ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 18 № 3 (2026). С. 17-25.

УДК 517.521

ЗАДАЧА О СУЩЕСТВОВАНИИ ПРЕДЕЛА СПЕЦИАЛЬНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ СИНУСОВ

Е.Д. АЛФЕРОВА, В.Е. ПОДОЛЬСКИЙ, В.Б. ШЕРСТЮКОВ

Аннотация. Ставится задача об изучении асимптотического поведения «длинных» произведений синусов с аргументами, порожденными заданной бесконечно большой последовательностью. Коротко обсуждаются возможные ответвления общей задачи. Основное внимание уделено случаю, когда речь идет о некоторой подпоследовательности последовательности факториалов натуральных чисел. Метод доказательства центральных результатов основан на теоретико–числовых свойствах последовательностей, составленных из факториалов, умноженных (разделенных) на эйлерово число. Привлекаются малоизвестные интегральные представления для целой и дробной частей элементов подобных последовательностей. Намечены идеи развития предложенного подхода, обозначены перспективные моменты. Исследование инициировано недавно возникшим в теории краевых задач вопросом о точном вычислении спектрального радиуса для параметрического семейства функциональных операторов.

Ключевые слова: произведение синусов, факториал, эйлерово число, интегральное представление, спектральный радиус.

Mathematics Subject Classification: 33B15

1. Введение

В работе [8] поставлен следующий вопрос. Пусть p — фиксированное вещественное число, $p > 1$. Чему равен предел последовательности $(b_n(p))^{\frac{1}{n}}$, где

$$b_n(p) \equiv \sup_{x\in\mathbb{R}} \prod_{k=1}^{n} \left|\sin p^k x\right|, \tag{1.1}$$

при $n \to \infty$? Полный ответ на этот вопрос не известен. Согласно [10] (см. также [6]) для почти всех (но не всех) значений p такой предел равен 1. Строгому обоснованию существования предела при любом p и доказательству элементарным методом соотношения

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sup_{x\in\mathbb{R}} \prod_{k=1}^{n} \left|\sin 2^{\nu k} x\right| \right)^{\frac{1}{n}} = \cos \frac{\pi}{2\left(2^{\nu}+1\right)}, \qquad \nu \in \mathbb{N},$$

посвящена заметка [1] и развернутая работа [2]. Исследование продолжено в [3], где поведение последовательности (1.1) изучалось для иррациональных чисел p специального вида, обладающих свойством Пизо. В [1], [2], [3] подробно освещена история вопроса и дан сопроводительный список библиографических источников.

E.D. Alferova, V.E. Podolskii, V.B. Sherstyukov, Problem on existence of limit for special product of sines.

© Алферова Е.Д., Подольский В.Е., Шерстюков В.Б. 2026.

Статья подготовлена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования в рамках программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2025-345.

Поступила 26 февраля 2026 г.

Естественно возникает более общая задача. Пусть $\mathcal{P} = (p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ — некоторая последовательность положительных чисел, стремящаяся к $+\infty$. Обозначим

$$a_n^{(\mathcal{P})} \equiv \left(\sup_{x\in\mathbb{R}} \prod_{k=1}^{n} |\sin p_k x|\right)^{\frac{1}{n}}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{1.2}$$

Очевидно, что

$$0 \leqslant \varliminf_{n\to\infty} a_n^{(\mathcal{P})} \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} a_n^{(\mathcal{P})} \leqslant 1.$$

Требуется выяснить, существует ли предел

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{(\mathcal{P})}, \tag{1.3}$$

и вычислить величину (1.3) в случае ее существования.

По–видимому, определенный интерес представляет также аналогичная задача, в постановке которой бесконечно большая последовательность заменяется на бесконечно малую.

Напротив, вопрос становится малосодержательным, если предел сходящейся последовательности положительных чисел $\mathcal{P}$ отличен от нуля. Действительно, пусть $p_k \to p_0 > 0$ при $k \to \infty$. Предположив для простоты, что $p_k/(2p_0) \notin \mathbb{N}$ по всем номерам k, получим последовательность положительных чисел

$$\left|\sin \frac{\pi p_k}{2p_0}\right| \to 1, \qquad k \to \infty.$$

Но тогда, как известно, последовательность средних геометрических

$$\left(\prod_{k=1}^{n} \left|\sin \frac{\pi p_k}{2p_0}\right|\right)^{\frac{1}{n}} \to 1, \qquad n \to \infty,$$

что обеспечивает существование и равенство единице величины (1.3).

