

УДК 517.521

ЗАДАЧА О СУЩЕСТВОВАНИИ ПРЕДЕЛА СПЕЦИАЛЬНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ СИНУСОВ

Е.Д. АЛФЕРОВА, В.Е. ПОДОЛЬСКИЙ, В.Б. ШЕРСТЮКОВ

Аннотация. Ставится задача об изучении асимптотического поведения «длинных» произведений синусов с аргументами, порожденными заданной бесконечно большой последовательностью. Коротко обсуждаются возможные ответвления общей задачи. Основное внимание уделено случаю, когда речь идет о некоторой подпоследовательности последовательности факториалов натуральных чисел. Метод доказательства центральных результатов основан на теоретико-числовых свойствах последовательностей, составленных из факториалов, умноженных (разделенных) на эйлерово число. Привлекаются малоизвестные интегральные представления для целой и дробной частей элементов подобных последовательностей. Намечены идеи развития предложенного подхода, обозначены перспективные моменты. Исследование инициировано недавно возникшим в теории краевых задач вопросом о точном вычислении спектрального радиуса для параметрического семейства функциональных операторов.

Ключевые слова: произведение синусов, факториал, эйлерово число, интегральное представление, спектральный радиус.

Mathematics Subject Classification: 40A05

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [8] поставлен следующий вопрос. Пусть p — фиксированное вещественное число, $p > 1$. Чему равен предел последовательности $(b_n(p))^{\frac{1}{n}}$, где

$$b_n(p) \equiv \sup_{x \in \mathbb{R}} \prod_{k=1}^n |\sin p^k x|, \quad (1.1)$$

при $n \rightarrow \infty$? Полный ответ на этот вопрос не известен. Согласно [10] (см. также [6]) для почти всех (но не всех) значений p такой предел равен 1. Строгому обоснованию существования предела при любом p и доказательству элементарным методом соотношения

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} \prod_{k=1}^n |\sin 2^{\nu k} x| \right)^{\frac{1}{n}} = \cos \frac{\pi}{2(2^{\nu} + 1)}, \quad \nu \in \mathbb{N},$$

посвящена заметка [1] и развернутая работа [2]. Исследование продолжено в [3], где поведение последовательности (1.1) изучалось для иррациональных чисел p специального вида, обладающих свойством Пизо. В [1], [2], [3] подробно освещена история вопроса и дан сопроводительный список библиографических источников.

E.D. ALFEROVA, V.E. PODOLSKII, V.B. SHERSTYUKOV, PROBLEM ON EXISTENCE OF LIMIT FOR SPECIAL PRODUCT OF SINES.

© Алферова Е.Д., Подольский В.Е., Шерстюков В.Б. 2026.

Статья подготовлена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования в рамках программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2025-345.

Поступила 26 февраля 2026 г.

Естественно возникает более общая задача. Пусть $\mathcal{P} = (p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ — некоторая последовательность положительных чисел, стремящаяся к $+\infty$. Обозначим

$$a_n^{(\mathcal{P})} \equiv \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} \prod_{k=1}^n |\sin p_k x| \right)^{\frac{1}{n}}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.2)$$

Очевидно, что

$$0 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n^{(\mathcal{P})} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n^{(\mathcal{P})} \leq 1.$$

Требуется выяснить, существует ли предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{(\mathcal{P})}, \quad (1.3)$$

и вычислить величину (1.3) в случае ее существования.

По-видимому, определенный интерес представляет также аналогичная задача, в постановке которой бесконечно большая последовательность заменяется на бесконечно малую.

Напротив, вопрос становится малосодержательным, если предел сходящейся последовательности положительных чисел $\mathcal{P}$ отличен от нуля. Действительно, пусть $p_k \rightarrow p_0 > 0$ при $k \rightarrow \infty$. Предположив для простоты, что $p_k/(2p_0) \notin \mathbb{N}$ по всем номерам k , получим последовательность положительных чисел

$$\left| \sin \frac{\pi p_k}{2p_0} \right| \rightarrow 1, \quad k \rightarrow \infty.$$

Но тогда, как известно, последовательность средних геометрических

$$\left(\prod_{k=1}^n \left| \sin \frac{\pi p_k}{2p_0} \right| \right)^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty,$$

что обеспечивает существование и равенство единице величины (1.3).

