ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 18 № 2 (2026). С. 93-103.

УДК 517.958

ГЕОМЕТРИЯ ТЕНЗОРА РИЧЧИ ГАРМОНИЧЕСКИХ ПРИБЛИЖЕННО ТРАНССАСАКИЕВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

А.Р. РУСТАНОВ, С.В. ХАРИТОНОВА

Аннотация. В работе изучается геометрия тензора Риччи гармонического приближенно транссасакиевого многообразия. На пространстве присоединенной G–структуры введены фундаментальные тождества гармонических приближенно транссасакиевых многообразий. Доказано, что Риччи–плоские гармонические приближенно транссасакиевые многообразия являются точнейше косимплектическими. Получены условия, при которых гармонические приближенно транссасакиевые многообразия являются Эйнштейновыми и η–Эйнштейновыми многообразиями. Получены тождества для тензора Риччи гармонических приближенно транссасакиевых многообразий. Получены локальные характеризации следующих гармонических приближенно транссасакиевых многообразий: многообразий Эйнштейна; многообразий, тензор Риччи которых является параллельным, η–параллельным, тензором Кодацци, тензором Киллинга и удовлетворяет трем выделенным тождествам.

Ключевые слова: гармоническое приближенно транссасакиево многообразие, тензор Риччи, многообразие Эйнштейна, точнейше косимплектическое многообразие.

Mathematics Subject Classification: 53D15

1. Введение

В данной работе мы продолжаем изучение приближенно транссасакиевых (короче, NTS–) многообразий, то есть многообразий, снабженных почти контактной метрической структурой, линейное расширение которой принадлежит классу $W_1 \oplus W_4$ в классификации Грея — Хервеллы. В работах [7], [8], [9] определены гармонические NTS–многообразия и получено локальное строение этих многообразий. Для получения гармонического NTS–многообразия достаточно взять декартово произведение любого приближенно келерова многообразия M на вещественную прямую $\mathbb{R}$ и произвести каноническое конциркулярное преобразование точнейше косимплектической структуры многообразия $M \times \mathbb{R}$. Любое гармоническое NTS–многообразие (локально) устроено таким образом.

Работа структурно организована следующим образом. В параграфе 2 даны основные определения и сформулированы факты из геометрии гармонических NTS–многообразий. Это важно для понимания последующего изложения. Исследование ведется с использованием метода присоединенных G–структур. В частности, приведены структурные уравнения, выражения для компонент тензора Риччи, скалярной кривизны гармонического NTS–многообразия на пространстве присоединенной G–структуры. Далее приведены первое и второе фундаментальные тождества, а также сформулированно новое третье фундаментальное тождество гармонических приближенно транссасакиевых многообразий. Получены новые результаты для эйнштейновых и η–эйнштейновых гармонических приближенно

A.R. Rustanov, S.V. Kharitonova, Geometry of Ricci tensor of harmonic nearly trans–Sasakian manifolds.

Поступила 31 декабря 2024 г.

транссасакиевых многообразий. Доказано, что гармоническое NTS–многообразие имеет Φ–инвариантный тензор Риччи.

В параграфе 3 на пространстве присоединенной G–структуры подсчитаны компоненты ковариантной производной тензора Риччи, получены некоторые тождества, которым удовлетворяет тензор Риччи гармонического NTS–многообразия, а также получена локальная характеризация гармонических NTS–многообразий, тензор Риччи которых удовлетворяет полученным тождествам. Кроме того получены классификационные теоремы для гармонических NTS–многообразий, тензор Риччи которых является параллельным, η–параллельным, тензором Кодацци, тензором Киллинга.

2. Предварительные сведения

Напомним, что почти контактной метрической (короче, AC–) структурой на многообразии M называется совокупность $(\xi, \eta, \Phi, g = \langle\cdot\,,\,\cdot\rangle)$ тензорных полей на M, где ξ — векторное поле, называемое характеристическим, η — дифференциальная 1–форма, называемая контактной формой, Φ — эндоморфизм модуля гладких векторных полей многообразия M, называемый структурным эндоморфизмом, $g = \langle\cdot\,,\,\cdot\rangle$ — риманова метрика. При этом

$$1)\ \eta(\xi) = 1; \qquad 2)\ \Phi(\xi) = 0; \qquad 3)\ \eta\circ\Phi = 0; \qquad 4)\ \Phi^2 = -id + \xi\otimes\eta;$$
$$5)\ \langle\Phi X, \Phi Y\rangle = \langle X, Y\rangle - \eta(X)\eta(Y); \qquad X, Y \in \mathcal{X}(M).$$

Многообразие, допускающее AC–структуру называется почти контактным метрическим многообразием (короче, AC–) многообразием.

