ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 18 № 3 (2026). С. 3-16.

УДК 517.538.2+517.518.3+517.984.26+517.547.2

ГЛАВНЫЕ ПОДМОДУЛИ, ДВОЙСТВЕННЫЕ ИНВАРИАНТНЫМ ПОДПРОСТРАНСТВАМ Ω–УЛЬТРАДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

Н.Ф. АБУЗЯРОВА, З.Ю. ФАЗУЛЛИН

Аннотация. В работе рассматриваются локально–выпуклые пространства целых функций, двойственные общим пространствам Ω–ультрадифференцируемых функций. Эти пространства являются также топологическими модулями над кольцом многочленов, что делает содержательной задачу локального описания их замкнутых подпространств, инвариантных относительно умножения на независимую переменную, короче, подмодулей. Более точно, исследуются главные, то есть порожденные одной функцией, подмодули. Показывается, что среди главных имеются подмодули, не допускающие локального описания в слабом смысле. Каждый результат о подмодулях, в свою очередь, приводит к эквивалентному двойственному утверждению о (не)допустимости спектрального синтеза в слабом смысле для подпространств Ω–ультрадифференцируемых функций, инвариантных относительно оператора дифференцирования.

Ключевые слова: целая функция, нулевое множество, подмодуль, локальное описание, ультрараспределение, преобразование Фурье — Лапласа.

Mathematics Subject Classification: 30D15, 42A38, 46F12

1. Введение

В работе изучаются некоторые вопросы, возникающие в рамках хорошо известной задачи локального описания идеалов и подмодулей. Для локально–выпуклого пространства целых функций $\mathcal{P}$, обладающего структурой топологического модуля над кольцом многочленов $\mathbb{C}[z]$, эта задача состоит в выяснении возможности восстановить замкнутый подмодуль $\mathcal{J} \subset \mathcal{P}$ по множеству общих нулей содержащихся в нем функций.

Мы рассматриваем замкнутые подмодули в модулях $\mathcal{P}_\Omega(a;b)$, возникающих как аналитические реализации сильных сопряженных к пространствам Ω–ультрадифференцируемых функций (короче, Ω–УДФ) в общей теории Ω–УДФ и Ω–ультрараспределений, предложенной А.В. Абаниным (см. [1], [2]).

Точные формулировки определений и некоторых фактов теории Ω–УДФ будут изложены в начале следующего параграфа; пока отметим лишь, что рассматриваться в работе будут пространства, определяемые возрастающей последовательностью *неквазианалитических весов* $\Omega = \{\omega_n\}$. Если не оговорено противное, все подмодули, о которых идет речь, замкнуты в $\mathcal{P}_\Omega(a;b)$, поэтому для краткости слово «замкнутый» будем опускать.

N.F. Abuzyarova, Z.Yu. Fazullin, Primary submodules dual to invariant subspaces of Ω–ultradifferentiable functions.

© Абузярова Н.Ф., Фазуллин З.Ю. 2026.

Исследование Н.Ф. Абузяровой выполнено в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (код научной темы FMRS-2025-0010). Работа З.Ю. Фазуллина поддержана НОМЦ ПФО (соглашение N 075-02-2026-1332).

Поступила 5 марта 2026 г.

Условия, накладываемые на весовую последовательность Ω, влекут следующие свойства элементов пространства $\mathcal{P}_\Omega(a;b)$: всякая $\varphi \in \mathcal{P}_\Omega(a;b)$ принадлежит классу Картрайт, и следовательно, является целой функцией экспоненциального типа и вполне регулярного роста при порядке 1 во всей плоскости, а индикаторная диаграмма функции φ есть отрезок мнимой оси $\mathrm{i}[c_\varphi; d_\varphi]$.

По подмодулю $\mathcal{J} \subset \mathcal{P}_\Omega(a;b)$ однозначно определяются его *индикаторный отрезок* $[c_\mathcal{J}; d_\mathcal{J}]$ и *нулевое множество* $\mathcal{Z}_\mathcal{J}$. А именно, $[c_\mathcal{J}; d_\mathcal{J}]$ — это замыкание в $\overline{\mathbb{R}}$ множества $\bigcup\limits_{\varphi\in\mathcal{J}} [c_\varphi; d_\varphi]$, а $\mathcal{Z}_\mathcal{J}$ — последовательность кратных точек в $\mathbb{C}$, равная $\bigcap\limits_{\varphi\in\mathcal{J}\setminus\{0\}} \mathcal{Z}_\varphi$, где символом $\mathcal{Z}_\varphi$ обозначено *нулевое множество функции* φ, то есть множество всех точек из $\mathbb{C}$, в которых φ обращается в нуль с некоторой положительной кратностью: $\mathcal{Z}_\varphi = \{\lambda_j\}$, $0 \leqslant |\lambda_1| \leqslant |\lambda_2| \leqslant \dots$.

Подмодуль $\mathcal{J}$ *локализуем*, если он содержит *все* функции $\psi \in \mathcal{P}_\Omega(a;b)$, для которых $\mathcal{Z}_\psi \supset \mathcal{Z}_\mathcal{J}$.

Подмодуль $\mathcal{J}$ *слабо локализуем*, если он содержит *все* функции $\psi \in \mathcal{P}_\Omega(a;b)$, такие, что $[c_\psi; d_\psi] \subset [c_\mathcal{J}; d_\mathcal{J}]$ и $\mathcal{Z}_\psi \supset \mathcal{Z}_\mathcal{J}$.

Согласно этим определениям, локализуемый подмодуль полностью определяется своим нулевым множеством, а слабо локализуемый подмодуль — двумя своими характеристиками: нулевым множеством и индикаторным отрезком.

Используя свойства весов $\omega_n \in \Omega$, нетрудно убедиться в том, что и локализуемость, и слабая локализуемость подмодуля $\mathcal{J}$ влекут его *устойчивость* относительно деления на двучлен: если $\psi \in \mathcal{J}$ и кратность обращения функции ψ в нуль в некоторой точке $\lambda \in \mathbb{C}$ превосходит кратность этой точки как элемента множества $\mathcal{Z}_\mathcal{J}$, то $\dfrac{\psi}{(z-\lambda)} \in \mathcal{J}$.

В работе [10] нами было установлены следующие факты:

1) *устойчивый подмодуль* $\mathcal{J} \subset \mathcal{P}_\Omega(a;b)$ *локализуем тогда и только тогда, когда его индикаторный отрезок* $[c_\mathcal{J}; d_\mathcal{J}]$ *равен* $[a;b]$ [10, Corollary 4.1];
2) *в случае, когда* $[c_\mathcal{J}; d_\mathcal{J}] \subsetneq [a;b]$, *верно, что*
   а) *условие:* $r(\mathrm{i}\mathcal{Z}_\mathcal{J}) < \dfrac{d_\mathcal{J} - c_\mathcal{J}}{2}$, *где* $r(\mathrm{i}\mathcal{Z}_\mathcal{J})$ — *радиус полноты последовательности* $(\mathrm{i}\mathcal{Z}_\mathcal{J})$, *является достаточным для слабой локализуемости подмодуля* $\mathcal{J}$ [10, Theorem 4.2];
   б) *если же* $r(\mathrm{i}\mathcal{Z}_\mathcal{J}) > \dfrac{d_\mathcal{J} - c_\mathcal{J}}{2}$, *то* $\mathcal{J} = \{0\}$.