Вернемся к основному направлению и обсудим некоторые возможности, заложенные в конструкцию (1.2) с бесконечно большой последовательностью $\mathcal{P}$.

На наш взгляд, интересная линия, относящаяся к асимптотическому поведению величины (1.2), возникает при напрашивающемся выборе в качестве порождающей последовательности $\mathcal{P}$ произвольной арифметической прогрессии. Даже в таком «простейшем» случае, как $p_k = k$, где $k \in \mathbb{N}$, задача не вполне тривиальна¹ и отчасти связана с вопросом об асимптотике глобального минимума ядра Дирихле (см. [4]).

Специфика геометрической прогрессии $\mathcal{P} = (p^k)_{k \in \mathbb{N}}$ в контексте поставленной выше задачи состоит в том, что последовательность (1.1) при любом значении $p > 1$ является субмультипликативной, т.е.

$$b_{m+n}(p) \leq b_m(p)b_n(p), \quad m, n \in \mathbb{N},$$

и согласно лемме Фекете соответствующая последовательность (1.2) всегда имеет предел (подробности см. в [1]). Здесь уместно упомянуть об одном наблюдении, ускользнувшем от нашего внимания в [3, теорема 1]. Дело в том, что $(b_n(p))^{\frac{1}{n}} \leq 1$ при всех $n \in \mathbb{N}$, а субмультипликативность последовательности (1.1) влечет равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n(p))^{\frac{1}{n}} = \inf_{n \in \mathbb{N}} (b_n(p))^{\frac{1}{n}}. \quad (1.4)$$

Отсюда делаем следующий вывод: если параметр $p > 1$ взят так, что предел в (1.4) оказался равным единице, то $b_n(p) = 1$ для каждого номера $n \in \mathbb{N}$. Так будет, например,

¹Как выяснилось при подготовке статьи к печати, эта задача была решена в [9].

всякий раз, когда p — трансцендентное число или p — число Пизо из класса квадратичных иррациональностей, введенного в [3].

В общем положении ситуация усложняется, поскольку последовательность

$$b_n^{(\mathcal{P})} \equiv (a_n^{(\mathcal{P})})^n = \sup_{x \in \mathbb{R}} \prod_{k=1}^n |\sin p_k x|, \quad n \in \mathbb{N},$$

может терять свойство субмультипликативности. Например, если $\mathcal{P} = (k!)_{k \in \mathbb{N}}$, то

$$b_2^{(\mathcal{P})} \equiv \sup_{x \in \mathbb{R}} |\sin x \sin 2x| = \frac{4\sqrt{3}}{9} = 0.7698 \dots,$$

$$b_4^{(\mathcal{P})} \equiv \sup_{x \in \mathbb{R}} |\sin x \sin 2x \sin 6x \sin 24x| = 0.6906 \dots,$$

откуда

$$b_4^{(\mathcal{P})} = 0.6906 \dots > 0.5925 \dots = \left(b_2^{(\mathcal{P})}\right)^2.$$

Интересом к последнему примеру и определяется основное содержание статьи, которая является пробным шагом при переходе в конструкции (1.2) от геометрической прогрессии к последовательностям сверхэкспоненциального роста.

Справедлив следующий точный результат.

Теорема 1.1. *В любом из случаев*

$$\mathcal{P} = ((2k)!)_{k \in \mathbb{N}}, \quad \mathcal{P} = ((4k-3)!)_{k \in \mathbb{N}}, \quad \mathcal{P} = ((4k-1)!)_{k \in \mathbb{N}}$$

предел (1.3) существует и равен 1.

Второй результат носит предварительный характер.