Вернемся к основному направлению и обсудим некоторые возможности, заложенные в конструкцию (1.2) с бесконечно большой последовательностью $\mathcal{P}$.

На наш взгляд, интересная линия, относящаяся к асимптотическому поведению величины (1.2), возникает при напрашивающемся выборе в качестве порождающей последовательности $\mathcal{P}$ произвольной арифметической прогрессии. Даже в таком «простейшем» случае, как $p_k = k$, где $k \in \mathbb{N}$, задача не вполне тривиальна[1] и отчасти связана с вопросом об асимптотике глобального минимума ядра Дирихле (см. [4]).

Специфика геометрической прогрессии $\mathcal{P} = \left(p^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ в контексте поставленной выше задачи состоит в том, что последовательность (1.1) при любом значении $p > 1$ является *субмультипликативной*, т.е.

$$b_{m+n}(p) \leqslant b_m(p) b_n(p), \qquad m, n \in \mathbb{N},$$

и согласно лемме Фекете соответствующая последовательность (1.2) всегда имеет предел (подробности см. в [1]). Здесь уместно упомянуть об одном наблюдении, ускользнувшем от нашего внимания в [3, теорема 1]. Дело в том, что $(b_n(p))^{\frac{1}{n}} \leqslant 1$ при всех $n \in \mathbb{N}$, а субмультипликативность последовательности (1.1) влечет равенство

$$\lim_{n\to\infty} (b_n(p))^{\frac{1}{n}} = \inf_{n\in\mathbb{N}} (b_n(p))^{\frac{1}{n}}. \tag{1.4}$$

Отсюда делаем следующий вывод: если параметр $p > 1$ взят так, что предел в (1.4) оказался равным единице, то $b_n(p) = 1$ для каждого номера $n \in \mathbb{N}$. Так будет, например,

[1] Как выяснилось при подготовке статьи к печати, эта задача была решена в [9].

всякий раз, когда p — трансцендентное число или p — число Пизо из класса квадратичных иррациональностей, введенного в [3].

В общем положении ситуация усложняется, поскольку последовательность

$$b_n^{(\mathcal{P})} \equiv \left(a_n^{(\mathcal{P})}\right)^n = \sup_{x\in\mathbb{R}} \prod_{k=1}^{n} |\sin p_k x|\,, \qquad n \in \mathbb{N},$$

может терять свойство субмультипликативности. Например, если $\mathcal{P} = (k!)_{k\in\mathbb{N}}$, то

$$b_2^{(\mathcal{P})} \equiv \sup_{x\in\mathbb{R}} |\sin x \sin 2x| = \frac{4\sqrt{3}}{9} = 0.7698\ldots,$$
$$b_4^{(\mathcal{P})} \equiv \sup_{x\in\mathbb{R}} |\sin x \sin 2x \sin 6x \sin 24x| = 0.6906\ldots,$$

откуда

$$b_4^{(\mathcal{P})} = 0.6906\ldots > 0.5925\ldots = \left(b_2^{(\mathcal{P})}\right)^2.$$

Интересом к последнему примеру и определяется основное содержание статьи, которая является пробным шагом при переходе в конструкции (1.2) от геометрической прогрессии к последовательностям сверхэкспоненциального роста.

Справедлив следующий точный результат.

Теорема 1.1. *В любом из случаев*

$$\mathcal{P} = ((2k)!)_{k\in\mathbb{N}}\,, \qquad \mathcal{P} = ((4k-3)!)_{k\in\mathbb{N}}\,, \qquad \mathcal{P} = ((4k-1)!)_{k\in\mathbb{N}}$$

предел (1.3) существует и равен 1.

Второй результат носит предварительный характер.

Теорема 1.2. *При выборе порождающей последовательности* $\mathcal{P} = (k!)_{k\in\mathbb{N}}$ *нижний предел при* $n \to \infty$ *величины (1.2) не меньше чем* $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Вопрос о существовании предела

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sup_{x\in\mathbb{R}} \prod_{k=1}^{n} |\sin k!\,x| \right)^{\frac{1}{n}}$$

пока остается открытым, хотя у нас нет сомнений в том, что записанный предел не только существует, но и равен единице. Впрочем, для обоснования такого утверждения потребуется развить метод, предлагаемый в настоящей заметке (см. обсуждение в заключительном разделе 3).