Определение 2.1 ([7]). *AC–структура называется приближенно транссасакиевой (короче, NTS–) структурой, если ее линейное расширение принадлежит классу $W_1 \oplus W_4$ почти эрмитовых структур в классификации Грея — Хервеллы. AC–многообразие, снабженное NTS–структурой, называется NTS–многообразием.*

Определение 2.2 ([7]). *NTS–структура с замкнутой контактной формой называется собственной NTS–структурой.*

Определение 2.3 ([7], [9]). *Собственное NTS–многообразие с гармонической контактной формой называется гармоническим, а число $\chi = -\frac{1}{2n}\delta\eta$ — его характеристикой.*

Рассмотрим гармоническое NTS–многообразие. Форма Ли такого многообразия замкнута [7], а значит, характеристика такого многообразия является постоянной, т.е. $d\chi = 0$. Причем, так как $\bar{\chi} = \chi$, имеем χ — вещественная функция.

Полная группа структурных уравнений гармонического NTS–многообразия имеет вид [7]:

$$\begin{aligned}
&1)\quad d\theta^a = -\theta^a_b\wedge\theta^b + C^{abc}\theta_b\wedge\theta_c + \chi\delta^a_b\theta^b\wedge\theta;\\
&2)\quad d\theta_a = \theta^b_a\wedge\theta_b + C_{abc}\theta^b\wedge\theta^c + \chi\delta^b_a\theta_b\wedge\theta;\\
&3)\quad d\theta = 0;\\
&4)\quad d\theta^a_b + \theta^a_c\wedge\theta^c_b = (A^{ad}_{bc} - 2C^{adh}C_{hbc})\theta^c\wedge\theta_d,
\end{aligned}\tag{2.1}$$

где $\{A^{ad}_{bc}\}$ — семейство функций на пространстве присоединенной G–структуры, служащих компонентами, так называемого, тензора кривизны присоединенной Q–алгебры [1], или структурного тензора второго рода, причем,

$$\begin{aligned}
&1)\ A^{ad}_{[bc]} = 0; \qquad 2)\ A^{[bd]}_{ac} = 0; \qquad 3)\ \overline{A^{ad}_{bc}} = A^{bc}_{ad};\\
&4)\ C^{[abc]} = C^{abc}; \qquad 5)\ C_{[abc]} = C_{abc}.
\end{aligned}\tag{2.2}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} &1)\quad dC^{abc}+C^{dbc}\theta^a_d+C^{adc}\theta^b_d+C^{abd}\theta^c_d=C^{abcd}\theta_d+\chi C^{abc}\theta;\\ &2)\quad dC_{abc}-C_{dbc}\theta^d_a-C_{adc}\theta^d_b-C_{abd}\theta^d_c=C_{abcd}\theta^d+\chi C_{abc}\theta;\\ &3)\quad d\chi=0, \end{aligned}\tag{2.3}$$

где C^{abcd}, C_{abcd} — подходящие функции на пространстве присоединенной G–структуры, причем,

$$1)\ C^{a[bcd]}=0;\qquad 2)\ C_{a[bcd]}=0.$$

Дифференцируя внешним образом уравнения (2.1:4), получим

$$dA^{ad}_{bc}+A^{hd}_{bc}\theta^a_h+A^{ah}_{bc}\theta^d_h-A^{ad}_{hc}\theta^h_b-A^{ad}_{bh}\theta^h_c=A^{ad}_{bch}\theta^h+A^{adh}_{bc}\theta_h+2\chi A^{ad}_{bc}\theta,\tag{2.4}$$

где

$$\begin{aligned} &1)\quad A^{ad}_{b[ch]}=A^{a[dh]}_{bc}=0;\\ &2)\quad (A^{a[d}_{bc}-2C^{a[d|h}C_{hbc})C^{c|fg]}=0;\\ &3)\quad (A^{ad}_{b[c}-2C^{adf}C_{fb[c})C_{d|hg]}=0. \end{aligned}\tag{2.5}$$

Дифференцируя внешним образом равенство 1) формулы (2.3), получим

$$dC^{abcd}+C^{hbcd}\theta^a_h+C^{abcd}\theta^d_h+C^{abhd}\theta^c_d+C^{abch}\theta^d_h=C^{abcdh}\theta_h+2\chi C^{abcd}\theta,$$

где

$$1)\ C^{abc[dh]}=0;\qquad 2)\ C^{abcg}C_{gdh}=0.\tag{2.6}$$

Тождество 2) формулы (2.6) назовем первым фундаментальным тождеством, а 3) из (2.5) вторым фундаментальным тождеством гармонического NTS–многообразия.