Теорема 1.2. *При выборе порождающей последовательности $\mathcal{P} = (k!)_{k \in \mathbb{N}}$ нижний предел при $n \rightarrow \infty$ величины (1.2) не меньше чем $\frac{\sqrt{3}}{2}$.*

Вопрос о существовании предела

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} \prod_{k=1}^n |\sin k! x| \right)^{\frac{1}{n}}$$

пока остается открытым, хотя у нас нет сомнений в том, что записанный предел не только существует, но и равен единице. Впрочем, для обоснования такого утверждения потребуются развитие метод, предлагаемый в настоящей заметке (см. обсуждение в заключительном разделе 3).

Сформулированные результаты будут доказаны в следующем разделе.

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ 1.1 И 1.2

2.1. Доказательство теоремы 1.2. Доказательство теоремы 1.2 начнем с проверки справедливости соотношения

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} \prod_{k=1}^n |\sin k! x| \right)^{\frac{1}{n}} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (2.1)$$

Пусть $u \in \mathbb{R}$. Приведем список используемых обозначений:

- $[u]$ — пол (целая часть) числа u ,

- $\lceil u \rceil$ — потолок числа u ,
- $\{u\}$ — дробная часть u ,
- $\lfloor u \rfloor$ — ближайшее к u целое число,
- $\|u\|$ — расстояние от u до $\lfloor u \rfloor$.

Перепишем (2.1) в эквивалентном виде

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{t \in \mathbb{R}} \prod_{k=1}^n |\sin k! e t| \right)^{\frac{1}{n}} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad (2.2)$$

а для проверки (2.2) воспользуемся следующим утверждением.

Лемма 2.1. *При любом $k \in \mathbb{N}$ в представлении*

$$k!e = \lfloor k!e \rfloor + \{k!e\}$$

слагаемые таковы, что

$$\lfloor k!e \rfloor = 3q_k + \delta_k, \quad q_k \in \mathbb{N}_0 \equiv \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad \delta_k \in \{1, 2\}, \quad (2.3)$$

$$\{k!e\} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty. \quad (2.4)$$

Доказательство. В работе [7] указаны формулы

$$I_k^{(1)} \equiv \int_0^1 s^k e^{1-s} ds = \{k!e\}, \quad (2.5)$$

$$I_k^{(2)} \equiv \int_1^{+\infty} s^k e^{1-s} ds = \lfloor k!e \rfloor, \quad (2.6)$$

действующие при всех $k \in \mathbb{N}$. Тем самым представление

$$k!e = e \int_0^{+\infty} s^k e^{-s} ds = I_k^{(1)} + I_k^{(2)}$$

есть разбиение числа $k!e$ на дробную и целую части. Из (2.5) не только сразу следует (2.4), но и видно, что последовательность дробных частей $\{k!e\}$ вполне монотонна (в частности, убывает и выпукла). Далее, интегралы (2.6) подчинены рекуррентному правилу

$$I_{k+1}^{(2)} = (k+1) I_k^{(2)} + 1, \quad k \in \mathbb{N}, \quad I_1^{(2)} = 2, \quad (2.7)$$

в чем можно убедиться, интегрируя по частям. Благодаря (2.7) легко выписать несколько первых членов последовательности (2.6). Начало будет таким

$$2, \quad 5, \quad 16, \quad 65, \quad 326, \quad 1957, \quad 13700, \quad 109601, \quad 986410, \quad \dots \quad (2.8)$$

с периодической последовательностью

$$2, \quad 2, \quad 1, \quad 2, \quad 2, \quad 1, \quad 2, \quad 2, \quad 1, \quad \dots$$

остатков от деления $I_k^{(2)}$ на 3. Формула (2.3) является огрубленной фиксацией последнего свойства. Строгое обоснование проводится с помощью (2.7). К примеру, тот факт, что $I_{3m}^{(2)}$ при любом $m \in \mathbb{N}$ дает остаток 1 при делении на 3, вытекает из формулы

$$I_{3m}^{(2)} = 3m I_{3m-1}^{(2)} + 1, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Лемма 2.1 доказана. □