Вопрос, пока не получивший окончательного ответа, касается условий слабой локализуемости устойчивого подмодуля $\mathcal{J}$ с критическим соотношением между характеристиками:

$$r(\mathrm{i}\mathcal{Z}_\mathcal{J}) = \frac{d_\mathcal{J} - c_\mathcal{J}}{2}. \tag{1.1}$$

Опишем подробнее состояние дел к настоящему моменту. Для этого напомним определение главного подмодуля $\mathcal{J}_\varphi$, порожденного функцией $\varphi \in \mathcal{P}_\Omega(a;b)$:

$$\mathcal{J}_\varphi := \overline{\{p\varphi :\ p \in \mathbb{C}[z]\}}.$$

Для достаточно широкого класса весовых последовательностей Ω можно указать слабо локализуемые устойчивые подмодули, удовлетворяющие (1.1) (см. [6, Предложение 1.11]). Также, нетрудно проверить, что для любой допустимой теорией Ω–УДФ неквазианалитической последовательности $\Omega = \{\omega_n\}_{n=1}^\infty$, при условии $0 \in (a;b)$, примерами таких подмодулей служат: главный подмодуль, порожденный в $\mathcal{P}_\Omega(a;b)$ многочленом ψ_0, а если предположить, что веса ω_n *канонические* (определение см., например, в [1, Гл. 1]), то слабо локализуемым будет главный подмодуль, порожденный функцией $\psi_0(z) = p(z)\sin cz$, $p \in \mathbb{C}[z]$, для всякого $c > 0$, такого, что $[-c;c] \subset (a;b)$. В первом из указанных случаев

индикаторный отрезок подмодуля $\mathcal{J}_{\psi_0}$ состоит из одной точки 0, во втором — он равен $[-c;c]$.

С другой стороны, для частного случая, когда весовая последовательность Ω имеет вид $\{n\omega\}_{n=1}^{\infty}$, первым из авторов настоящей работы было установлено существование устойчивых, но не слабо локализуемых подмодулей.

Теорема 1.1 ([6]). *Пусть $\Omega = \{n\omega\}_{n=1}^{\infty}$, ω — весовая функция, и образующая подмодуля $\mathcal{J}_\varphi \subset \mathcal{P}_\Omega(-a;a)$ имеет вид $\varphi = \dfrac{\Phi}{f}$, где Φ — функция типа синуса, f — целая функция минимального типа при порядке 1.*

Если для порядков функции f на лучах $\arg z = 0$ и $\arg z = \pi$, определяемых равенствами

$$\rho_0 = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\ln\ln|f(r)|}{\ln r}, \qquad \rho_\pi = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\ln\ln|f(-r)|}{\ln r},$$

соответственно, выполнено одно из соотношений

$$\rho_\omega \leqslant \rho_0 < \frac{1}{4} < \frac{1}{2} \leqslant \rho_\pi \quad \textit{или} \quad \rho_\omega \leqslant \rho_\pi < \frac{1}{4} < \frac{1}{2} \leqslant \rho_0,$$

то главный подмодуль $\mathcal{J}_\varphi := \overline{\{p\varphi :\ p \in \mathbb{C}[z]\}}$ не является слабо локализуемым.

Напомним, что *порядком* весовой функции ω называется величина $\rho_\omega = \varlimsup\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln\omega(x)}{\ln x}$.

Примером функции, для которой выполнены условия теоремы 1.1, служит функция $\dfrac{\sqrt{z}\sin\pi z}{\sin\pi\sqrt{z}}$, если $a > \pi$.

Основной результат настоящей работы — теорема 2.1 — представляет собой утверждение, аналогичное теореме 1.1, для гораздо более общей ситуации — модуля $\mathcal{P}_{\Omega,a}$, порождаемого произвольной возрастающей неквазианалитической правильной последовательностью весов Ω. В целом, полученные здесь результаты дополняют и обобщают исследования, проведенные ранее в [6], [10], [11].

Статья организована следующим образом: в параграфе 2 мы приводим предварительные сведения, необходимые для точной формулировки результатов и дальнейшего изложения, а также собственно формулировки основной теоремы 2.1 и следствий из нее, в параграфе 3 проводится вспомогательная аналитическая работа — построение специальной целой функции, использующейся при доказательстве основного результата, параграф 4 содержит доказательства теоремы 2.1 и двух ее следствий, а параграф 5 — двойственные к теореме 2.1 и следствиям 2.1, 2.2 утверждения об инвариантных относительно дифференцирования подпространствах Ω–УДФ.

2. Предварительные сведения и формулировки основных результатов

Весовая функция или *вес* — это измеримая по Лебегу, локально ограниченная в $\mathbb{R}$ функция $\omega : \mathbb{R} \to [0;\infty)$, такая, что

$$\int_{\mathbb{R}} e^{\omega(t)}\,dt < \infty, \qquad \int_1^\infty \frac{\overline{\omega}(t)}{t^2}\,dt < \infty, \qquad \overline{\omega}(t) := \sup\{\omega(s) :\ |s| \leqslant t\};$$

второе из приведенных неравенств представляет собой *условие неквазианалитичности* веса ω.

Для заданных веса ω и отрезка $[c;d] \subset \mathbb{R}$ полагаем

$$H_\omega(x+\mathrm{i}y) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\omega(x+\xi y)}{1+\xi^2}\,d\xi,$$

$$\|\varphi\|_{\omega,[c;d]} := \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|\varphi(z)|}{\exp(d(\operatorname{Im} z)^+ + c(-\operatorname{Im} z)^+ + H_\omega(-z))},$$

$$\mathcal{P}_{\omega,[c;d]} = \left\{\varphi \in H(\mathbb{C}) : \|\varphi\|_{\omega,[c;d]} < \infty\right\}.$$

Положим

$$\mathcal{P}_\Omega(a;b) := \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_{\omega_n,[c_k;d_k]},$$

где $\{[c_k;d_k]\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность отрезков, исчерпывающая интервал $(a;b)$, $\Omega = \{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ — правильная неквазианалитическая весовая последовательность, такая, что $\omega_n(x) + \ln(1+|x|) \leqslant \omega_{n+1}(x) + C_n$, $x \in \mathbb{R}$, C_n, $n \in \mathbb{N}$, — положительные постоянные (см. [1, § 2.3]).

В дальнейшем, не ограничивая общности, вместо $(a;b)$ будем рассматривать симметричный интервал $(-a;a)$ и обозначать соответствующее пространство $\mathcal{P}_\Omega(-a;a)$ символом $\mathcal{P}_{\Omega,a}$.