Примем для удобства следующие обозначения:

$$\begin{aligned} &C^{ad}_{bc}=C^{adh}C_{hbc},\qquad C^a_b=C^{ac}_{bc},\qquad A^a_b=A^{ac}_{bc},\\ &A^{ac}_b=A^{hac}_{hb},\qquad A^a_{bc}=A^{ha}_{hbc}. \end{aligned}$$

Лемма 2.1. *Для гармонического NTS–многообразия $C=C^a_a$ — неотрицательная. При этом, $C=0$ тогда и только тогда, когда данное многообразие является либо косимплектическим, либо многообразием Кенмоцу, т.е. многообразием, полученным из косимплектического многообразия каноническим концирулярным преобразованием.*

Доказательство. Поскольку $\overline{C^{abc}}=C_{abc}$, получим $C=C^{abc}C_{abc}=\sum_{abc}|C_{abc}|^2\geqslant 0$, причем, $C=0$ тогда и только тогда, когда $C^{abc}=C_{abc}=0$. Тогда согласно теореме 6 из [7] гармоническое NTS–многообразие является либо косимплектическим многообразием, либо многообразием Кенмоцу, т.е. многообразием, полученным из косимплектического многообразия каноническим концирулярным преобразованием [2]. Легко видеть, что верно и обратное. □

Согласно(2.3) и (2.4) имеем

$$\begin{aligned} &1)\quad dC^{ad}_{bc}+C^{gd}_{bc}\theta^a_g+C^{ag}_{bc}\theta^d_g-C^{ad}_{gc}\theta^g_b-C^{ad}_{bg}\theta^g_c=C^{ad}_{bcg}\theta^g+C^{adg}_{bc}\theta_g+2\chi C^{ad}_{bc}\theta;\\ &2)\quad dC^a_b+C^h_b\theta^a_h-C^a_h\theta^h_b=C^a_{bh}\theta^h+C^{ah}_b\theta_h+2\chi C^a_b\theta;\\ &3)\quad dA^a_b+A^h_b\theta^a_h-A^a_h\theta^h_b=A^a_{bh}\theta^h+A^{ah}_b\theta_h+2\chi A^a_b\theta. \end{aligned}\tag{2.7}$$

Свернем равенство 3) формулы (2.5), являющееся первым фундаментальным тождеством гармонического NTS–многообразия по индексам a и b:

$$A^d_cC_{hgd}+A^d_hC_{gcd}+A^d_gC_{chd}-2C^d_cC_{hgd}-2C^d_hC_{gcd}-2C^d_gC_{chd}=0.\tag{2.8}$$

Теперь свернем третье равенство формулы (2.5) по индексам a и c и переобозначим b на c. Тогда, с учетом свойств симметрии объектов A и C (2.2), получим:

$$A^d_c C_{hgd} + 2C^d_c C_{hgd} - 2C^d_g C_{chd} + 2C^d_h C_{cgd} = 0. \tag{2.9}$$

Почленно вычтем (2.9) из (2.8), с учетом свойств симметрии объекта C (2.2), получим тождество

$$A^d_{[h} C_{g]cd} - 2C^d_c C_{hgd} = 0. \tag{2.10}$$

Назовем тождество (2.10) третьим фундаментальным тождеством гармонического NTS–многообразия.

Компоненты тензора Риччи гармонического NTS–многообразия на пространстве присоединенной G–структуры имеют вид [8]:

$$\begin{aligned} &1) \quad S_{00} = -2n\chi^2; \\ &2) \quad S_{a\hat{b}} = A^{bc}_{ac} - 3C^{bcd}C_{dca} - 2n\chi^2\delta^b_a; \\ &3) \quad S_{\hat{a}b} = A^{ac}_{bc} - 3C^{acd}C_{dcb} - 2n\chi^2\delta^a_b. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Остальные компоненты нулевые.

