{C^\alpha(\overline{\square})}, \tag{3.22}$$

где константа c_{12} не зависит от ε, $s\in S$ и θ. Задача

$$\Delta_\xi\Theta_i(s,\xi,\varepsilon) = \frac{\partial\theta}{\partial s_i}(s,\xi), \qquad \xi\in\mathbb{R}^{n-1},$$

также имеет единственное $\square$–периодическое решение, удовлетворяющее условию $\langle\Theta_i(s,\,\cdot\,)\rangle = 0$. Это решение является элементом пространства $C^{2+\alpha}(\square)$ и верна оценка

$$\|\Theta_i(s,\,\cdot\,,\varepsilon)\|_{C^{2+\alpha}(\overline{\square})} \leqslant c_{12}\left\|\frac{\partial\theta}{\partial s_i}(s,\xi)\right\|_{C^\alpha(\overline{\square})}. \tag{3.23}$$

Для малых δ рассмотрим функцию

$$\tilde\Theta_i(s,\xi,\varepsilon) := \frac{\Theta(s+\delta e_i,\xi,\varepsilon)-\Theta(s+\delta e_i,\xi,\varepsilon)}{\delta} - \Theta_i(s,\xi,\varepsilon), \qquad e_i := (0,\dots,0,1,0,\dots,0),$$

где 1 векторе e_i находится на i-ой позиции и предполагается, что $s+\delta e_i$, $s\in S$. Такая функция очевидно является решением уравнения

$$\Delta_\xi\tilde\Theta_i(s,\xi,\varepsilon) = \frac{\theta(s+\delta e_i,\xi,\varepsilon)-\theta(s+\delta e_i,\xi,\varepsilon)}{\delta} - \frac{\partial\theta}{\partial s_i}(s,\xi,\varepsilon), \qquad \xi\in\mathbb{R}^{n-1},$$

удовлетворяющим условию $\langle\tilde\Theta_i(s,\,\cdot\,)\rangle = 0$ и оценке

$$\|\tilde\Theta_i\|_{C^{2+\alpha}(\overline{\square})} \leqslant c_{12}\left\|\frac{\theta(s+\delta e_i,\,\cdot\,,\varepsilon)-\theta(s+\delta e_i,\,\cdot\,,\varepsilon)}{\delta} - \frac{\partial\theta}{\partial s_i}(s,\,\cdot\,,\varepsilon)\right\|_{C^\alpha(\overline{\square})}.$$

Переходя в этой оценке к пределу при $\delta\to 0$, в силу условия (2.1) заключаем, что $\frac{\partial\Theta}{\partial s_i} = \Theta_i$ и с учётом (3.22), (3.23)

$$\operatorname*{ess\,sup}_{s\in S}\|\Theta(s,\,\cdot\,,\varepsilon)\|_{C^{2+\alpha}(\overline{\square})} + \operatorname*{ess\,sup}_{s\in S}\|\nabla_s\Theta(s,\,\cdot\,,\varepsilon)\|_{C^{2+\alpha}(\overline{\square})} < C, \tag{3.24}$$

где константа C не зависит от ε.

Из задачи (3.21) и оценок (3.19) следует цепочка соотношений

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1+\frac{\eta^{\frac12}(\varepsilon)}{\varepsilon^{\frac12}}\langle\operatorname{Tr} M_1(s,\,\cdot\,,\varepsilon)\rangle}{1+\frac{\eta^{\frac12}(\varepsilon)}{\varepsilon^{\frac12}}\langle\operatorname{Tr} M_1(s,\,\cdot\,,\varepsilon)\rangle} \leqslant \frac{1+c_{13}\frac{\eta^{\frac12}(\varepsilon)}{\varepsilon^{\frac12}}\left(\operatorname{Tr} M_1\left(s,\frac{s}{\varepsilon},\varepsilon\right)-\Delta_\xi\Theta\left(s,\frac{s}{\varepsilon},\varepsilon\right)\right)}{1+c_{12}\frac{\eta^{\frac12}(\varepsilon)}{\varepsilon^{\frac12}}\langle|\nabla_\xi\gamma(s,\,\cdot\,)|^2\rangle} \\ &= \frac{1+c_{13}\frac{\eta^{\frac12}(\varepsilon)}{\varepsilon^{\frac12}}\operatorname{Tr} M_1\left(s,\frac{s}{\varepsilon},\varepsilon\right) - c_{13}\eta^{\frac12}(\varepsilon)\varepsilon^{\frac12}\sum\limits_{j=1}^{n-1}\frac{\partial}{\partial s_i}\frac{\partial\Theta}{\partial\xi_i}\left(s,\frac{s}{\varepsilon}\right) + c_{13}\eta^{\frac12}(\varepsilon)\varepsilon^{\frac12}\sum\limits_{j=1}^{n-1}\frac{\partial^2\Theta}{\partial s_i\partial\xi_i}\left(s,\frac{s}{\varepsilon}\right)}{1+c_{12}\frac{\eta^{\frac12}(\varepsilon)}{\varepsilon^{\frac12}}\langle|\nabla_\xi\gamma(s,\,\cdot\,)|^2\rangle}. \end{aligned}$$