Пусть, далее, $\mathcal{D}_{\Omega,a}$ и $\mathcal{E}_{\Omega,a}$ — пространства *пробных* Ω–УДФ и *всех* Ω–УДФ на интервале $(-a;a)$, соответственно (точные определения и свойства см. [1, §2.1, §4.1], [2]). Сильное сопряженное к $\mathcal{E}_{\Omega,a}$ представляет собой пространство всех Ω–ультрараспределений с компактными носителями в интервале $(-a;a)$. При этом $\mathcal{D}_{\Omega,a} \subset \mathcal{E}'_{\Omega,a}$ в том смысле, что каждая функция $g \in \mathcal{D}_{\Omega,a}$ порождает функционал $S_g \in \mathcal{E}'_{\Omega,a}$, действующий по правилу:

$$S_g(f) = \int\limits_{(-a;a)} f(t)g(t)\,dt, \qquad f \in \mathcal{E}_{\Omega,a}.$$

Преобразование Фурье — Лапласа $\mathcal{F}$ для Ω–ультрараспределения с компактным носителем $S \in \mathcal{E}'_{\Omega,a}$, как обычно, определяется формулой

$$\mathcal{F}(S)(z) = S(e^{-\mathrm{i}tz}).$$

Для пространств пробных Ω–УДФ $\mathcal{D}_{\Omega,a}$ и Ω–ультрараспределений с компактными носителями $\mathcal{E}_{\Omega,a}$ в [1] доказаны аналоги теорем Пэли — Винера и Пэли — Винера — Шварца. А именно, согласно теореме 2.4.2 из [1], оператор $\mathcal{F}$ устанавливает линейный топологический изоморфизм между $\mathcal{D}_{\Omega,a}$ и $\mathcal{H}_{\Omega,a}$, где

$$\mathcal{H}_{\Omega,a} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n,$$

$$\mathcal{H}_n := \left\{\varphi \in H(\mathbb{C}) :\ \|\varphi\|_n := \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|\varphi(z)|}{\exp(c_n|\operatorname{Im} z| - H_{\omega_n}(z))}\right\}, \quad 0 < c_n \nearrow a.$$

А согласно теореме 5.4.2 этой же монографии, преобразование Фурье — Лапласа — линейный топологический изоморфизм пространств $(\mathcal{E}_{\Omega,a})'$ и $\mathcal{P}_{\Omega,a}$.

Всюду далее предполагаем, что последовательность весов $\Omega = \{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}$, определяющая модуль $\mathcal{P}_{\Omega,a}$, удовлетворяет следующему дополнительному условию:

$$\omega_n(x) \leqslant \nu(|x|) + C_n, \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2.1}$$

где C_n, $n \in \mathbb{N}$, — положительные постоянные, а функция $\nu : [0;\infty) \to [0;\infty)$ имеет вид

$$\nu(t) = \begin{cases} 0, & t = 0, \\ t^{\rho(t)}, & t > 0, \end{cases}$$

$\rho(t)$ — уточненный порядок (см. [8, §12, гл. I]), причем

$$\lim_{t\to\infty}\rho(t)=\frac{1}{2},\qquad \int_1^\infty \frac{\nu(t)}{t^{\frac{3}{2}}}\,dt<\infty. \tag{2.2}$$

Примером подходящей функции ν будет, например, функция $\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\ln^p t}$, $p>1$.

Напомним нужные нам в дальнейшем свойства уточненного порядка: существуют пределы (в нашем случае $\rho=\frac{1}{2}$)

$$\lim_{t\to\infty}\rho(t)=\rho\geqslant 0,\qquad \lim_{r\to\infty} r\rho'(r)\ln r=0, \tag{2.3}$$

функция $L(t):=t^{\rho(t)-\rho}$ является *медленно меняющейся*, то есть

$$\lim_{t\to\infty}\frac{L(kt)}{L(t)}=1, \tag{2.4}$$

равномерно на любом фиксированном отрезке $0<k_0\leqslant k\leqslant k_1<\infty$.

Символом $\mathcal{S}_b$, где $b>0$ — фиксированное число, обозначаем класс *функций типа синуса, имеющих экспоненциальный тип, равный* b, то есть

$$\varphi\in S_b\iff\begin{cases}\varphi\in H(\mathbb{C}),\\ \exists\, C_\varphi\geqslant 0:\ \ln|\varphi(z)|\leqslant b|\operatorname{Im} z|+C_\varphi,\quad z\in\mathbb{C},\\ \exists\, c_\varphi,d_\varphi\in\mathbb{R}:\ \ln|\varphi(x+\mathrm{i}d_\varphi)|\geqslant c_\varphi,\quad x\in\mathbb{R}.\end{cases}$$

Одним из свойств функций $\varphi\in S_b$ является то, что нулевое множество каждой из них содержится в горизонтальной полосе, иными словами, при некотором $d_0>0$, зависящем только от φ, выполняется

$$\varphi(z)\neq 0,\qquad |\operatorname{Im} z|\geqslant d_0. \tag{2.5}$$

Напомним, что для $x\in(0;+\infty)$ обозначают $\ln^+ x=\max\{\ln x,0\}$ и $\ln^- x=\max\{-\ln x,0\}$.

Сформулируем основной результат о существовании не слабо локализуемых главных подмодулей в модуле $\mathcal{P}_{\Omega,a}$.

Теорема 2.1. *Пусть $a>\pi$ и функция $\varphi_0\in\mathcal{P}_{\Omega,a}$ имеет вид*

$$\varphi_0=\frac{\Phi}{\widetilde{\varphi}},$$

где $\Phi\in\mathcal{S}_\pi$, $\widetilde{\varphi}$ — целая функция минимального типа при порядке 1.

Предположим, что выполнены условия:

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{\ln|\widetilde{\varphi}(-x)|}{x^{\frac{1}{2}}}>0, \tag{2.6}$$

$$\int_1^\infty\frac{\ln^+|\widetilde{\varphi}(x)|}{x^{\frac{3}{2}}}\,dx<\infty. \tag{2.7}$$

Тогда главный подмодуль $\mathcal{J}_{\varphi_0}$ не является слабо локализуемым.

Из этой теоремы будут выведены два следствия. Первое из них представляет собой пример, иллюстрирующий существо дела, а второе позволяет расширить класс функций $\varphi\in\mathcal{P}_{\Omega,a}$ из теоремы 2.1, порождающих не слабо локализуемые главные подмодули.

Следствие 2.1. *Пусть $a>\pi$ и весовая последовательность Ω такая же, как в теореме 2.1. Функция*

$$\varphi_0(z)=\frac{\sin\pi z}{\sqrt{z}\sin\pi\sqrt{z}}$$

содержится в $\mathcal{P}_{\Omega,a}$ и главный подмодуль $\mathcal{J}_{\varphi_0}$ не является слабо локализуемым.