Из равенства 1) формулы (2.11) следует, что Риччи–плоское гармоническое NTS–многообразие является точнейше косимплектическим многообразием, а значит, локально эквивалентно произведению приближенно келерова многообразия на вещественную прямую. Если многообразие односвязно, то указанные эквивалентности можно выбрать глобальными.

Скалярная кривизна гармонического NTS–многообразия равна

$$r = 2A^{ab}_{ab} - 6C^{abc}C_{cba} - 2n(n+1)\chi^2. \tag{2.12}$$

Из (2.1) следует, что всякое многообразие Кенмоцу является гармоническим NTS–многообразием характеристики $\chi = -1$, а всякое точнейше косимплектическое многообразие является гармоническим NTS–многообразием характеристики $\chi = 0$. Многообразия Кенмоцу и точнейше косимплектические многообразия являются наиболее интересными и хорошо изученными примерами гармонических NTS–многообразий. К этим примерам следует добавить специальные многообразия Кенмоцу второго рода.

Теорема 2.1. *Гармоническое NTS–многообразие является многообразием Эйнштейна тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной G–структуры имеет место равенство*

$$A^a_b = 3C^a_b. \tag{2.13}$$

Доказательство. Пусть гармоническое NTS–многообразие является многообразием Эйнштейна с космологической константой ϵ. Тогда компоненты тензора Риччи S и компоненты метрического тензора g связаны соотношением $S_{ij} = \epsilon g_{ij}$, где $\epsilon = \mathrm{const}$. С учетом (2.11), эти соотношения на пространстве присоединенной G–структуры запишутся в виде:

$$\begin{aligned} &1) \quad -2n\chi^2 = \epsilon; \\ &2) \quad A^b_a - 3C^b_a - 2n\chi^2\delta^b_a = \epsilon\delta^b_a, \end{aligned} \tag{2.14}$$

т.е. $A^a_b = 3C^a_b$. □

Следствие 2.1. *Гармоническое NTS–многообразие Эйнштейна является многообразием неположительной скалярной кривизны.*

Теорема 2.2. *Полное гармоническое NTS–многообразие Эйнштейна является либо Риччи–плоским точнейше косимплектическим многообразием, а значит, голоморфно* *изометрично накрывается произведением Риччи–плоского приближенно келерова многообразия на вещественную прямую, либо компактно и имеет конечную фундаментальную группу.*

Доказательство. Если $\epsilon = 0$, то из (2.14:1) следует, что $\chi = 0$, т.е. многообразие является Риччи–плоским точнейше косимплектическим, а значит, локально голоморфно изометрично многообразию вида $N^{2n} \times \mathbb{R}$, где N^{2n} — Риччи–плоское приближенно келерово многообразие [2].

Если $\epsilon < 0$, то, согласно классической теореме Майерса [3], в случае полноты многообразие компактно и имеет конечную фундаментальную группу. □

Теорема 2.3. *Полное гармоническое NTS–многообразие Эйнштейна локально эквивалентно произведению $N^{2n} \times \mathbb{R}$ или канонически конциркулярно многообразию $N^{2n} \times \mathbb{R}$, снабженному косимплектической структурой, где N^{2n} — келерово многообразие, являющееся многообразием Эйнштейна.*

Доказательство. Пусть гармоническое NTS–многообразие является многообразием Эйнштейна с космологической константой ϵ. Тогда, с учетом (2.13), третье фундаментальное тождество (2.10) запишется в виде

$$3C_h^d C_{gcd} - 3C_g^d C_{hcd} - 4C_c^d C_{hgd} = 0.$$

Симметрируя это равенство по индексам h и c, получим

$$C_h^d C_{gcd} + C_g^d C_{hcd} = 0. \tag{2.15}$$

Поскольку (C_h^d) — эрмитова матрица, в каждой точке данного гармонического NTS–многообразия существует A–репер [2], в котором $C_h^d = C_h \delta_h^d$, где $\{C_c\}$ — собственные значения этой матрицы. Тогда равенство (2.15) запишется в виде $C_h \delta_h^d C_{gcd} + C_g \delta_g^d C_{hcd} = 0$. Полученное равенство свернем с объектом C^{cdf}, тогда

$$\begin{aligned}
&C_h \delta_h^d C_{gcd} C^{cdf} + C_g \delta_g^d C_{hcd} C^{cdf} = 0,\\
&C_h C_g \delta_g^f + C_g C_h \delta_h^f = 0,\\
&2C_g C_h = 0.
\end{aligned}$$

А значит, $C_h = 0$. Но, тогда $C_h^d = 0$. Сворачивая это равенство по индексам d и h, получим

$$\sum_{abc} |C_{abc}|^2 = C^{abc} C_{abc} = C_c^c = 0,$$

а значит, $C_{abc} = 0$, т.е. рассматриваемое многообразие является либо косимплектическим многообразием, либо многообразием Кенмоцу.