Здесь $\frac{\partial\Theta^2}{\partial s_i\partial\xi_i}$ означает частную производную по s_i и ξ_i от функции $\Theta(s,\xi)$, куда затем подставляется $\xi=\frac{s}{\varepsilon}$, в то время как $\frac{\partial}{\partial s_i}\frac{\partial\Theta}{\partial\xi_i}$ означает частную производную $\frac{\partial\Theta}{\partial\xi_i}(s,\xi)$, куда затем подставляется $\xi=\frac{s}{\varepsilon}$ и производится полное дифференцирование по s_i. Учитывая теперь условия (2.1), (2.3) и оценку (3.17), получаем

$$
\begin{aligned}
1\leqslant&\frac{1+c_{14}c_{13}\frac{\eta^{\frac12}(\varepsilon)}{\varepsilon^{\frac12}}\left(\operatorname{Tr}M_1\left(s,\frac{s}{\varepsilon},\varepsilon\right)\right)^{\frac14}-c_{13}\eta^{\frac12}(\varepsilon)\varepsilon^{\frac12}\sum\limits_{j=1}^{n-1}\frac{\partial}{\partial s_i}\frac{\partial\Theta}{\partial\xi_i}\left(s,\frac{s}{\varepsilon}\right)+c_{13}\eta^{\frac12}(\varepsilon)\varepsilon^{\frac12}\sum\limits_{j=1}^{n-1}\frac{\partial^2\Theta}{\partial s_i\partial\xi_i}\left(s,\frac{s}{\varepsilon}\right)}{1+c_{12}\frac{\eta^{\frac12}(\varepsilon)}{\varepsilon^{\frac12}}\langle|\nabla_\xi\gamma(s,\,\cdot\,)|^2\rangle}\\
\leqslant&c_{15}\frac{\varepsilon^{\frac12}}{\eta^{\frac12}(\varepsilon)}\big(\det G_\varepsilon(s)\big)^{\frac14}-c_{15}\varepsilon\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial}{\partial s_i}\frac{\partial\Theta}{\partial\xi_i}\left(s,\frac{s}{\varepsilon}\right)+c_{15}\varepsilon\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial^2\Theta}{\partial s_i\partial\xi_i}\left(s,\frac{s}{\varepsilon}\right),
\end{aligned}
$$

где c_{14}, c_{15} — некоторые константы, не зависящие от ε, η, s.

Вернёмся к оценке (3.16). С учётом полученных выше соотношений и оценки (3.24) имеем

$$
\begin{aligned}
\int\limits_\Gamma ds\int\limits_{-3\eta(\varepsilon)}^{-2\eta(\varepsilon)}|\nabla u_0||v_\varepsilon|\frac{\partial(1-\chi_\varepsilon)}{\partial\tau}\,d\tau\leqslant&c_{15}\frac{\varepsilon^{\frac12}}{\eta^{\frac12}(\varepsilon)}\int\limits_\Gamma ds\int\limits_{-3\eta(\varepsilon)}^{-\eta(\varepsilon)\gamma_\varepsilon(s)}|\nabla u_0||v_\varepsilon|\frac{\partial(1-\chi_\varepsilon)}{\partial\tau}\big(\det G_\varepsilon(s)\big)^{\frac14}\,d\tau\\
&+c_{15}\varepsilon\sum_{j=1}^{n-1}\int\limits_\Gamma ds\int\limits_{-3\eta(\varepsilon)}^{-2\eta(\varepsilon)}\frac{\partial\chi_\varepsilon}{\partial\tau}|\nabla u_0||v_\varepsilon|\frac{\partial}{\partial s_i}\frac{\partial\Theta}{\partial\xi_i}\left(s,\frac{s}{\varepsilon}\right)d\tau\\
&-c_{15}\varepsilon\sum_{j=1}^{n-1}\int\limits_\Gamma ds\int\limits_{-3\eta(\varepsilon)}^{-2\eta(\varepsilon)}\frac{\partial\chi_\varepsilon}{\partial\tau}|\nabla u_0||v_\varepsilon|\frac{\partial^2\Theta}{\partial s_i\partial\xi_i}\left(s,\frac{s}{\varepsilon}\right)d\tau.
\end{aligned}
$$