Следствие 2.2. *Пусть $a > \pi$ и весовая последовательность Ω такая же, как в теореме 2.1, $\Phi \in \mathcal{S}_\pi$, $\widetilde{\varphi}$ — целая функция минимального типа при порядке 1, для которой выполнены условия (2.6), (2.7), $a' > 0$ и функция $\psi \in \mathcal{P}_{\Omega,a'}$ удовлетворяет хотя бы одному из условий:*

$$\int_1^\infty \frac{\ln^- |\psi(x)|}{x^{\frac{3}{2}}}\, dx < \infty, \tag{2.8}$$

либо

$$\overline{\lim_{z\to\infty}} \frac{\ln|\psi(z)|}{|z|^{\frac{1}{2}}} < \infty, \tag{2.9}$$

Если $\varphi = \dfrac{\Phi\psi}{\widetilde{\varphi}} \in \mathcal{P}_{\Omega,b}$, $b = a + a'$, то порождаемый ею в $\mathcal{P}_{\Omega,b}$ главный подмодуль $\mathcal{J}_\varphi$ не является слабо локализуемым.

Замечание 2.1. *Проиллюстрируем сформулированные утверждения некоторыми примерами.*

1. *Из общей теории роста целых функций нетрудно вывести, что условия теоремы 2.1 выполнены для функций φ_1, φ_2, определенных следующим образом:*

$$\varphi_1(z) = \frac{\sin \pi z}{\sqrt{z} s_1(z) \sin \pi\sqrt{z}},$$

где s_1 — каноническое произведение по какому–нибудь подмножеству множества $\mathbb{Z} \setminus \{n^2\}_{n=0}^\infty$, имеющему конечную плотность при некотором порядке $\rho_0 < \frac{1}{2}$,

$$\varphi_2(z) = \frac{\sin \pi z}{s_2(z)},$$

где $s_2(z)$ — отношение $\sqrt{z}\sin\pi\sqrt{z}$ и канонического произведения по подмножеству множества $\{n^2\}_{n=1}^\infty$, имеющему конечную плотность при некотором порядке $\rho_0 < \frac{1}{2}$.

2. *Пусть для каких–нибудь $n_1 < n_2$ верно соотношение*

$$\ln|x| = o(\omega_{n_2}(x) - \omega_{n_1}(x)), \quad |x| \to \infty. \tag{2.10}$$

Определим функцию $u(e^t)$ как наибольшую выпуклую миноранту функции

$$\min\{\omega_{n_2}(e^t) - \omega_{n_1}(e^t), \omega_{n_2}(-e^t) - \omega_{n_1}(-e^t)\}.$$

При сделанном предположении (2.10) примером функции ψ, удовлетворяющей условиям следствия 2.2, служит целая функция ψ, логарифм модуля которой аппроксимирует субгармоническую функцию $u(|z|)$ с логарифмической точностью во всей комплексной плоскости, вне исключительного множества кружков с конечной суммой радиусов. Возможность такой аппроксимации установлена в работе [9].

3. *Пусть функция $\varphi_0 = \dfrac{\Phi}{\widetilde{\varphi}}$ из теоремы 2.1 лежит в* алгебре Шварца *(то есть растет на $\mathbb{R}$ не быстрее многочлена) и для некоторого $n_0 \in \mathbb{N}$ выполнено условие*

$$\ln|x| = o(\omega_{n_0}(x)), \quad |x| \to \infty. \tag{2.11}$$

Для каждого $n \geqslant n_0$ обозначим $u_n(e^t)$ отличную от линейной функции, в силу (2.11), наибольшую выпуклую миноранту функции $f_n(t) := \min\{\omega_n(e^t), \omega_n(-e^t)\}$. Нетрудно убедиться в том, что, при сделанных предположениях, в качестве функции ψ в следствии 2.2 может быть взята любая целая функция ψ_n, такая, что $\ln|\psi_n(z)|$ аппроксимирует субгармоническую функцию $u_n(|z|)$ с логарифмической точностью

во всей комплексной плоскости, за исключением множества кружков с конечной суммой радиусов.

Замечание 2.2. *Утверждения следствия 2.1 и, в нестрогой форме, теоремы 2.1 для более узкого класса весовых последовательностей Ω были недавно анонсированы нами в* [7] *(теорема 1 и замечание 1, соответственно).*

3. Вспомогательные утверждения

В этом параграфе проведем некоторые дополнительные построения. При этом считаем, что $a > \pi$ и последовательность весов Ω удовлетворяет тем же условиям, что и в теореме 2.1. Фиксируем произвольное $N_0 \in \mathbb{N}$, такое, что $c_0 := \pi/N_0 < \frac{(a-\pi)}{2}$.

Предложение 3.1. *Существует целая функция ψ_0, удовлетворяющая условиям:*

1) $\mathcal{Z}_{\psi_0} \subset \{N_0 k\}_{k\in\mathbb{Z}'}$, *где, как обычно,* $\mathbb{Z}' = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$;
2) $\psi_0 \in \mathcal{F}\left(\mathcal{D}_{\Omega,c_1}\right)$ *для любого* $c_1 > c_0$;
3) *для всякого достаточно малого $\delta > 0$ найдется постоянная $m_\delta > 0$, такая, что для любого $\varepsilon > 0$ будет*

$$\ln|\psi_0(z)| \geqslant c_0|\operatorname{Im} z| - (\pi+\varepsilon)\Big(\sin\Big(\frac{\theta}{2}\Big) + \Big|\cos\Big(\frac{\theta}{2}\Big)\Big|\Big)\nu(r) - m_\delta, \tag{3.1}$$

где

$$z = re^{\mathrm{i}\theta} \notin \bigcup_{k\in\mathbb{Z}'} \{|z - N_0 k| \leqslant \delta\}, \quad r \geqslant r_\varepsilon > 0, \quad \theta \in [0; 2\pi]. \tag{3.2}$$

Доказательство предложения 3.1 основано на следующей лемме, опирающейся, в свою очередь, на классическую теорию роста целых функций Левина — Пфлюгера.

Лемма 3.1. *Пусть $\rho(t)$ — уточненный порядок, $\lim\limits_{t\to\infty}\rho(t) = \frac{1}{2}$, $\nu(t) = t^{\rho(t)}$, $N_0 \in \mathbb{N}$. Тогда существуют число $d_1 > 0$ и последовательность*

$$\Lambda = \{\lambda_k\} \subset \{N_0, 2N_0, 3N_0, \dots\},$$

такие, что формула

$$s(z) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{\lambda_k}\right) \tag{3.3}$$

определяет целую функцию типа π при уточненном порядке $\rho(t)$, для которой соотношение

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\ln|s(re^{\mathrm{i}\theta})|}{\nu(r)} = \pi\sin\Big(\frac{\theta}{2}\Big) \tag{3.4}$$

выполняется всюду в $\mathbb{C}\setminus\mathcal{C}_0$, где $\mathcal{C}_0 = \bigcup D_k$ — исключительное множество кружков

$$D_k := \left\{z : |z - \lambda_k| \leqslant \frac{d_1\lambda_k}{\nu(\lambda_k)}\right\}, \tag{3.5}$$

попарно не пересекающихся для всех $k \geqslant k_0$ и таких, что каждый D_k содержит только один элемент множества Λ — точку λ_k; при этом стремление к пределу в (3.4) равномерное по $\theta \in [0; 2\pi]$.