Вернемся к доказательству теоремы 1.2 и проверим оценку (2.2). Очевидно,

$$\left(\sup_{t \in \mathbb{R}} \prod_{k=1}^n |\sin k! e t| \right)^{\frac{1}{n}} \geq \left(\prod_{k=1}^n \left| \sin k! e \frac{\pi}{3} \right| \right)^{\frac{1}{n}}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.9)$$

Последовательность положительных чисел $\alpha_k \equiv \left| \sin k! e \frac{\pi}{3} \right|$ по лемме 2.1 стремится к $\frac{\sqrt{3}}{2}$ при $k \rightarrow \infty$, поскольку

$$k! e \frac{\pi}{3} = (3q_k + \delta_k) \frac{\pi}{3} + \{k! e\} \frac{\pi}{3}, \quad q_k \in \mathbb{N}_0,$$

при всех $k \in \mathbb{N}$, откуда

$$\alpha_k = \sin \left(\frac{\pi \delta_k}{3} + \varepsilon_k \right) \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad k \rightarrow \infty.$$

Мы использовали то, что $\varepsilon_k \equiv \{k! e\} \frac{\pi}{3} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, а также свойство $\delta_k = 1$ или 2 (см. (2.3), (2.4)). Но тогда

$$\left(\prod_{k=1}^n \alpha_k \right)^{\frac{1}{n}} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}$$

при $n \rightarrow \infty$. Переход к нижнему пределу в (2.9) дает (2.2). Теорема 1.2 доказана.

2.2. Доказательство теоремы 1.1. Доказательству теоремы 1.1 предположим две леммы.

Лемма 2.2. Для любого $k \in \mathbb{N}$ целая часть $\lfloor (2k)!e \rfloor$ является нечетным числом, а целая часть $\lfloor (4k-3)!e \rfloor$ дает остаток 2 при делении на 4.

Доказательство. Заявленные свойства хорошо просматриваются на первых членах (2.8). Из (2.6), (2.7) получим, что при любом $k \in \mathbb{N}$ число

$$\lfloor (2k)!e \rfloor = I_{2k}^{(2)} = 2k I_{2k-1}^{(2)} + 1$$

является нечетным, а число

$$\lfloor (4k-3)!e \rfloor = I_{4k-3}^{(2)} = \begin{cases} 2, & k=1, \\ (4k-4)((4k-3)I_{4k-5}^{(2)} + 1) + 2, & k=2, 3, \dots, \end{cases}$$

при делении на 4 дает остаток 2. Лемма 2.2 доказана. $\square$

Лемма 2.3. Для любого $k \in \mathbb{N}$ число $\lfloor (4k-1)!/e \rfloor$ при делении на 4 дает остаток 2, причем $\{(4k-1)!/e\} \rightarrow 0$, если $k \rightarrow \infty$.

Доказательство. Нетрудно проверить (см. [5]), что

$$I_m^{(3)} \equiv \int_0^1 s^m e^{s-1} ds = \left\| \frac{m!}{e} \right\| = (-1)^m \left(\left\lfloor \frac{m!}{e} \right\rfloor - \frac{m!}{e} \right), \quad m \in \mathbb{N}. \quad (2.10)$$

Из определения (левая часть (2.10)) ясно, что $I_m^{(3)} \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$. С другой стороны, можно применять рекуррентную формулу

$$I_{m+1}^{(3)} = 1 - (m+1)I_m^{(3)}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad I_1^{(3)} = \frac{1}{e}, \quad (2.11)$$

выведенную интегрированием по частям. Согласно (2.10) при любом $k \in \mathbb{N}$ интеграл

$$0 < I_{4k-1}^{(3)} \equiv \int_0^1 s^{4k-1} e^{s-1} ds$$

вычисляется как

$$\frac{(4k-1)!}{e} - \left\lfloor \frac{(4k-1)!}{e} \right\rfloor = \frac{(4k-1)!}{e} - \left\lfloor \frac{(4k-1)!}{e} \right\rfloor = \left\{ \frac{(4k-1)!}{e} \right\} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Кроме того,

$$\left\lfloor \frac{(4k-1)!}{e} \right\rfloor = \begin{cases} 2, & k=1, \\ (4k-2)(16k^2-20k+5) + \frac{(4k-1)!}{(4k-5)!} \left\lfloor \frac{(4k-5)!}{e} \right\rfloor, & k=2, 3, \dots, \end{cases} \quad (2.12)$$