В первом слагаемом в правой части проинтегрируем по частям, перенося производную по τ, а во втором слагаемом перенесём производные по s_i. Тогда получим

$$
\begin{aligned}
\int\limits_\Gamma ds\int\limits_{-3\eta(\varepsilon)}^{-2\eta(\varepsilon)}|\nabla u_0||v_\varepsilon|\frac{\partial(1-\chi_\varepsilon)}{\partial\tau}\,d\tau\leqslant&c_{15}\frac{\varepsilon^{\frac12}}{\eta^{\frac12}(\varepsilon)}\int\limits_\Gamma|\nabla u_0||v_\varepsilon|\Big|_{\tau=-\eta(\varepsilon)\gamma_\varepsilon(s)}\big(\det G_\varepsilon(s)\big)^{\frac14}\,ds\\
&+c_{15}\frac{\varepsilon^{\frac12}}{\eta^{\frac12}(\varepsilon)}\int\limits_\Gamma ds\int\limits_{-3\eta(\varepsilon)}^{\eta(\varepsilon)\gamma_\varepsilon(s)}(1-\chi_\varepsilon)\big(\det G_\varepsilon(s)\big)^{\frac14}\frac{\partial}{\partial\tau}|\nabla u_0||v_\varepsilon|\,d\tau\\
&-c_{15}\varepsilon\sum_{j=1}^{n-1}\int\limits_\Gamma ds\int\limits_{-3\eta(\varepsilon)}^{-2\eta(\varepsilon)}\frac{\partial\chi_\varepsilon}{\partial\tau}\frac{\partial\Theta}{\partial\xi_i}\left(s,\frac{s}{\varepsilon}\right)\frac{\partial}{\partial s_i}|\nabla u_0||v_\varepsilon|\,d\tau\\
&-c_{15}\varepsilon\sum_{j=1}^{n-1}\int\limits_\Gamma ds\int\limits_{-3\eta(\varepsilon)}^{-2\eta(\varepsilon)}\frac{\partial\chi_\varepsilon}{\partial\tau}|\nabla u_0||v_\varepsilon|\frac{\partial^2\Theta}{\partial s_i\partial\xi_i}\left(s,\frac{s}{\varepsilon}\right)d\tau.
\end{aligned}
$$

Отсюда и из оценок (3.7), (3.8), (3.16), (3.12), (3.14), (3.18), выводим

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{i,j=1}^{n}\Big(A_{ij}\frac{\partial u_0}{\partial x_i},v_\varepsilon\frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial x_j}\Big)_{L_2(\Pi_{3\eta(\varepsilon)}\setminus\Pi_{2\eta(\varepsilon)})}\Big|&\\ \leqslant C\frac{\varepsilon^{\frac12}}{\eta^{\frac12}(\varepsilon)}\|v_\varepsilon\|_{L_2(\Gamma_\varepsilon)}\Big(\int\limits_{\Gamma}\Big(|\nabla u_0|\Big|_{\tau=\eta(\varepsilon)\gamma_\varepsilon(s)}\Big)^2 ds\Big)^{\frac12}&\\ +C\frac{\varepsilon}{\eta^{\frac12}(\varepsilon)}\|f\|_{L_2(\Omega)}\|v_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega_\varepsilon)}&\\ \leqslant C\frac{\varepsilon^{\frac12}}{\eta^{\frac12}(\varepsilon)}\|f\|_{L_2(\Omega)}\|v_\varepsilon\|_{L_2(\Gamma_\varepsilon)}&\\ +C\frac{\varepsilon}{\eta^{\frac12}(\varepsilon)}\|f\|_{L_2(\Omega)}\|v_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega_\varepsilon)}.&\end{aligned}\tag{3.25}$$