Доказательство. В силу свойств уточненного порядка (см. [8, §12, гл. I]) функция ν является строго возрастающей при достаточно больших значениях аргумента, скажем, при $t \geqslant t_0$. Следовательно, для таких t однозначно определена обратная функция $t = l(s)$, также строго возрастающая при $s \geqslant s_0 := \nu(t_0)$. Не ограничивая общности рассуждений, считаем, что $s_0 = 1$.

Положим $\tilde{\lambda}_k = l(k)$, $k \in \mathbb{N}$, и обозначим символом $n_{\widetilde{\Lambda}}(t)$ число точек множества $\widetilde{\Lambda} = \{\tilde{\lambda}_k\}$ в круге $|z| \leqslant t$ (эквивалентно, в промежутке $(0; t]$). Очевидно, что

$$n_{\widetilde{\Lambda}}(\tilde{\lambda}_k) = k = \nu(\tilde{\lambda}_k), \quad k \in \mathbb{N}, \qquad \nu(t) - 1 \leqslant n_{\widetilde{\Lambda}}(t) \leqslant \nu(t), \quad t > 0,$$

и значит, существует

$$\lim_{t\to\infty} \frac{n_{\widetilde{\Lambda}}(t)}{\nu(t)} = 1.$$

Далее, из представления

$$\tilde{\lambda}_{k+1} - \tilde{\lambda}_k = \nu^{-1}(k+1) - \nu^{-1}(k) = \frac{1}{\nu(\tilde{\lambda}_k^*)(\rho(t)\ln t)'|_{t=\tilde{\lambda}_k^*}}, \qquad \tilde{\lambda}_k^* \in [\tilde{\lambda}_k; \tilde{\lambda}_{k+1}],$$

и свойств уточненного порядка нетрудно вывести, что найдутся $\tilde{d}_1 > 0$ и $\tilde{k}_0 \in \mathbb{N}$, такие, что кружки

$$\widetilde{D}_k := \left\{ z : |z - \tilde{\lambda}_k| \leqslant \frac{\tilde{d}_1 \tilde{\lambda}_k}{\nu(\tilde{\lambda}_k)} \right\},$$

$k \geqslant \tilde{k}_0$, попарно не пересекаются и каждый из них содержит только одну точку множества $\widetilde{\Lambda}$.

Определим теперь множество $\Lambda = \{\lambda_k\}$ следующим образом: точка λ_k — это ближайший справа к соответствующей точке $\tilde{\lambda}_k \in \widetilde{\Lambda}$ элемент множества $\{N_0, 2N_0, \dots\}$. Ясно, что тогда

$$\tilde{\lambda}_k - \lambda_k = O(1), \quad k \to \infty.$$

Нетрудно проверить также, что

$$\nu(t) - n_\Lambda(t) = O(1), \quad t \to \infty,$$

и значит,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{n_\Lambda(t)}{\nu(t)} = 1.$$

Из рассуждений о кружках $\widetilde{D}_k$ и определения множества Λ выводим, что при некоторых $k_0 \in \mathbb{N}$ и $d_1 > 0$ кружки D_k, определенные формулой (3.5), для всех $k \geqslant k_0$ попарно не пересекаются и каждый из них содержит только одну точку, λ_k, множества Λ.

Согласно теореме 5 из [8, §1, гл. II], формула

$$s(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_k}\right) \tag{3.6}$$

определяет целую функцию типа π при уточненном порядке $\rho(t)$, такую, что соотношение (3.4) выполняется всюду в $\mathbb{C} \setminus \mathcal{C}_0$, где $\mathcal{C}_0 = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} D_k$, причем стремление к пределу в (3.4) при $r \to \infty$, $z = re^{\mathrm{i}\theta} \notin \mathcal{C}_0$, равномерное по $\theta \in [0; 2\pi]$. □

Доказательство Предложения 3.1. Положим

$$\psi_0(z) = \frac{\sin c_0 z}{s(z)s(-z)},$$

где s — функция, построенная в лемме 3.1. Тогда из соотношения (3.4), с учетом определения исключительных кружков (3.5), для любого $\varepsilon > 0$ можем найти $r'_\varepsilon > 0$, такое, что для всех $r \geqslant r'_\varepsilon$ и $\theta \in [0; 2\pi]$ будет

$$\ln|s(re^{\mathrm{i}\theta})s(-r\mathrm{i}\theta)| \leqslant \left(\pi + \frac{\varepsilon}{2}\right)\left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + \left|\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|\right)\nu(\tilde{r}),$$

где

$$\tilde{r} = r\left(1 + \frac{d_1/(\nu(r))}{1 - d_1/(\nu(r))}\right).$$

Отсюда, используя свойства (2.3), (2.4) уточненного порядка, получаем, что оценка

$$\ln|s(re^{\mathrm{i}\theta})s(-r\mathrm{i}\theta)| \leqslant (\pi+\varepsilon)\left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + \left|\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|\right)\nu(r)$$

верна для всех $r \geqslant r_\varepsilon \geqslant r'_\varepsilon$ и $\theta \in [0; 2\pi]$. Из этого факта и хорошо известных оценок снизу для функции $\sin c_0 z$, как представителя класса функций типа синуса [14] заключаем, что оценка (3.1) выполняется для всех $z \in \mathbb{C}$, определяемых соотношениями (3.2).

Докажем теперь, что $\psi_0 \in \mathcal{F}(\mathcal{D}_{\Omega,c_1})$ для любого фиксированного $c_1 > c_0$. Для того заметим, что из (3.4) следует справедливость оценки снизу

$$\ln|s(re^{\mathrm{i}\theta})s(-re^{\mathrm{i}\theta})| \geqslant \left(\pi - \frac{\varepsilon}{2}\right)\left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + \left|\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|\right)\nu(\hat{r}), \tag{3.7}$$

где

$$\hat{r} = r\left(1 - \frac{d_1/(\nu(r))}{1 - d_1/(\nu(r))}\right).$$

Оценка (3.7) верна для любого $\varepsilon > 0$, если только $r \geqslant r''_\varepsilon > 0$ и $z = re^{\mathrm{i}\theta} \notin \mathcal{C}_0 \bigcup(-\mathcal{C}_0)$.

Принимая во внимание неравенство

$$\ln|\sin c_0 z| \leqslant c_0|\operatorname{Im} z|, \quad z \in \mathbb{C},$$

и используя свойства уточненного порядка (2.3), (2.4), из (3.7) выводим, что оценка

$$\ln|\psi_0(z)| \leqslant c_0|\operatorname{Im} z| - (\pi-\varepsilon)\left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + \left|\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|\right)\nu(|z|) + C_{\psi_0,\varepsilon}, \tag{3.8}$$

верна для всех $z \in \mathbb{C}$, здесь $C_{\psi_0,\varepsilon}$ — положительная постоянная.