где последняя формула возникнет, если выразить $I_{4k-1}^{(3)}$ через $I_{4k-5}^{(3)}$ с помощью (2.11) и затем заменить в полученном соотношении $I_{4k-1}^{(3)}$ на разность $(4k-1)!/e - \lfloor (4k-1)!/e \rfloor$, а $I_{4k-5}^{(3)}$ — на разность $(4k-5)!/e - \lfloor (4k-5)!/e \rfloor$. Как видно из (2.12), при любом $k \in \mathbb{N}$ число $\lfloor (4k-1)!/e \rfloor$ сравнимо с 2 по модулю 4, поскольку

$$\begin{aligned} (4k-2)(16k^2-20k+5) &= 4(k-1)(16k^2-12k+3) + 2, \\ \frac{(4k-1)!}{(4k-5)!} &= 4(k-1)(4k-3)(4k-2)(4k-1). \end{aligned}$$

Лемма 2.3 доказана. $\square$

Приступим непосредственно к доказательству теоремы 1.1.

Доказательство. Пусть сначала $\mathcal{P} = ((2k)!)_{k \in \mathbb{N}}$. Придадим последовательности (1.2) следующий вид

$$a_n^{(\mathcal{P})} = \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} \prod_{k=1}^n |\sin(2k)! x| \right)^{\frac{1}{n}} = \left(\sup_{t \in \mathbb{R}} \prod_{k=1}^n |\sin(2k)! e t| \right)^{\frac{1}{n}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

В таком случае при любом $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$a_n^{(\mathcal{P})} \geq \left(\prod_{k=1}^n \left| \sin(2k)! e \frac{\pi}{2} \right| \right)^{\frac{1}{n}}.$$

Последовательность положительных чисел $\beta_k \equiv \left| \sin(2k)! e \frac{\pi}{2} \right|$ стремится к 1 при $k \rightarrow \infty$, поскольку

$$(2k)! e \frac{\pi}{2} = \lfloor (2k)! e \rfloor \frac{\pi}{2} + \{(2k)! e\} \frac{\pi}{2},$$

где $\lfloor (2k)! e \rfloor$ — нечетное число по лемме 2.2, $\{(2k)! e\} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ по лемме 2.1 (см. там свойство (2.4)). Но тогда

$$\left(\prod_{k=1}^n \beta_k \right)^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$$

при $n \rightarrow \infty$. Следовательно,

$$1 \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n^{(\mathcal{P})} \geq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n^{(\mathcal{P})} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\prod_{k=1}^n \beta_k \right)^{\frac{1}{n}} = 1,$$

т.е. при выборе $\mathcal{P} = ((2k)!)_{k \in \mathbb{N}}$ предел (1.3) существует и равен 1.

Пусть теперь $\mathcal{P} = ((4k - 3)!)_{k \in \mathbb{N}}$. Тогда последовательность (1.2) примет вид

$$a_n^{(\mathcal{P})} = \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} \prod_{k=1}^n |\sin(4k - 3)!x| \right)^{\frac{1}{n}} = \left(\sup_{t \in \mathbb{R}} \prod_{k=1}^n |\sin(4k - 3)!et| \right)^{\frac{1}{n}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

При любом $n \in \mathbb{N}$ верна оценка

$$a_n^{(\mathcal{P})} \geq \left(\prod_{k=1}^n \left| \sin(4k - 3)!e \frac{\pi}{4} \right| \right)^{\frac{1}{n}}.$$

Возникшая последовательность положительных чисел $\gamma_k = \left| \sin(4k - 3)!e \frac{\pi}{4} \right|$ стремится к 1 при $k \rightarrow \infty$, так как

$$(4k - 3)!e \frac{\pi}{4} = \lfloor (4k - 3)!e \rfloor \frac{\pi}{4} + \{(4k - 3)!e\} \frac{\pi}{4},$$