Поскольку косимплектическое многообразие локально эквивалентно произведению келерова многообразия на вещественную прямую [2], а класс многообразий Кенмоцу совпадает с классом почти контактных метрических многообразий, получаемых из косимплектических многообразий каноническим конциркулярным преобразованием косимплектической структуры [2], получаем требуемые утверждения. □

Рассмотрим η–Эйнштейново гармоническое NTS–многообразие. Тогда его тензор Риччи на пространстве присоединенной G–структуры имеет компоненты:

$$S_{ij} = a g_{ij} + b \delta_i^0 \delta_j^0. \tag{2.16}$$

Получим выражения для a и b. С учетом (2.11), соотношения (2.16) можно записать в виде:

$$\begin{aligned}
&1) \quad -2n\chi^2 = a + b;\\
&2) \quad A_{ac}^{bc} - 3C^{bcd} C_{dca} - 2n\chi^2 \delta_a^b = a\delta_a^b.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Свернем равенство 2) формулы (2.17) по индексам a и b, тогда, с учетом (2.12) получим

$$a = \frac{r}{2n} - (n-1)\chi^2. \tag{2.18}$$

Подставив (2.18) в первое равенство формулы (2.17), получим

$$b = -\frac{r}{2n} - (n+1)\chi^2.$$

Определение 2.4. *Назовем тензор Риччи АС–многообразия Φ–инвариантным, если*

$$\Phi Q = Q\Phi. \tag{2.19}$$

Расписывая равенство (2.19) на пространстве присоединенной G–структуры, получим, что для АС–многообразия с Φ–инвариантным тензором Риччи имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} &1) \quad S_{0a} = S_{0\hat{a}} = S_{a0} = S_{\hat{a}0} = 0; \\ &2) \quad S_{ab} = S_{\hat{a}\hat{b}} = 0. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Справедливо и обратное, то есть если на пространстве присоединенной G–структуры верны соотношения (2.20), то АС–многообразие имеет Φ–инвариантный тензор Риччи. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2.4. *АС–многообразие имеет Φ–инвариантный тензор Риччи тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной G–структуры справедливы равенства:*

$$\begin{aligned} &1) \quad S_{0a} = S_{0\hat{a}} = S_{a0} = S_{\hat{a}0} = 0; \\ &2) \quad S_{ab} = S_{\hat{a}\hat{b}} = 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим гармоническое NTS–многообразие. Из (2.11), определения 2.4 и теоремы 2.4, следует справедливость следующего утверждения.

Теорема 2.5. *Тензор Риччи гармонического NTS–многообразия является Φ–инвариантным.*

3. Тождества тензора Риччи

Напомним, что тензорные компоненты формы римановой связности для гармонического NTS–многообразия на пространстве присоединенной G–структуры имеют вид [8]:

$$\begin{array}{llll} 1)\ \theta^{\hat{a}}_b = C^{abc}\theta_c; & 2)\ \theta^a_{\hat{b}} = C_{abc}\theta^c; & 3)\ \theta^a_0 = -\chi\delta^a_b\theta^b; & 4)\ \theta^{\hat{a}}_0 = -\chi\delta^b_a\theta_b; \\ 5)\ \theta^0_a = \chi\delta^b_a\theta_b; & 6)\ \theta^0_{\hat{a}} = \chi\delta^a_b\theta^b; & 7)\ \theta^0_0 = 0; & 8)\ \theta^i_j + \theta^{\hat{j}}_{\hat{i}} = 0. \end{array} \tag{3.1}$$

Поскольку тензор Риччи является тензором типа (2,0), по Основной теореме тензорного анализа его компоненты на пространстве главного расслоения реперов над рассматриваемым многообразием удовлетворяют соотношениям [2]:

$$dS_{ij} - S_{kj}\theta^k_i - S_{ik}\theta^k_j = S_{ij,k}\theta^k, \tag{3.2}$$

где $\{S_{ij,k}\}$ — система гладких функций, служащая компонентами тензора ∇S.