Из этого неравенства и (3.15) следует, что правая часть равенства (3.11) допускает оценку

$$\begin{aligned}\big|\big(f,(1-\chi_\varepsilon),v_\varepsilon\big)_{L_2(\Omega_\varepsilon)}+F_\varepsilon\big|\leqslant C\Big(\eta^{\frac12}(\varepsilon)+\frac{\varepsilon}{\eta^{\frac12}(\varepsilon)}\Big)\|f\|_{L_2(\Omega)}\|v_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega_\varepsilon)}&\\ +C\frac{\varepsilon^{\frac12}}{\eta^{\frac12}(\varepsilon)}\|f\|_{L_2(\Omega)}\|v_\varepsilon\|_{L_2(\Gamma_\varepsilon)}.&\end{aligned}$$

Отсюда и из неравенства (3.6) с $u=v_\varepsilon$ для левой части равенства (3.11) выводим

$$\|v_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega_\varepsilon)}+\|v_\varepsilon\|_{L_2(\Gamma_\varepsilon)}\leqslant C\Big(\eta^{\frac12}(\varepsilon)+\frac{\varepsilon^{\frac12}}{\eta^{\frac12}(\varepsilon)}\Big)\|f\|_{L_2(\Omega)}.\tag{3.26}$$

Теперь ещё отметим, что в силу (3.12), (3.13), (3.7), (3.8) верны оценки

$$\|(1-\chi_\varepsilon)u_0\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)}\leqslant C\eta^{\frac32}(\varepsilon)\|f\|_{L_2(\Omega)},\qquad \|\nabla(1-\chi_\varepsilon)u_0\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)}\leqslant C\eta^{\frac12}(\varepsilon)\|f\|_{L_2(\Omega)}.$$

Отсюда, из (3.26) и определения (3.9) функции v_ε вытекает

$$\|u_\varepsilon-u_0\|_{W_2^1(\Omega_\varepsilon)}\leqslant C\Big(\eta^{\frac12}(\varepsilon)+\frac{\varepsilon^{\frac12}}{\eta^{\frac12}(\varepsilon)}\Big),\|f\|_{L_2(\Omega)},$$

что доказывает оценку (2.8).

4. Операторная оценка в L_2

Операторную оценку в пространстве L_2 будет доказать на основе соображений двойственности [38], [39] с помощью техник работ [4], [5], [9].

Непосредственными вычислениями проверяется, что сопряжённый оператор $\mathcal{H}_0^*$ имеет дифференциальное выражение

$$\hat{\mathcal{H}}^*:=-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{A_{ij}(x)}\frac{\partial}{\partial x_i}-\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{A_j(x)}+\overline{A_0(x)}$$

и краевое условие Дирихле на $\partial\Omega$. Такой оператор по структуре совпадает с оператором $\mathcal{H}_0$, а потому он обладает теми же свойствами. А именно, он является m–секториальным, имеет область определения $\mathring{W}^2(\Omega,\partial\Omega)$ и соответствует полуторалинейной форме $\overline{\mathfrak{h}_0(v,u)}$. Полуплоскость $\operatorname{Re}\lambda\leqslant\lambda_0$ попадает в резольвентное множество оператора $\mathcal{H}_0^*$ с λ_0 из (3.2).

Функцию v_ε продолжим нулём в $\Omega\setminus\Omega_\varepsilon$; для продолжения сохраним прежнее обозначение. Обозначим $w := (\mathcal{H}_0^*-\lambda)^{-1}v_\varepsilon$. Для функции w верна оценка (3.7), которая в данном случае выглядит следующим образом

$$\|w\|_{W_2^2(\Omega)} \leqslant c_8\|v_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} = c_8\|v_\varepsilon\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)}. \tag{4.1}$$