Сформулированные результаты будут доказаны в следующем разделе.

2. Доказательства теорем 1.1 и 1.2

2.1. Доказательство теоремы 1.2. Доказательство теоремы 1.2 начнем с проверки справедливости соотношения

$$\varliminf_{n\to\infty} \left(\sup_{x\in\mathbb{R}} \prod_{k=1}^{n} |\sin k!\,x| \right)^{\frac{1}{n}} \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}. \tag{2.1}$$

Пусть $u \in \mathbb{R}$. Приведем список используемых обозначений:

- $\lfloor u \rfloor$ — пол (целая часть) числа u,

- $\lceil u \rceil$ — потолок числа u,
- $\{u\}$ — дробная часть u,
- $\lfloor u \rceil$ — ближайшее к u целое число,
- $\|u\|$ — расстояние от u до $\lfloor u \rceil$.

Перепишем (2.1) в эквивалентном виде

$$\varliminf_{n\to\infty} \left(\sup_{t\in\mathbb{R}} \prod_{k=1}^{n} |\sin k!et| \right)^{\frac{1}{n}} \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}, \tag{2.2}$$

а для проверки (2.2) воспользуемся следующим утверждением.

Лемма 2.1. *При любом $k \in \mathbb{N}$ в представлении*

$$k!e = \lfloor k!e \rceil + \{k!e\}$$

слагаемые таковы, что

$$\lfloor k!e \rceil = 3q_k + \delta_k, \qquad q_k \in \mathbb{N}_0 \equiv \mathbb{N} \cup \{0\}, \qquad \delta_k \in \{1, 2\}, \tag{2.3}$$

$$\{k!e\} \to 0, \qquad k \to \infty. \tag{2.4}$$

Доказательство. В работе [7] указаны формулы

$$I_k^{(1)} \equiv \int_0^1 s^k e^{1-s}\, ds = \{k!e\}, \tag{2.5}$$

$$I_k^{(2)} \equiv \int_1^{+\infty} s^k e^{1-s}\, ds = \lfloor k!e \rceil, \tag{2.6}$$

действующие при всех $k \in \mathbb{N}$. Тем самым представление

$$k!e = e \int_0^{+\infty} s^k e^{-s}\, ds = I_k^{(1)} + I_k^{(2)}$$

есть разбиение числа $k!e$ на дробную и целую части. Из (2.5) не только сразу следует (2.4), но и видно, что последовательность дробных частей $\{k!e\}$ вполне монотонна (в частности, убывает и выпукла). Далее, интегралы (2.6) подчинены рекуррентному правилу

$$I_{k+1}^{(2)} = (k+1)\, I_k^{(2)} + 1, \qquad k \in \mathbb{N}, \qquad I_1^{(2)} = 2, \tag{2.7}$$

в чем можно убедиться, интегрируя по частям. Благодаря (2.7) легко выписать несколько первых членов последовательности (2.6). Начало будет таким

$$2, \quad 5, \quad 16, \quad 65, \quad 326, \quad 1957, \quad 13700, \quad 109601, \quad 986410, \quad \ldots \tag{2.8}$$

с периодической последовательностью

$$2, \quad 2, \quad 1, \quad 2, \quad 2, \quad 1, \quad 2, \quad 2, \quad 1, \quad \ldots$$

остатков от деления $I_k^{(2)}$ на 3. Формула (2.3) является огрубленной фиксацией последнего свойства. Строгое обоснование проводится с помощью (2.7). К примеру, тот факт, что $I_{3m}^{(2)}$ при любом $m \in \mathbb{N}$ дает остаток 1 при делении на 3, вытекает из формулы

$$I_{3m}^{(2)} = 3m\, I_{3m-1}^{(2)} + 1, \qquad m \in \mathbb{N}.$$

Лемма 2.1 доказана. □

Вернемся к доказательству теоремы 1.2 и проверим оценку (2.2). Очевидно,

$$\left(\sup_{t\in\mathbb{R}}\prod_{k=1}^{n}|\sin k!\,e\,t|\right)^{\frac{1}{n}} \geqslant \left(\prod_{k=1}^{n}\left|\sin k!\,e\,\frac{\pi}{3}\right|\right)^{\frac{1}{n}}, \qquad n\in\mathbb{N}. \tag{2.9}$$