Расписывая (3.2) на пространстве присоединенной G–структуры, с учетом (3.1), (2.11), (2.3:3) и (2.7) получим:

$$\begin{array}{ll} 1)\ S_{0a,\hat{b}} = S_{a0,\hat{b}} = \chi(A^b_a - 3C^b_a); & 2)\ S_{0\hat{a},b} = S_{\hat{a}0,b} = \chi(A^a_b - 3C^a_b); \\ 3)\ S_{ab,c} = -2(A^d_{(a} - 3C^d_{(a})C_{|d|b)c}; & 4)\ S_{a\hat{b},0} = S_{\hat{b}a,0} = 2\chi(A^b_a - 3C^b_a); \\ 5)\ S_{a\hat{b},c} = S_{\hat{b}a,c} = A^b_{ac} - 3C^b_{ac}; & 6)\ S_{a\hat{b},\hat{c}} = S_{\hat{b}a,\hat{c}} = A^{bc}_a - 3C^{bc}_a; \\ 7)\ S_{\hat{a}\hat{b},\hat{c}} = -2(A^{(a}_d - 3C^{(a}_d)C^{|d|b)c}, & \end{array} \tag{3.3}$$

а остальные компоненты нулевые.

Теорема 3.1. *Тензор Риччи гармонического NTS–многообразия удовлетворяет тождествам:*

1) $\nabla_X S(\xi,\xi)=0;$
2) $\nabla_\xi S(\chi,\xi)=0;$
3) $\nabla_{\Phi X}(S)(\xi,\Phi Y)-\nabla_X(S)(\xi,Y)=0;$
4) $\nabla_\xi(S)(\Phi X,\Phi Y)-\nabla_\xi(S)(X,Y)=0;$
5) $\nabla_{\Phi^2X}(S)(\Phi^2Y,\Phi^2Z)-\nabla_{\Phi^2X}(S)(\Phi Y,\Phi Z)+\nabla_{\Phi X}(S)(\Phi Y,\Phi^2Z)+\nabla_{\Phi X}(S)(\Phi^2Y,\Phi Z)=0.$

Доказательство. Из (3.3) следует, что:

$$1)\ \nabla_X S(\xi,\xi)=0;\qquad 2)\ \nabla_\xi S(\chi,\xi)=0.$$

Применяя процедуру восстановления тождества [1], [2] к равенству $S_{0a,b}=0$, получим

$$\nabla_{\Phi^2X}(S)(\xi,\Phi^2Y)-\nabla_{\Phi X}(S)(\xi,\Phi Y)=0,\qquad \forall X,Y\in\mathcal{X}(M).$$

Последнее тождество можно записать в виде

$$\nabla_{\Phi X}(S)(\xi,\Phi Y)-\nabla_X(S)(\xi,Y)=0,\qquad \forall X,Y\in\mathcal{X}(M).\tag{3.4}$$

Применяя процедуру восстановления тождества к равенству $S_{ab,0}=0$, получим тождество

$$\nabla_\xi(S)(\Phi^2X,\Phi^2Y)-\nabla_\xi(S)(\Phi X,\Phi Y)=0,\qquad \forall X,Y\in\mathcal{X}(M),$$

которое можно записать в виде

$$\nabla_\xi(S)(\Phi X,\Phi Y)-\nabla_\xi(S)(X,Y)=0,\qquad \forall X,Y\in\mathcal{X}(M).\tag{3.5}$$

А применяя процедуру восстановления тождества к равенству $S_{ab,\hat c}=0$, получим тождество

$$\begin{aligned}\nabla_{\Phi^2X}(S)(\Phi^2Y,\Phi^2Z)&-\nabla_{\Phi^2X}(S)(\Phi Y,\Phi Z)\\&+\nabla_{\Phi X}(S)(\Phi Y,\Phi^2Z)+\nabla_{\Phi X}(S)(\Phi^2Y,\Phi Z)=0,\quad \forall X,Y\in\mathcal{X}(M).\end{aligned}\tag{3.6}$$

□

Основные ненулевые компоненты тензора ∇S задаются следующими парами выражений:

$$\begin{aligned}&1)\ S_{0a,\hat b}=\chi(A^b_a-3C^b_a); &&2)\ S_{a\hat b,0}=2\chi(A^b_a-3C^b_a);\\&3)\ S_{ab,c}=-2(A^d_{(a}-3C^d_{(a})C_{|d|b)c}; &&4)\ S_{a\hat b,c}=A^b_{ac}-3C^b_{ac}\end{aligned}\tag{3.7}$$

и им сопряженными. Наибольший интерес представляет исследование геометрического смысла обращение в нуль этих компонент.