Очевидно, что при достаточно малом фиксированном $\varepsilon > 0$ для всех $\theta \in [0; 2\pi]$ будет

$$(\pi-\varepsilon)\left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + \left|\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|\right) \geqslant 1.$$

Поэтому из неравенства (3.8), условия (2.1) и цитированного выше аналога теоремы Пэли — Винера для пробных Ω–УДФ заключаем, что $\psi_0 \in \mathcal{H}_{\Omega,c_1} = \mathcal{F}(\mathcal{D}_{\Omega,c_1})$.

Предложение 3.1 полностью доказано. □

4. Доказательство основных результатов

4.1. Доказательство теоремы 2.1. Выберем и зафиксируем $d_0 > 0$ такое, что $\Phi(z) \neq 0$ для всех z с $|\operatorname{Im} z| \geqslant d_0$ (см. (2.5)).

Предположим, что подмодуль $\mathcal{J}_{\varphi_0}$ слабо локализуем. Тогда, в частности, должна найтись *обобщенная* последовательность многочленов $\{p_\alpha\}$, такая, что

$$p_\alpha\varphi_0 \to \Phi, \tag{4.1}$$

в топологии пространства $\mathcal{P}_{\Omega,a}$.

Определим Ω–ультрараспределение $g_0 \in \mathcal{E}'_{\Omega,a}$ и функцию $g_1 \in L^2(-\pi;\pi) \subset \mathcal{E}'_{\Omega,a}$ равенствами

$$\varphi_0 = \mathcal{F}(g_0), \qquad \Phi = \mathcal{F}(g_1).$$

Их существование обеспечивается аналогом теоремы Пэли — Винера — Шварца для Ω–ультрараспределений [1, Теорема 5.4.2] и классической теоремы Пэли — Винера, соответственно. Тогда можем написать

$$g_\alpha := p_\alpha(\mathrm{i}D)(g_0) \in \mathcal{E}'_{\Omega,a}, \qquad p_\alpha\varphi_0 = \mathcal{F}(g_\alpha),$$

где символом D обозначен оператор (обобщенного) дифференцирования Ω–ультрараспределений.

Пусть $f_0 \in \mathcal{D}_{\Omega,c_1}$ — пробная Ω–УДФ, для которой $\psi_0 = \mathcal{F}(f_0)$, где ψ_0 — функция, построенная в предложении 3.1. Как отмечалось выше, Ω–УДФ f_0 с компактным носителем в $[-c_0; c_0]$ может быть отождествлена с элементом сильного сопряженного к пространству $\mathcal{E}_{\Omega,c_1}$, $c_1 > c_0$, который также будем обозначать f_0; и значит,

$$f_0(f) = \int\limits_{\mathbb{R}} f_0(t) f(t)\, dt, \quad f \in \mathcal{E}_{\Omega,c_1}.$$

Заметим, что

$$(p_\alpha \varphi_0 - \Phi)\psi_0 = \mathcal{F}(g_\alpha - g_1)\mathcal{F}(f_0) = \mathcal{F}\left(S_\alpha * f_0\right), \tag{4.2}$$

где $S_\alpha := g_\alpha - g_1$, а $S_\alpha * f_0$ — свертка Ω–ультрараспределений с компактными носителями, определяемая формулой

$$(S_\alpha * f_0)(f) = (S_\alpha)_y\big((f_0)_t(f(y+t))\big), \quad f \in \mathcal{E}_{\Omega,\pi+c_1}, \quad \pi + c_1 \leqslant a.$$

Положим $\tilde{f}_0(t) = f_0(-t)$ и обозначим символом M_α оператор свертки, порожденный Ω–ультрараспределением S_α и действующий в $\mathcal{E}_\Omega(\mathbb{R})$ по формуле

$$M_\alpha(f)(h) = S_\alpha(f(\cdot + h)).$$

Тогда (4.2) перепишется в виде

$$(p_\alpha \varphi_0 - \Phi)\psi_0 = \mathcal{F}\left(M_\alpha(\tilde{f}_0)\right). \tag{4.3}$$

В силу изоморфизма между $\mathcal{P}_{\Omega,a}$ и $\mathcal{E}'_{\Omega,a}$, устанавливаемого посредством преобразования Фурье — Лапласа, соотношение (4.1) эквивалентно тому, что обобщенная последовательность S_α сходится к 0 в сильной топологии сопряженного пространства $\mathcal{E}'_{\Omega,a}$. Окрестностями нуля в этой топологии являются поляры B^0 ограниченных множеств $B \subset \mathcal{E}_{\Omega,a}$. Возьмем в качестве множества B совокупность сдвигов

$$B := \{\tilde{f}_0(\cdot + \tau) : \ \tau \in [-\pi; \pi]\},$$

ограниченность которого следует из финитности $\tilde{f}_0$ и Предложения 1.2.2 монографии [1], и найдем значение индекса α_B со свойством:

$$\sup_{f \in B} |S_\alpha(f)| < 1, \quad \alpha \succ \alpha_B \tag{4.4}$$

Из финитности $\tilde{f}_0$ и S_α также вытекает, что $M_\alpha(\tilde{f}_0) \in \mathcal{D}_{\Omega,a}$ для всех α, а из (4.3) и (4.4) — справедливость неравенства

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |p_\alpha(x)\varphi_0(x)\psi_0(x)| < \infty$$

для всех $\alpha \succ \alpha_B$.

Эта оценка, вместе с неравенством (3.1) и оценками снизу для функций типа синуса (см., например, [14, 22.1, Lemma 1]), влечет существование постоянной $C_1 > 0$, такой, что для всех $x \in \mathbb{R}$ и $\alpha \succ \alpha_B$ справедливо неравенство

$$|p_\alpha(x)| \leqslant C_1 e^{\widetilde{\nu}(x)}, \tag{4.5}$$

где $\widetilde{\nu}(x) = (\pi+1)\nu(x) + \ln^+ |\widetilde{\varphi}(x)|$, и, в силу (2.2) и (2.7),

$$\int\limits_1^\infty \frac{\widetilde{\nu}(x)}{x^{\frac{3}{2}}}\, dx < \infty. \tag{4.6}$$

Полагая $q_\alpha(w) = p_\alpha(w^2)$, $\alpha \succ \alpha_B$, видим, что

$$|q_\alpha(t)| \leqslant C_2 e^{\widetilde{\nu}(t^2)}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \alpha \succ \alpha_B, \tag{4.7}$$

при этом (4.6) можно записать в виде

$$\int_1^\infty \frac{\widetilde{\nu}(t^2)}{1+t^2}\,dt < \infty.$$

Применим теперь рассуждения из работы [15, §B.2, Chapter VI] для получения оценок сверху модулей многочленов q_α во всей плоскости. При помощи этих рассуждений из (4.7) выводим, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется постоянная $M_\varepsilon > 0$, не зависящая от w и α, такая, что

$$|q_\alpha(w)| \leqslant M_\varepsilon e^{\varepsilon|w|}, \quad w \in \mathbb{C}, \quad \alpha \succ \alpha_B.$$