Последовательность положительных чисел $\alpha_k \equiv \left|\sin k!\,e\,\frac{\pi}{3}\right|$ по лемме 2.1 стремится к $\frac{\sqrt{3}}{2}$ при $k\to\infty$, поскольку

$$k!\,e\,\frac{\pi}{3} = (3q_k+\delta_k)\,\frac{\pi}{3} + \{k!\,e\}\,\frac{\pi}{3}, \qquad q_k\in\mathbb{N}_0,$$

при всех $k\in\mathbb{N}$, откуда

$$\alpha_k = \sin\left(\frac{\pi\delta_k}{3}+\varepsilon_k\right) \to \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad k\to\infty.$$

Мы использовали то, что $\varepsilon_k \equiv \{k!\,e\}\,\frac{\pi}{3} \to 0$ при $k\to\infty$, а также свойство $\delta_k = 1$ или 2 (см. (2.3), (2.4)). Но тогда

$$\left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)^{\frac{1}{n}} \to \frac{\sqrt{3}}{2}$$

при $n\to\infty$. Переход к нижнему пределу в (2.9) дает (2.2). Теорема 1.2 доказана.

2.2. Доказательство теоремы 1.1. Доказательству теоремы 1.1 предпошлем две леммы.

Лемма 2.2. *Для любого $k\in\mathbb{N}$ целая часть $\lfloor(2k)!\,e\rfloor$ является нечетным числом, а целая часть $\lfloor(4k-3)!\,e\rfloor$ дает остаток 2 при делении на 4.*

Доказательство. Заявленные свойства хорошо просматриваются на первых членах (2.8). Из (2.6), (2.7) получим, что при любом $k\in\mathbb{N}$ число

$$\lfloor(2k)!\,e\rfloor = I^{(2)}_{2k} = 2k\,I^{(2)}_{2k-1}+1$$

является нечетным, а число

$$\lfloor(4k-3)!\,e\rfloor = I^{(2)}_{4k-3} = \begin{cases} 2, & k=1,\\ (4k-4)\big((4k-3)I^{(2)}_{4k-5}+1\big)+2, & k=2,3,\dots,\end{cases}$$

при делении на 4 дает остаток 2. Лемма 2.2 доказана. □

Лемма 2.3. *Для любого $k\in\mathbb{N}$ число $\lfloor(4k-1)!/e\rfloor$ при делении на 4 дает остаток 2, причем $\{(4k-1)!/e\}\to 0$, если $k\to\infty$.*

Доказательство. Нетрудно проверить (см. [5]), что

$$I^{(3)}_m \equiv \int_0^1 s^m e^{s-1}\,ds = \left\|\frac{m!}{e}\right\| = (-1)^m\left(\left\lfloor\frac{m!}{e}\right\rceil - \frac{m!}{e}\right), \qquad m\in\mathbb{N}. \tag{2.10}$$

Из определения (левая часть (2.10)) ясно, что $I^{(3)}_m\to 0$ при $m\to\infty$. С другой стороны, можно применять рекуррентную формулу

$$I^{(3)}_{m+1} = 1-(m+1)I^{(3)}_m, \qquad m\in\mathbb{N}, \qquad I^{(3)}_1 = \frac{1}{e}, \tag{2.11}$$

выведенную интегрированием по частям. Согласно (2.10) при любом $k \in \mathbb{N}$ интеграл

$$0 < I_{4k-1}^{(3)} \equiv \int\limits_0^1 s^{4k-1} e^{s-1}\, ds$$

вычисляется как

$$\frac{(4k-1)!}{e} - \left\lfloor \frac{(4k-1)!}{e} \right\rceil = \frac{(4k-1)!}{e} - \left\lfloor \frac{(4k-1)!}{e} \right\rfloor = \left\{ \frac{(4k-1)!}{e} \right\} \to 0, \qquad k \to \infty.$$

Кроме того,

$$\left\lfloor \frac{(4k-1)!}{e} \right\rfloor = \begin{cases} 2, & k = 1, \\ (4k-2)(16k^2 - 20k + 5) + \frac{(4k-1)!}{(4k-5)!} \left\lfloor \frac{(4k-5)!}{e} \right\rfloor, & k = 2,\, 3,\, \dots, \end{cases} \tag{2.12}$$