Пусть $S_{0a,\hat b}=\chi(A^b_a-3C^b_a)=0$. Тогда либо $\chi=0$, либо $A^b_a-3C^b_a=0$. В первом случае многообразие является точнейше косимплектическим, во втором случае (по теореме 2.4) многообразием Эйнштейна с космологической постоянной $\epsilon=-2n\chi^2$.

Применяя процедуру восстановления тождества [1], [2] к равенству $S_{0a,\hat b}=0$, получим

$$\nabla_{\Phi^2X}(S)(\xi,\Phi^2Y)+\nabla_{\Phi X}(S)(\xi,\Phi Y)=0,\qquad \forall X,Y\in\mathcal{X}(M).$$

Полученное тождество можно записать в виде:

$$\nabla_{\Phi X}(S)(\xi,\Phi Y)+\nabla_X(S)(\xi,Y)=0,\qquad \forall X,Y\in\mathcal{X}(M).\tag{3.8}$$

Поскольку (3.4) выполнено для любого гармонического NTS–многообразия, тождество (3.8) равносильно тождествам:

$$\nabla_{\Phi X}(S)(\xi,\Phi Y)=\nabla_X(S)(\xi,Y)=0,\qquad \forall X,Y\in\mathcal{X}(M).$$

Значит, равенство $S_{0a,\hat b}=0$ равносильно тождеству

$$\nabla_X(S)(\xi,Y)=0,\qquad \forall X,Y\in\mathcal{X}(M)\tag{3.9}$$

Подытожив вышеизложенное, сформулируем следующую теорему.

Теорема 3.2. *Гармоническое NTS–многообразие, тензор Риччи которого удовлетворяет тождеству (3.9), является либо точнейше косимплектическим многообразием, либо многообразием Эйнштейна с космологической постоянной* $\epsilon = -2n\chi^2$.

С учетом теоремы 2.3 теорему 3.2 можно сформулировать следующим образом.

Теорема 3.3. *Гармоническое NTS–многообразие, тензор Риччи которого удовлетворяет тождеству (3.9), локально эквивалентно произведению приближенно келерова многообразия на вещественную прямую или канонически конциркулярно произведению келерова многообразия на вещественную прямую, снабженному косимплектической структурой.*

Пусть $S_{a\hat{b},0} = 2\chi(A^b_a - 3C^b_a) = 0$, т.е. $S_{a\hat{b},0} = 0$. Это равенство равносильно тождеству

$$\nabla_\xi(S)(\Phi^2 X, \Phi^2 Y) + \nabla_\xi(S)(\Phi X, \Phi Y) = 0, \qquad \forall X, Y \in \mathcal{X}(M). \tag{3.10}$$

Из (3.5) и (3.10) получим

$$\nabla_\xi(S)(\Phi X, \Phi Y) = \nabla_\xi(S)(X, Y) = 0, \qquad \forall X, Y \in \mathcal{X}(M). \tag{3.11}$$

Из (3.7) следует, что $2S_{0a,\hat{b}} = S_{a\hat{b},0}$. Таким образом, гармоническое NTS–многообразие, тензор Риччи которого удовлетворяет тождеству (3.9), также удовлетворяет тождеству (3.11), и наоборот.

Теорема 3.4. *Класс гармонических NTS–многообразий, тензор Риччи которых удовлетворяет тождеству (3.9), совпадает с классом гармонических NTS–многообразий, тензор Риччи которых удовлетворяет тождеству (3.11).*

Далее, пусть $S_{ab,c} = -2(A^d_{(a} - 3C^d_{(a})C_{|d|b)c} = 0$. Равенство $S_{ab,c} = 0$, с учетом (3.6), равносильно тождеству

$$\nabla_{\Phi^2 X}(S)(\Phi^2 Y, \Phi^2 Z) - \nabla_{\Phi^2 X}(S)(\Phi Y, \Phi Z) = 0, \qquad \forall X, Y \in \mathcal{X}(M).$$

которое, с учетом (3.5), запишется в виде

$$\nabla_X(S)(\Phi Y, \Phi Z) - \nabla_X(S)(Y, Z) = 0, \qquad \forall X, Y \in \mathcal{X}(M). \tag{3.12}$$