Откуда следует, что

$$|p_\alpha(z)| \leqslant M_\varepsilon e^{\varepsilon|z|^{\frac{1}{2}}}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad \alpha \succ \alpha_B. \tag{4.8}$$

Для того, чтобы прийти к противоречию с (4.1), заметим, что из условия (2.6), включений

$$\mathcal{Z}_{\widetilde{\varphi}} \subset \mathcal{Z}_\Phi \subset \{z : \ |\operatorname{Im} z| < d_0\},$$

свойств функций типа синуса и определения числа d_0 следует справедливость неравенств

$$\begin{aligned} &\overline{\lim_{z\to\infty}} \frac{\ln|\widetilde{\varphi}(z)|}{|z|^{\frac{1}{2}}} > 0 \qquad \text{если} \qquad z = x + 2\mathrm{i}d_0, \quad x \in \mathbb{R}_-, \\ &|\Phi(z)| \geqslant \text{const} \qquad \text{для всех} \quad z = x + 2\mathrm{i}d_0, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Отсюда, с учетом произвольности $\varepsilon > 0$ в (4.8), выводим, что соотношение (4.1) не может иметь места даже в топологии поточечной сходимости в $\mathbb{C}$, очевидно, более слабой, чем топология пространства $\mathcal{P}_{\Omega,a}$.

Полученное противоречие доказывает, что подмодуль $\mathcal{J}_{\varphi_0}$ не является слабо локализуемым, что завершает доказательство теоремы 2.1.

4.2. Доказательство следствия 2.1. Выведем теперь следствия 2.1. Хорошо известно, что $\sin \pi z \in \mathcal{S}_\pi$, а $\widetilde{\varphi} = \sqrt{z}\sin\pi\sqrt{z}$ является целой функцией типа π при порядке $\frac{1}{2}$, для которой при каждом достаточно малом $\sigma_0 \in (0; \frac{1}{2})$ справедлива оценка снизу (см., например, [4, Лемма 1]):

$$|\widetilde{\varphi}(z)| \geqslant c_{\sigma_0} e^{\pi\sqrt{r}\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|}, \quad z = re^{\mathrm{i}\theta} \in \mathbb{C} \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \{z : \ |z - k^2| < 3\sigma_0\}.$$

Обозначая символом $\mathcal{P}_a$ *модуль Шварца*, состоящий их всех целых функций экспоненциального типа, меньшего, чем a, и полиномиального роста на вещественной прямой, в условиях следствия имеем: $\varphi_0 \in \mathcal{P}_a \subset \mathcal{P}_{\Omega,a}$ для любого $a > \pi$, а для функции $\widetilde{\varphi}$ выполнены соотношения (2.6), (2.7). Применив теорему 2.1, получаем нужное утверждение.

4.3. Доказательство следствия 2.2. Пусть выполнено условие (2.8). Предположим, что подмодуль $\mathcal{J}_\varphi$ слабо локализуем, и значит, найдется обобщенная последовательность многочленов p_α, такая, что

$$p_\alpha \varphi \to \Phi\psi \tag{4.9}$$

в топологии пространства $\mathcal{P}_{\Omega,b}$.

Рассуждая точно так же, как в доказательстве теоремы 2.1, но с функцией φ вместо φ_0, устанавливаем существование постоянной $C_1 > 0$ и значения индекса α_0, таких, что справедливо неравенство

$$|p_\alpha(x)| \leqslant C_1 e^{\widetilde{\nu}(x)}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \alpha \succ \alpha_0,$$

где $\widetilde{\nu}(x) = (\pi+1)\nu(x) + \ln^+|\widetilde{\varphi}(x)| + \ln^-|\psi(x)|$; причем, в силу (2.2), (2.7) и (2.8),

$$\int_1^\infty \frac{\widetilde{\nu}(x)}{x^{\frac{3}{2}}}\,dx < \infty.$$

Продолжая и далее рассуждать так же, как в доказательстве теоремы 2.1 после формулы (4.6), приходим к противоречию: соотношение (4.9) не может выполняться даже в топологии поточечной сходимости в $\mathbb{C}$.

Пусть теперь образующая подмодуля $\mathcal{J}_\varphi$ имеет вид $\varphi = \dfrac{\Phi\psi}{\widetilde{\varphi}}$, где $\psi \in \mathcal{P}_{\Omega,a'}$ удовлетворяет условию (2.9). Применяя первую теорему из [15, III.G.2] к функции экспоненциального типа в верхней полуплоскости $g(w) := \psi(w^2)$, и учитывая при этом условия (2.1), (2.2) на веса ω_n, ν, выводим, что функция ψ удовлетворяет и соотношению (2.8). И значит, нужное утверждение следует из изложенного в первой части настоящего доказательства.

5. D–инвариантные подпространства Ω–УДФ, не допускающие спектрального синтеза в слабом смысле

Сформулируем теперь утверждения об инвариантных относительно оператора дифференцирования подпространствах Ω–УДФ, двойственные теореме 2.1 и следствиям 2.1, 2.2, и примыкающие к исследованиям [6], [10], [11].

Пусть $D = \frac{d}{dt}$ — оператор дифференцирования, $W \subset \mathcal{E}_{\Omega,a}$ — *D–инвариантное подпространство*, то есть замкнутое подпространство, такое, что $D(W) \subset W$. Символом $\operatorname{Exp} W$ обозначаем запас экспоненциальных одночленов $t^k e^{-\mathrm{i}\lambda t}$ (корневых элементов оператора D), содержащихся в W, а символом I_W — *резидуальный промежуток* подпространства W, определяемый как наименьший среди всех относительно замкнутых в $(-a;a)$ промежутков I со свойством:

$$W_I := \{g \in \mathcal{E}_{\Omega,a} :\ g|_I = 0\} \subset W.$$

Задача спектрального синтеза для оператора D состоит в описании тех D–инвариантных подпространств W, которые полностью определяются своим запасом корневых элементов, то есть имеют вид

$$W = \overline{\operatorname{span}(\operatorname{Exp} W)}. \tag{5.1}$$

Задача спектрального синтеза в слабом смысле для оператора D состоит в нахождении D–инвариантных подпространств W, которые представляются в виде:

$$W = \overline{\operatorname{span}(\operatorname{Exp} W) + W_{I_W}} \tag{5.2}$$

Нетрудно видеть, что (5.1) — частный случай (5.2), возможный лишь для D–инвариантных подпространств W с $I_W = (-a;a)$.