где каждая целая часть $\lfloor (4k - 3)!e \rfloor$ дает остаток 2 при делении на 4 (по лемме 2.2), и $\{(4k - 3)!e\} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ по лемме 2.1 (см. (2.4)). Поэтому

$$\left(\prod_{k=1}^n \gamma_k \right)^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$$

при $n \rightarrow \infty$. В результате

$$1 \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n^{(\mathcal{P})} \geq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n^{(\mathcal{P})} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\prod_{k=1}^n \gamma_k \right)^{\frac{1}{n}} = 1,$$

т.е. при выборе $\mathcal{P} = ((4k - 3)!)_{k \in \mathbb{N}}$ предел (1.3) существует и равен 1.

Пусть, наконец, $\mathcal{P} = ((4k - 1)!)_{k \in \mathbb{N}}$ и рассматривается последовательность

$$a_n^{(\mathcal{P})} = \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} \prod_{k=1}^n |\sin(4k - 1)!x| \right)^{\frac{1}{n}} = \left(\sup_{t \in \mathbb{R}} \prod_{k=1}^n \left| \sin \frac{(4k - 1)!}{e} t \right| \right)^{\frac{1}{n}}, \quad n \in \mathbb{N},$$

очевидно удовлетворяющая оценке

$$a_n^{(\mathcal{P})} \geq \left(\prod_{k=1}^n \left| \sin \frac{(4k - 1)!}{e} \frac{\pi}{4} \right| \right)^{\frac{1}{n}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

По лемме 2.3 в представлении

$$\frac{(4k - 1)!}{e} \frac{\pi}{4} = \left\lfloor \frac{(4k - 1)!}{e} \right\rfloor \frac{\pi}{4} + \left\{ \frac{(4k - 1)!}{e} \right\} \frac{\pi}{4}$$

синус первого слагаемого равен ± 1 , а второе слагаемое является бесконечно малой величиной при $k \rightarrow \infty$. Значит,

$$0 < \mu_k \equiv \left| \sin \frac{(4k - 1)!}{e} \frac{\pi}{4} \right| \rightarrow 1, \quad k \rightarrow \infty,$$

откуда

$$\left(\prod_{k=1}^n \mu_k \right)^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty,$$

и снова

$$1 \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n^{(\mathcal{P})} \geq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n^{(\mathcal{P})} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\prod_{k=1}^n \mu_k \right)^{\frac{1}{n}} = 1.$$

Таким образом, выбор $\mathcal{P} = ((4k - 1)!)_{k \in \mathbb{N}}$ в (1.2) порождает последовательность $a_n^{(\mathcal{P})}$, сходящуюся к 1. Теорема 1.1 доказана. $\square$

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Лемму 2.1 можно доказать с помощью стандартного разложения

$$k!e = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{k!}{j!} = \sum_{j=0}^k \frac{k!}{j!} + \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{k!}{j!}, \quad k \in \mathbb{N},$$

где целая часть $[k!e] = \sum_{j=0}^k \frac{k!}{j!}$ имеет остаток 2 при делении на 3, а дробная часть

$\{k!e\} = \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{k!}{j!}$ стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$. Наш подход, основанный на интегральных представлениях (2.5), (2.6), имеет свои «плюсы» и может быть востребован в других задачах. В частности (см. доказательство леммы 2.1), из (2.5) хорошо просматриваются дополнительные свойства бесконечно малой последовательности дробных частей $\{k!e\}$. Точно так же, интегральное представление (2.10) четко срабатывает при доказательстве леммы 2.3, хотя, разумеется, применима другая схема — с привлечением знакопередающего разложения

$$\frac{(4k-1)!}{e} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{(4k-1)!}{j!} = \sum_{j=2}^{4k-1} (-1)^j \frac{(4k-1)!}{j!} + \sum_{j=4k}^{\infty} (-1)^j \frac{(4k-1)!}{j!}.$$