где последняя формула возникнет, если выразить $I_{4k-1}^{(3)}$ через $I_{4k-5}^{(3)}$ с помощью (2.11) и затем заменить в полученном соотношении $I_{4k-1}^{(3)}$ на разность $(4k-1)!/e - \lfloor (4k-1)!/e \rfloor$, а $I_{4k-5}^{(3)}$ — на разность $(4k-5)!/e - \lfloor (4k-5)!/e \rfloor$. Как видно из (2.12), при любом $k \in \mathbb{N}$ число $\lfloor (4k-1)!/e \rfloor$ сравнимо с 2 по модулю 4, поскольку

$$(4k-2)(16k^2 - 20k + 5) = 4(k-1)(16k^2 - 12k + 3) + 2,$$
$$\frac{(4k-1)!}{(4k-5)!} = 4(k-1)(4k-3)(4k-2)(4k-1).$$

Лемма 2.3 доказана. □

Приступим непосредственно к доказательству теоремы 1.1.

Доказательство. Пусть сначала $\mathcal{P} = ((2k)!)_{k \in \mathbb{N}}$. Придадим последовательности (1.2) следующий вид

$$a_n^{(\mathcal{P})} = \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} \prod_{k=1}^n |\sin(2k)!\, x| \right)^{\frac{1}{n}} = \left(\sup_{t \in \mathbb{R}} \prod_{k=1}^n |\sin(2k)!\, e t| \right)^{\frac{1}{n}}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

В таком случае при любом $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$a_n^{(\mathcal{P})} \geqslant \left(\prod_{k=1}^n \left| \sin(2k)!\, e\, \frac{\pi}{2} \right| \right)^{\frac{1}{n}}.$$

Последовательность положительных чисел $\beta_k \equiv \left| \sin(2k)!\, e \frac{\pi}{2} \right|$ стремится к 1 при $k \to \infty$, поскольку

$$(2k)!\, e\, \frac{\pi}{2} = \lfloor (2k)!\, e \rfloor\, \frac{\pi}{2} + \{(2k)!\, e\}\, \frac{\pi}{2},$$

где $\lfloor (2k)!\, e \rfloor$ — нечетное число по лемме 2.2, $\{(2k)!\, e\} \to 0$ при $k \to \infty$ по лемме 2.1 (см. там свойство (2.4)). Но тогда

$$\left(\prod_{k=1}^n \beta_k \right)^{\frac{1}{n}} \to 1$$

при $n \to \infty$. Следовательно,

$$1 \geqslant \varlimsup_{n \to \infty} a_n^{(\mathcal{P})} \geqslant \varliminf_{n \to \infty} a_n^{(\mathcal{P})} \geqslant \lim_{n \to \infty} \left(\prod_{k=1}^n \beta_k \right)^{\frac{1}{n}} = 1,$$

т.е. при выборе $\mathcal{P} = ((2k)!)_{k \in \mathbb{N}}$ предел (1.3) существует и равен 1.

Пусть теперь $\mathcal{P} = ((4k-3)!)_{k\in\mathbb{N}}$. Тогда последовательность (1.2) примет вид

$$a_n^{(\mathcal{P})} = \left(\sup_{x\in\mathbb{R}} \prod_{k=1}^{n} |\sin(4k-3)!x|\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\sup_{t\in\mathbb{R}} \prod_{k=1}^{n} |\sin(4k-3)!et|\right)^{\frac{1}{n}}, \quad n\in\mathbb{N}.$$

При любом $n\in\mathbb{N}$ верна оценка

$$a_n^{(\mathcal{P})} \geqslant \left(\prod_{k=1}^{n} \left|\sin(4k-3)!e\,\frac{\pi}{4}\right|\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Возникшая последовательность положительных чисел $\gamma_k = \left|\sin(4k-3)!e\,\frac{\pi}{4}\right|$ стремится к 1 при $k\to\infty$, так как

$$(4k-3)!e\,\frac{\pi}{4} = \lfloor(4k-3)!e\rfloor\,\frac{\pi}{4} + \{(4k-3)!e\}\,\frac{\pi}{4},$$