Интегральное тождество для функции w с пробной функцией $\chi_\varepsilon v_\varepsilon$ имеет вид

$$\sum_{i,j=1}^n \left(A_{ij}\frac{\partial\chi_\varepsilon v_\varepsilon}{\partial x_j}, \frac{\partial w}{\partial x_i}\right)_{L_2(\Omega)} - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n\left(\chi_\varepsilon v_\varepsilon, \frac{\partial\overline{A_j}w}{\partial x_j}\right)_{L_2(\Omega)} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n\left(A_j\frac{\partial\chi_\varepsilon v_\varepsilon}{\partial x_j}, w\right)_{L_2(\Omega)}$$
$$+ (A_0 v_\varepsilon, \chi_\varepsilon w)_{L_2(\Omega)} - \lambda(v_\varepsilon, \chi_\varepsilon w)_{L_2(\Omega)} = (\chi_\varepsilon v_\varepsilon, v_\varepsilon)_{L_2(\Omega)}.$$

Учитывая очевидное равенство $(\chi_\varepsilon v_\varepsilon, aw)_{L_2(\Gamma_\varepsilon)} = 0$ и определение срезки χ_ε, прямыми вычислениями легко переписать приведённое выше интегральное тождество к виду

$$\mathfrak{h}_\varepsilon(v_\varepsilon, \chi_\varepsilon w) - \lambda(v_\varepsilon, \chi_\varepsilon w)_{L_2(\Omega)} + G_\varepsilon = (\chi_\varepsilon v_\varepsilon, v_\varepsilon)_{L_2(\Omega)}, \tag{4.2}$$

где функция G_ε задаётся формулой

$$G_\varepsilon := \sum_{i,j=1}^n \left(A_{ij}\frac{\partial\chi_\varepsilon}{\partial x_j}v_\varepsilon, \frac{\partial w}{\partial x_i}\right)_{L_2(\Pi_{3\eta(\varepsilon)}\setminus\Pi_{2\eta(\varepsilon)})} - \sum_{i,j=1}^n \left(A_{ij}\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_j}, \frac{\partial\chi_\varepsilon}{\partial x_i}w\right)_{L_2(\Pi_{3\eta(\varepsilon)}\setminus\Pi_{2\eta(\varepsilon)})}$$
$$+ \sum_{j=1}^n \left(A_j\frac{\partial\chi_\varepsilon}{\partial x_j}v_\varepsilon, w\right)_{L_2(\Pi_{3\eta(\varepsilon)}\setminus\Pi_{2\eta(\varepsilon)})}.$$

Так как функция $\chi_\varepsilon w$ тождественно равна нулю на $\Pi_{2\eta(\varepsilon)} \supset \Omega\setminus\Omega_\varepsilon$, то очевидны равенства

$$\mathfrak{h}_\varepsilon(v_\varepsilon, \chi_\varepsilon w) - \lambda(v_\varepsilon, \chi_\varepsilon w)_{L_2(\Omega)} = \mathfrak{h}_\varepsilon(u_\varepsilon, \chi_\varepsilon w) - \lambda(u_0, \chi_\varepsilon w)_{L_2(\Omega)}$$
$$- \big(\mathfrak{h}_0(\chi_\varepsilon u_0, \chi_\varepsilon w) - \lambda(\chi_\varepsilon u_0, \chi_\varepsilon w)_{L_2(\Omega)}\big),$$

откуда аналогично выводу интегрального тождества (3.10) получаем

$$\mathfrak{h}_\varepsilon(v_\varepsilon, \chi_\varepsilon w) - \lambda(v_\varepsilon, \chi_\varepsilon w)_{L_2(\Omega)} = ((1-\chi_\varepsilon)f, \chi_\varepsilon w)_{L_2(\Omega)} - \tilde{F}_\varepsilon,$$

где обозначено

$$\tilde{F}_\varepsilon := \sum_{i,j=1}^n \left(A_{ij}\frac{\partial u_0}{\partial x_j}, \chi_\varepsilon w_\varepsilon\frac{\partial\chi_\varepsilon}{\partial x_i}\right)_{L_2(\Pi_{3\eta(\varepsilon)}\setminus\Pi_{2\eta(\varepsilon)})} - \sum_{i,j=1}^n \left(A_{ij}\frac{\partial\chi_\varepsilon}{\partial x_j}u_0, \frac{\partial\chi_\varepsilon w}{\partial x_i}\right)_{L_2(\Pi_{3\eta(\varepsilon)}\setminus\Pi_{2\eta(\varepsilon)})}$$
$$- \sum_{j=1}^n \left(A_j u_0, \chi_\varepsilon w\frac{\partial\chi_\varepsilon}{\partial x_j}\right)_{L_2(\Pi_{3\eta(\varepsilon)}\setminus\Pi_{2\eta(\varepsilon)})}.$$

Отсюда и из (4.2) вытекает формула

$$(\chi_\varepsilon v_\varepsilon, v_\varepsilon)_{L_2(\Omega)} = G_\varepsilon - \tilde{F}_\varepsilon + ((1-\chi_\varepsilon)f, \chi_\varepsilon w)_{L_2(\Omega)}. \tag{4.3}$$

Оценим правую часть этой формулы.