Из результатов нашей работы [10] следует, что *D–инвариантное подпространство $W \subset \mathcal{E}_{\Omega,a}$ имеет вид (5.1) тогда и только тогда выполнены условия: $I_W = (-a;a)$ и спектр сужения оператора дифференцирования $D : W \to W$ дискретен.*

Еще при изучении возможности представления (5.2) для D–инвариантных подпространств в $C^\infty(a;b)$ (см. [3], [5], [12], [13]) рассмотрения проводились при условии, что спектр оператора $D : W \to W$ дискретен. Для пространств Ω–УДФ необходимость этого требования доказана нами в [10, Propositions 3.3, 5.1]. Достаточным условием слабого спектрального синтеза (5.2) для D–инвариантных подпространств с дикретным спектром в пространстве $\mathcal{E}_{\Omega,a}$ является соотношение $r_W < \frac{|I_W|}{2}$, где r_W — радиус полноты системы экспоненциальных одночленов $\operatorname{Exp} W$, $|I_W|$ — длина промежутка I_W [10, Theorem 2.1]. Если $r_W > \frac{|I_W|}{2}$, то $W = \{\mathbf{0}\}$ [10, Propositions 3.2, 4.3].

Вопрос об условиях, при которых W допускает спектральный синтез в слабом смысле (5.2) в случае, когда $r_W = \frac{|I_W|}{2}$ не изучен до конца даже для $W \subset C^\infty(a;b)$. В этом направлении для D–инвариантных подпространств Ω–УДФ $W \subset \mathcal{E}_{\Omega,a}$ первым из авторов были получены два результата: о существовании D–инвариантных подпространств Ω–УДФ, не допускающих слабого спектрального синтеза в частном случае, когда $\Omega = \{n\omega\}_{n=1}^{\infty}$, ω — весовая функция [6, Теорема 1.12] и о возможности слабого спектрального синтеза для подпространства W специального вида — двойственное утверждение к [6, Предложение 1.11].

Теорема 2.1 и следствия 2.1, 2.2, в силу двойственности между D–инвариантными подпространствами в $\mathcal{E}_{\Omega,a}$ и замкнутыми подмодулями в модуле $\mathcal{P}_{\Omega,a}$, подробно описанной нами в работе [10], приводят к эквивалентным утверждениям о спектральном синтезе.

Для фиксированного Ω–ультрараспределения $S \in \mathcal{E}'_{\Omega,a}$ положим

$$W_S = \{f \in \mathcal{E}_{\Omega,a} : \ S(f^{(k)}) = 0, \ k = 0, 1, \dots\}. \tag{5.3}$$

Нетрудно проверить, что W_S — D–инвариантное подпространство с дискретным спектром, двойственный подмодуль которого главный с образующей $\varphi = \mathcal{F}(S)$. Поэтому допустимость слабого спектрального синтеза для W_S равносильна слабой локализуемости подмодуля $\mathcal{J}_\varphi$ [10, Proposition 3.3]. Теорема 2.1 эквивалентна следующему утверждению о D–инвариантных подпространствах.

Теорема 5.1. *Пусть Ω–ультрараспрделение $S_0 \in \mathcal{E}'_{\Omega,a}$ таково, что для его преобразования Фурье — Лапласа $\varphi_0 = \mathcal{F}(S_0)$ справедливо представление*

$$\varphi_0 = \frac{\Phi}{\widetilde{\varphi}},$$

где $\Phi \in \mathcal{S}_\pi$, $\widetilde{\varphi}$ — целая функция минимального типа при порядке 1, для которой выполнены соотношения (2.6), (2.7).

Тогда D–инвариантное подпростр наство W_{S_0} нетривиально, имеет дискретный спектр и не допускает спектрального синтеза в слабом смысле.

Сформулируем утверждения, двойственные к следствиям 2.1, 2.2.

Следствие 5.1. *D–инвариантное подпространство $W_{S_0} \subset \mathcal{E}_{\Omega,a}$, $a > \pi$, порожденное Ω–ультрараспределением*

$$S_0 = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\sin \pi z}{\sqrt{z}\sin \pi\sqrt{z}}\right),$$

нетривиально, имеет дискретный спектр и не допускает слабого спектрального синтеза.

Следствие 5.2. *Пусть $a > \pi$, $a' > 0$, $b = a + a'$, $\varphi \in \mathcal{P}_{\Omega,b}$ — функция, для которой справедливо утверждение следствия 2.2. Тогда D–инвариантное подпространство $W_S \subset \mathcal{E}_{\Omega,b}$, порожденное Ω–ультрараспределением $S = \mathcal{F}^{-1}(\varphi)$ согласно формуле (5.3), нетривиально, имеет дискретный спектр и не допускает слабого спектрального синтеза.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А.В. Абанин. *Ультрадифференцируемые функции и ультрараспределения.* М.: Наука. 2007.
2. А.В. Абанин. *Ω–ультрараспределения* // Изв. Росс. акад. наук, Сер. мат. **72**:2, 207–240 (2008).
3. Н.Ф. Абузярова. *Спектральный синтез в пространстве Шварца бесконечно дифференцируемых функций* // Докл. Росс. акад. наук, Мат. **457**:5, 510–513 (2014).
4. Н.Ф. Абузярова. *Некоторые свойства главных подмодулей в модуле целых функций экспоненциального типа и полиномиального роста на вещественной оси* // Уфимск. мат. ж. **8**:1, 3–14 (2016).

5. Н.Ф. Абузярова. *Спектральный синтез для оператора дифференцирования в пространстве Шварца* // Мат. заметки **102**:2, 163–177 (2017).
6. Н.Ф. Абузярова. *Спектральный синтез для оператора дифференцирования и локальное описание подмодулей целых функций.* Дисс. ... доктора физ.-мат.наук. Уфа. 2023.
7. Н.Ф. Абузярова, З.Ю. Фазуллин. *О главных подмодулях в модулях целых функций, двойственных к пространствам Ω–ультрадифференцируемых функций* // Докл. Росс. акад. наук Мат., информ., проц. упр. **523**, 3–9 (2025).
8. Б.Я. Левин. *Распределение корней целых функций.* М.: ГИТТЛ. 1956.
9. Р.С. Юлмухаметов. *Аппроксимация субгармонических функций* // Anal. Math. **11**, 257–282 (1985).
10. N.F. Abuzyarova, Z.Yu. Fazullin. *Invariant subspaces in non–quasianalytic spaces of Ω–ultradifferentiable functions on an interval* // Eurasian Math. J. **15**:3, 9–24 (2024).
11. N.F. Abuzyarova. *Differentiation operator in the Beurling space of ultradifferentiable functions of normal type on an interval* // Lobachevskii J. Math. **43**:6, 1472–1485 (2022).
12. A. Aleman, B. Korenblum. *Derivation–invariant subspaces of C^∞* // Comput. Methods Funct. Theory **8**:2, 493–512 (2008).
13. A. Aleman, A. Baranov, Yu. Belov. *Subspaces of C^∞ invariant under the differentiation* // J. Funct. Anal. **268**:8, 2421–2439 (2015).
14. B. Ya. Levin. *Lectures on Entire Functions.* Amer. Math. Soc., Providence, R.I. (1996).
15. P. Koosis. *Logarithmic Integral I.* Cambridge Univ. Press, Cambridge. 1998.

Наталья Фаирбаховна Абузярова,
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: abnatf@gmail.com

Зиганур Юсупович Фазуллин,
Уфимский университет науки и технологий,
ул. Заки Валиди, 32,
450076, г. Уфа, Россия
E-mail: fazullinzu@mail.ru