где каждая целая часть $\lfloor(4k-3)!e\rfloor$ дает остаток 2 при делении на 4 (по лемме 2.2), и $\{(4k-3)!e\}\to 0$ при $k\to\infty$ по лемме 2.1 (см. (2.4)). Поэтому

$$\left(\prod_{k=1}^{n}\gamma_k\right)^{\frac{1}{n}} \to 1$$

при $n\to\infty$. В результате

$$1 \geqslant \varlimsup_{n\to\infty} a_n^{(\mathcal{P})} \geqslant \varliminf_{n\to\infty} a_n^{(\mathcal{P})} \geqslant \lim_{n\to\infty}\left(\prod_{k=1}^{n}\gamma_k\right)^{\frac{1}{n}} = 1,$$

т.е. при выборе $\mathcal{P} = ((4k-3)!)_{k\in\mathbb{N}}$ предел (1.3) существует и равен 1.

Пусть, наконец, $\mathcal{P} = ((4k-1)!)_{k\in\mathbb{N}}$ и рассматривается последовательность

$$a_n^{(\mathcal{P})} = \left(\sup_{x\in\mathbb{R}} \prod_{k=1}^{n} |\sin(4k-1)!x|\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\sup_{t\in\mathbb{R}} \prod_{k=1}^{n} \left|\sin\frac{(4k-1)!}{e}t\right|\right)^{\frac{1}{n}}, \qquad n\in\mathbb{N},$$

очевидно удовлетворяющая оценке

$$a_n^{(\mathcal{P})} \geqslant \left(\prod_{k=1}^{n} \left|\sin\frac{(4k-1)!}{e}\,\frac{\pi}{4}\right|\right)^{\frac{1}{n}}, \qquad n\in\mathbb{N}.$$

По лемме 2.3 в представлении

$$\frac{(4k-1)!}{e}\,\frac{\pi}{4} = \left\lfloor\frac{(4k-1)!}{e}\right\rfloor\frac{\pi}{4} + \left\{\frac{(4k-1)!}{e}\right\}\frac{\pi}{4}$$

синус первого слагаемого равен ± 1, а второе слагаемое является бесконечно малой величиной при $k\to\infty$. Значит,

$$0 < \mu_k \equiv \left|\sin\frac{(4k-1)!}{e}\,\frac{\pi}{4}\right| \to 1, \qquad k\to\infty,$$

откуда

$$\left(\prod_{k=1}^{n}\mu_k\right)^{\frac{1}{n}} \to 1, \qquad n\to\infty,$$

и снова

$$1 \geqslant \varlimsup_{n\to\infty} a_n^{(\mathcal{P})} \geqslant \varliminf_{n\to\infty} a_n^{(\mathcal{P})} \geqslant \lim_{n\to\infty}\left(\prod_{k=1}^{n}\mu_k\right)^{\frac{1}{n}} = 1.$$

Таким образом, выбор $\mathcal{P} = ((4k-1)!)_{k\in\mathbb{N}}$ в (1.2) порождает последовательность $a_n^{(\mathcal{P})}$, сходящуюся к 1. Теорема 1.1 доказана. □

3. Заключение

Лемму 2.1 можно доказать с помощью стандартного разложения

$$k!e = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{k!}{j!} = \sum_{j=0}^{k} \frac{k!}{j!} + \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{k!}{j!}, \qquad k \in \mathbb{N},$$

где целая часть $\lfloor k!e \rfloor = \sum\limits_{j=0}^{k} \frac{k!}{j!}$ имеет остаток 2 при делении на 3, а дробная часть $\{k!e\} = \sum\limits_{j=k+1}^{\infty} \frac{k!}{j!}$ стремится к нулю при $k \to \infty$. Наш подход, основанный на интегральных представлениях (2.5), (2.6), имеет свои «плюсы» и может быть востребован в других задачах. В частности (см. доказательство леммы 2.1), из (2.5) хорошо просматриваются дополнительные свойства бесконечно малой последовательности дробных частей $\{k!e\}$. Точно так же, интегральное представление (2.10) четко срабатывает при доказательстве леммы 2.3, хотя, разумеется, применима другая схема — с привлечением знакочередующегося разложения

$$\frac{(4k-1)!}{e} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{(4k-1)!}{j!} = \sum_{j=2}^{4k-1} (-1)^j \frac{(4k-1)!}{j!} + \sum_{j=4k}^{\infty} (-1)^j \frac{(4k-1)!}{j!}.$$