Аналогично выводу оценок (3.15), на основе леммы 3.1 и оценок (3.7), (4.1), (3.8), (3.26) сразу выводим

$$\left|\sum_{i,j=1}^n \left(A_{ij}\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_j}, \frac{\partial\chi_\varepsilon}{\partial x_i}w\right)_{L_2(\Pi_{3\eta(\varepsilon)}\setminus\Pi_{2\eta(\varepsilon)})}\right| + \left|\sum_{j=1}^n \left(A_j\frac{\partial\chi_\varepsilon}{\partial x_j}v_\varepsilon, w\right)_{L_2(\Pi_{3\eta(\varepsilon)}\setminus\Pi_{2\eta(\varepsilon)})}\right| + |\tilde{F}_\varepsilon|$$
$$+ |((1-\chi_\varepsilon)f, \chi_\varepsilon w)_{L_2(\Omega)}| \leqslant C\eta^{\frac{1}{2}}(\varepsilon)\|v_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega_\varepsilon)}\|w\|_{W_2^2(\Omega)} + C\eta(\varepsilon)\|u_0\|_{W_2^2(\Omega_\varepsilon)}\|w\|_{W_2^2(\Omega)} \tag{4.4}$$
$$+ C\eta^{\frac{3}{2}}(\varepsilon)\|f\|_{L_2(\Omega)}\|w\|_{W_2^2(\Omega)}$$
$$\leqslant C(\eta(\varepsilon) + \varepsilon^{\frac{1}{2}})\|f\|_{L_2(\Omega)}\|v_\varepsilon\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)},$$

где константа C не зависит от ε, f, v_ε, u_0, w. Оставшееся слагаемое в функции G_ε оценивается аналогично (3.25) с использованием (3.26), (4.1)

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i,j=1}^{n}\left(A_{ij}\frac{\partial\chi_\varepsilon}{\partial x_j}v_\varepsilon,\frac{\partial w}{\partial x_i}\right)_{L_2(\Pi_{3\eta(\varepsilon)}\setminus\Pi_{2\eta(\varepsilon)})}\right|\leqslant&C\frac{\varepsilon^{\frac12}}{\eta^{\frac12}(\varepsilon)}\|w\|_{W_2^2(\Omega)}\|v_\varepsilon\|_{L_2(\Gamma_\varepsilon)}\\&+C\frac{\varepsilon}{\eta^{\frac12(\varepsilon)}}\|w\|_{W_2^2(\Omega)}\|v_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega_\varepsilon)}\\\leqslant&C\left(\frac{\varepsilon}{\eta(\varepsilon)}+\varepsilon^{\frac12}\right)\|f\|_{L_2(\Omega)}\|v_\varepsilon\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)}.\end{aligned}$$

Отсюда и из (4.4), (4.3) получаем

$$\left|(\chi_\varepsilon v_\varepsilon,v_\varepsilon)_{L_2(\Omega)}\right|\leqslant C\left(\frac{\varepsilon}{\eta(\varepsilon)}+\varepsilon^{\frac12}\right)\|f\|_{L_2(\Omega)}\|v_\varepsilon\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)}. \tag{4.5}$$

Отметим ещё, что в силу (3.12), (3.26) верна оценка

$$\left|((1-\chi_\varepsilon)v_\varepsilon,v_\varepsilon)_{L_2(\Omega)}\right|\leqslant C\eta^{\frac12}(\varepsilon)\|v_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega_\varepsilon)}\|v_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)}\leqslant C(\eta(\varepsilon)+\varepsilon^{\frac12})\|f\|_{L_2(\Omega)}\|v_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)}.$$

В силу (4.5) теперь окончательно выводим

$$\|v_\varepsilon\|^2_{L_2(\Omega_\varepsilon)}\leqslant C\left(\varepsilon^{\frac12}+\eta(\varepsilon)+\frac{\varepsilon}{\eta(\varepsilon)}\right)\|f\|_{L_2(\Omega)}\|v_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)},$$

что доказывает оценку (2.10).