Здесь потребуется для любого $k \in \mathbb{N}$ доказать, что правая часть формулы

$$\left[\frac{(4k-1)!}{e} \right] = \sum_{j=2}^{4k-1} (-1)^j \frac{(4k-1)!}{j!}$$

даёт остаток 2 при делении на 4, не забыв проверить соотношение

$$\left\{ \frac{(4k-1)!}{e} \right\} = \sum_{j=4k}^{\infty} (-1)^j \frac{(4k-1)!}{j!} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Идея применить фундаментальную константу Эйлера в задаче о поведении произведения синусов с аргументами, порожденными последовательностью факториалов, выглядит эффектной, но в таком чистом виде по сути исчерпывается доказательством представленных в работе утверждений. Поэтому нам показалось полезным зафиксировать именно этот, любопытный сам по себе, «замкнутый» фрагмент теории. Предложенный метод допускает естественное развитие — наряду с числом e и его классическим факториальным разложением заслуживают внимания суммы $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{c_j}{j!}$ со специально подобранными коэффициентами c_j , а также суммы более общих числовых рядов вида $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_j}{p_j}$, завязанных на

порождающей последовательности $\mathcal{P}$.

Авторы планируют отдельную работу, в которой реализуют намеченные здесь соображения применительно к конструкциям (1.2) с быстрорастущими последовательностями $\mathcal{P} = (p_k)_{k \in \mathbb{N}}$, включая случай $p_k = k!$, $k \in \mathbb{N}$, и другие типичные случаи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Е.Д. Алферова, В.Б. Шерстюков. *О вычислении предела специальной последовательности тригонометрических функций* // Мат. заметки **115**:2, 298–303 (2024).
2. Е.Д. Алферова, В.Е. Подольский, В.Б. Шерстюков. *Элементарный метод в задаче о вычислении спектрального радиуса для специального семейства функциональных операторов* // Вестн. Моск. унив., Сер. I **3**, 3–11 (2025).
3. Е.Д. Алферова, В.Е. Подольский, В.Б. Шерстюков. *Асимптотическое поведение «длинных» произведений синусов и числа Пизо* // Мат. заметки **117**:1, 16–31 (2025).
4. Е.Д. Алферова, В.Е. Подольский, В.Б. Шерстюков. *Об одном асимптотическом свойстве ядер Дирихле* // Изв. Иркутск. гос. унив., Сер. мат. **55**, 3–14 (2026).
5. Ю.В. Андрианова, В.Б. Шерстюков. *Об одной формуле Лиувилля* // Чебышевский сб. **25**:3, 335–342 (2024).
6. Н.Б. Журавлев, Л.Е. Россовский. *Спектральный радиус параметрического семейства функциональных операторов* // Усп. мат. наук **75**:5 (455), 195–196 (2020).
7. M. Hassani. *Derangements and applications* // J. Integer Seq. **6**:1, id 03.1.2 (2003).
8. L.E. Rossovskii, A.A. Tovsultanov. *Elliptic functional differential equation with affine transformations* // J. Math. Anal. Appl. **480**:2, 123403 (2019).
9. C. jun. Sudler. *An estimate for a restricted partition function* // Q. J. Math., Oxf. II. Ser. **15**:1, 1–10 (1964).
10. N.B. Zhuravlev, L.E. Rossovskii. *Spectral radius formula for a parametric family of functional operators* // Regul. Chaotic Dyn. **26**:4, 392–401 (2021).

Елена Дмитриевна Алферова,
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,
Московский центр фундаментальной и прикладной математики
Ленинские горы, 1,
119991, Москва, Россия
E-mail: elena.alferova@gmail.com

Владимир Евгеньевич Подольский,
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,
Московский центр фундаментальной и прикладной математики
Ленинские горы, 1,
119991, Москва, Россия
E-mail: wpve@yandex.ru

Владимир Борисович Шерстюков,
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,
Московский центр фундаментальной и прикладной математики
Ленинские горы, 1,
119991, Москва, Россия
E-mail: shervb73@gmail.com