Здесь потребуется для любого $k \in \mathbb{N}$ доказать, что правая часть формулы

$$\left\lfloor \frac{(4k-1)!}{e} \right\rfloor = \sum_{j=2}^{4k-1} (-1)^j \frac{(4k-1)!}{j!}$$

дает остаток 2 при делении на 4, не забыв проверить соотношение

$$\left\{ \frac{(4k-1)!}{e} \right\} = \sum_{j=4k}^{\infty} (-1)^j \frac{(4k-1)!}{j!} \to 0, \qquad k \to \infty.$$

Идея применить фундаментальную константу Эйлера в задаче о поведении произведения синусов с аргументами, порожденными последовательностью факториалов, выглядит эффектной, но в таком чистом виде по сути исчерпывается доказательством представленных в работе утверждений. Поэтому нам показалось полезным зафиксировать именно этот, любопытный сам по себе, «замкнутый» фрагмент теории. Предложенный метод допускает естественное развитие — наряду с числом e и его классическим факториальным разложением заслуживают внимания суммы $\sum\limits_{j=0}^{\infty} \frac{c_j}{j!}$ со специально подобранными коэффициентами c_j, а также суммы более общих числовых рядов вида $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{c_j}{p_j}$, завязанных на порождающей последовательности $\mathcal{P}$.

Авторы планируют отдельную работу, в которой реализуют намеченные здесь соображения применительно к конструкциям (1.2) с быстрорастущими последовательностями $\mathcal{P} = (p_k)_{k\in\mathbb{N}}$, включая случай $p_k = k!$, $k \in \mathbb{N}$, и другие типичные случаи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Е.Д. Алферова, В.Б. Шерстюков. *О вычислении предела специальной последовательности тригонометрических функций* // Мат. заметки **115**:2, 298–303 (2024).
2. Е.Д. Алферова, В.Е. Подольский, В.Б. Шерстюков. *Элементарный метод в задаче о вычислении спектрального радиуса для специального семейства функциональных операторов* // Вестн. Моск. унив., Сер. I 3, 3–11 (2025).
3. Е.Д. Алферова, В.Е. Подольский, В.Б. Шерстюков. *Асимптотическое поведение «длинных» произведений синусов и числа Пизо* // Мат. заметки **117**:1, 16–31 (2025).
4. Е.Д. Алферова, В.Е. Подольский, В.Б. Шерстюков. *Об одном асимптотическом свойстве ядер Дирихле* // Изв. Иркутск. гос. унив., Сер. мат. **55**, 3–14 (2026).
5. Ю.В. Андрианова, В.Б. Шерстюков. *Об одной формуле Лиувилля* // Чебышевский сб. **25**:3, 335–342 (2024).
6. Н.Б. Журавлев, Л.Е. Россовский. *Спектральный радиус параметрического семейства функциональных операторов* // Усп. мат. наук **75**:5 (455), 195–196 (2020).
7. M. Hassani. *Derangements and applications* // J. Integer Seq. **6**:1, id 03.1.2 (2003).
8. L.E. Rossovskii, A.A. Tovsultanov. *Elliptic functional differential equation with affine transformations* // J. Math. Anal. Appl. **480**:2, 123403 (2019).
9. C. jun. Sudler. *An estimate for a restricted partition function* // Q. J. Math., Oxf. II. Ser. **15**:1, 1–10 (1964).
10. N.B. Zhuravlev, L.E. Rossovskii. *Spectral radius formula for a parametric family of functional operators* // Regul. Chaotic Dyn. **26**:4, 392–401 (2021).

Елена Дмитриевна Алферова,
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,
Московский центр фундаментальной и прикладной математики
Ленинские горы, 1,
119991, Москва, Россия
E-mail: elena.alferova@gmail.com

Владимир Евгеньевич Подольский,
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,
Московский центр фундаментальной и прикладной математики
Ленинские горы, 1,
119991, Москва, Россия
E-mail: wpve@yandex.ru

Владимир Борисович Шерстюков,
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,
Московский центр фундаментальной и прикладной математики
Ленинские горы, 1,
119991, Москва, Россия
E-mail: shervb73@gmail.com