Благодарности

Работа выполнена во время моего визита в Китайско–Российский математический центр Пекинского университета. Я глубоко благодарен за оказанное гостеприимство и прекрасные условия для работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А.Г. Беляев, А.Г. Михеев, А.С. Шамаев. *Дифракция плоской волны на быстро–осциллирующей поверхности* // Ж. вычисл. мат. мат. физ. **32**:8, 1258–1272 (1992).
2. Д.И. Борисов, Р.Р. Сулейманов. *Об операторных оценках для эллиптических операторов со смешанными краевыми условиями в двумерных областях с быстро осциллирующей границей* // Мат. заметки. **116**:2, 163–184 (2024).
3. Д.И. Борисов, Р.Р. Сулейманов. *Операторные оценки для задач в областях с сингулярным искривлением границы: условия Дирихле и Неймана* // Докл. РАН. Мат. инф. проц. упр. **515**, 11–17 (2024).
4. Д.И. Борисов, Р.Р. Сулейманов. *Об операторных оценках для эллиптических уравнений в многомерных областях с сильно искривленной границей* // Мат. сб. **216**:1, 30–60 (2025).
5. Д.И. Борисов, Р.Р. Сулейманов. *Об операторных оценках для эллиптических уравнений в двумерных областях с быстро осциллирующей границей и частой сменой краевых условий* // Мат. сб. **216**:8, 22–40 (2025).
6. Д. И. Борисов. *Об операторных оценках для плоских областей с нерегулярным искривлением границы: условия Дирихле и Неймана* // Пробл. мат. анал. 116, 69–84 (2022).
7. Д.И. Борисов, Т.Ф. Шарапов. *О резольвенте многомерных операторов с частой сменой краевых условий в случае третьего усредненного условия* // Пробл. мат. анал. 83, 3–40 (2015).
8. Д.И. Борисов, А.И. Мухаметрахимова. *Равномерная сходимость и асимптотики для задач в областях с мелкой перфорацией вдоль заданного многообразия в случае усреднённого условия Дирихле* // Мат. сб. **212**:8, 33–88 (2021).

9. Д.И. Борисов, А.И. Мухаметрахимова. *Равномерная сходимость для задач с перфорацией вдоль заданного многообразия и третьим нелинейным краевым условием на границах полостей* // Алг. анал. **35**:4, 20–78 (2023).
10. Д.И. Борисов. *Операторные оценки в двумерных задачах с частой сменой в случае малых частей с условием Дирихле* // Тр. Инст. мат. мех. УрО РАН. **29**:1, 36–55 (2023).
11. В.В. Грушин, С.Ю. Доброхотов. *Осреднение в задаче о длинных волнах на воде над участком дна с быстрыми осцилляциями* // Мат. заметки. **95**:3, 359–375 (2014).
12. Т. Като. *Теория возмущений линейных операторов.* М.: Мир. 1972.
13. В.А. Козлов, С.А. Назаров. *Асимптотика спектра задачи Дирихле для бигармонического оператора в области с сильно изрезанной границей* // Алг. анал. **22**:6, 127–184 (2010).
14. С.А. Назаров. *Асимптотика решения и моделирование задачи Дирихле в угловой области с быстроосциллирующей границей* // Алг. анал. **19**:2, 183–225 (2007).
15. С.А. Назаров. *Асимптотика решений и моделирование задач теории упругости в области с быстроосциллирующей границей* // Изв. РАН. Сер. мат. **72**:3, 103–158 (2008).
16. О.А. Олейник, Г.А. Иосифьян, А.С. Шамаев. *Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред.* М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990.
17. С.Е. Пастухова. *Эффект осциллирующей границы при усреднении одной задачи климатизации* // Дифф. уравн. **37**:9, 1216–1222 (2001).
18. Y. Amirat, O. Bodart, G. A. Chechkin, A. L. Piatnitski. *Boundary homogenization in domains with randomly oscillating boundary* // Stochastic Processes Appl. **121**:1, 1–23 (2011).
19. J.M. Arrieta, S.M. Bruschi. *Very rapidly varying boundaries in equations with nonlinear boundary conditions. The case of a non uniformly Lipschitz deformation* // Discrete Contin. Dyn. Syst., Ser. B. **14**:2, 327–351 (2010).
20. G.R. Barrenechea, P. Le Tallec, F. Valentin. *New wall laws for the unsteady incompressible Navier — Stokes equations on rough domains* // M2AN, Math. Model. Numer. Anal. **36**:2, 177–203 (2002).
21. D. Borisov, G. Cardone, L. Faella, C. Perugia. *Uniform resolvent convergence for strip with fast oscillating boundary* // J. Differ. Equations **255**:12, 4378–4402 (2013).
22. D. Borisov, G. Cardone, T. Durante. *Norm resolvent convergence for elliptic operators in domain with perforation along curve* // C.R. Math. **352**:9, 679–683 (2014).
23. D. Borisov, G. Cardone, T. Durante. *Homogenization and norm–resolvent convergence for elliptic operators in a strip perforated along a curve* // Proc. R. Soc. Edinb., Sect. A, Math. **146**:6, 1115–1158 (2016).
24. D. Borisov, R. Bunoiu, G. Cardone. *Waveguide with non–periodically alternating Dirichlet and Robin conditions: homogenization and asymptotics* // Z. Angew. Math. Phys. **64**:3, 439–472 (2013).
25. D. Borisov, R. Bunoiu, G. Cardone. *Homogenization and asymptotics for a waveguide with an infinite number of closely located small windows* // Пробл. мат. анал. 58, 59–68 (2011).
26. D. Borisov, R. Bunoiu, and G. Cardone. *On a waveguide with frequently alternating boundary conditions: homogenized Neumann condition* // Ann. H. Poincaré. **11**:8, 1591–1627 (2010).
27. D. Borisov, R. Bunoiu, and G. Cardone. *On a waveguide with an infinite number of small windows* // C.R. Math. **349**:1-2, 53–56 (2011).
28. D. Borisov, and G. Cardone. *Homogenization of the planar waveguide with frequently alternating boundary conditions* // J. Phys. A, Math. Theor. **42**:36, 365205 (2009).
29. D.I. Borisov, J. Kříž. *Operator estimates for non–periodically perforated domains with Dirichlet and nonlinear Robin conditions: vanishing limit* // Anal. Math. Phys. **13**, 5 (2023).
30. D.I. Borisov. *Operator estimates for non–periodically perforated domains with Dirichlet and nonlinear Robin conditions: strange term* // Math. Methods Appl. Sci. **47**:6, 4122–4164 (2024).
31. D.I. Borisov. *Operator estimates for non–periodically perforated domains: disappearance of cavities* // Appl. Anal. **103**:5, 859–873 (2024).
32. G.A. Chechkin, A. Friedman, A.L. Piatnitski. *The boundary–value problem in domains with very rapidly oscillating boundary* // J. Math. Anal. Appl. **231**:1, 213–234 (1999).
33. E.N. Dancer, D. Daners. *Domain perturbation for elliptic equations subject to Robin boundary conditions* // J. Differ. Equations. **138**:1, 86–132 (1997).

34. M.K. Gobbert, C.A. Ringhofer. *An asymptotic analysis for a model of chemical vapor deposition on a microstructured surface* // SIAM J. Appl. Math. **58**:3, 737–752 (1998).
35. W. Jäger, A. Mikelić. *Couette flows over a rough boundary and drag reduction* // Commun. Math. Phys. **232**:3, 429–455 (2003).
36. Myong–Hwan Ri. *Effective wall–laws for the Stokes equations over curved rough boundaries* // Prerpint: arXiv:1311.0977.
37. N. Neuss, M. Neuss–Radu, A. Mikelić. *Effective laws for the Poisson equation on domains with curved oscillating boundaries* // Appl. Anal. **85**:5, 479–502 (2006).
38. N.N. Senik. *Homogenization for non–self–adjoint periodic elliptic operators on an infinite cylinder* // SIAM J. Math. Anal. **49**:2, 874–898 (2017).
39. N.N. Senik. *Homogenization for locally periodic elliptic operators* // J. Math. Anal. Appl. **505**:2, 125581 (2022).

Борисов Денис Иванович,
Институт математики с вычислительным центром УФИЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия

Башкирский государственный
педагогический университет им. М. Акмуллы,
ул. Октябрьской революции, 3-а,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: `borisovdi@yandex.ru`