Поскольку

$$(A^d_{(a} - 3C^d_{(a})C_{|d|b)c} = 0. \tag{3.13}$$

Из (2.10) и (3.13) следует

$$2A^d_a C_{bcd} = 3C^d_a C_{bcd} + 3C^d_b C_{acd} + 4C^d_c C_{abd}.$$

Полученное равенство симметрируем по индексам b и c, тогда, в силу свойств симметрии объекта C (2.2), получим

$$C^d_b C_{cad} + C^d_c C_{bad} = 0.$$

С учетом полученного равенства, тождество (3.13) примет вид:

$$A^d_a C_{bcd} = 4C^d_c C_{abd}. \tag{3.14}$$

Альтернируем последнее равенство по индексам a и b, тогда, с учетом свойств симметрии объекта C, получим тождество

$$A^d_{[a} C_{b]cd} = 4C^d_c C_{abd}. \tag{3.15}$$

Из (2.10) и (3.15) имеем

$$C^d_c C_{abd} = 0.$$

Поскольку (C^d_c) — эрмитова матрица, в каждой точке многообразия существует A–репер [2], в котором $C^d_c = C_c \delta^d_c$, где $\{C_c\}$ — собственные значения этой матрицы. Свертывая равенство $C_c C_{abc} = 0$ с объектом C^{abd}, получим $(C_c)^2\delta_c^d = 0$, а значит, $C_c = 0$. Но тогда $C_c^d = 0$. Свертывая это равенство по индексам c и d, получим, что

$$\sum_{abc} |C_{abc}|^2 = C^{abc}C_{abc} = C_c^c = 0,$$

а значит, $C_{abc} = 0$, т.е. многобразие является либо косимплектическим многобразием, либо многобразием Кенмоцу [7].

Аналогично из (3.14) можно показать, что $A_c^c = 0$, а значит, гармоническое NTS–многобразие, тензор Риччи которого удовлетворяет тождеству (3.12), согласно (2.12), является многобразием постоянной скалярной кривизны $r = -2n(n+1)\chi^2$. Так как не существует многобразий Кенмоцу постоянной кривизны, отличной от (-1), а многобразие Кенмоцу является пространством постоянной кривизны (-1) тогда и только тогда, когда оно канонически конциркулярно многобразию $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$, снабженному косимплектической структурой [2]. Хорошо известно, что косимплектическое многобразие локально эквивалентно произведению келерова многобразия на вещественную прямую [2]. Келерова составляющая косимплектического многобразия локально голоморфно изометрично $\mathbb{C}^n$, а значит, косимплектическое многобразие локально эквивалентно произведению $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$.

Подытожив вышеизложенное получаем следующую теорему.

Теорема 3.5. *Гармоническое NTS–многобразие, тензор Риччи которого удовлетворяет тождеству (3.9), локально эквивалентно произведению $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$ или канонически конциркулярно многобразию $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$, снабженному косимплектической структурой.*

Определение 3.1 ([4]). *Тензор Риччи S AC–многобразия называется параллельным, если $\nabla S = 0$; η–параллельным, если $\nabla_X(S)(\Phi Y, \Phi Z) = 0$, $\forall X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$.*

Пусть гармоническое NTS–многобразие имеет параллельный тензор Риччи, т.е. $\nabla S = 0$. Из теорем 3.3 и 3.5 непосредственно следует следующее утверждение.

Теорема 3.6. *Гармоническое NTS–многобразие с параллельным тензором Риччи локально эквивалентно произведению $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$, снабженному косимплектической структурой.*

Далее рассмотрим гармоническое NTS–многобразие с η–параллельным тензором Риччи. На пространстве присоединенной G–структуры условие η–параллельности, т.е. равенство

$$\nabla_X(S)(\Phi Y, \Phi Z) = 0, \qquad \forall X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$$

запишется в виде

$$S_{ij,k}\Phi_r^i\Phi_l^j X^k Y^r Z^l = 0,$$

что равносильно соотношениям:

$$\begin{aligned} &1) \quad S_{ab,c} = -2(A_{(a}^d - 3C_{(a)}^d)C_{|d|b)c};\\ &2) \quad S_{a\hat{b},0} = 2\chi(A_a^b - 3C_a^b);\\ &3) \quad S_{a\hat{b},c} = S_{\hat{b}a,c} = A_{ac}^b - 3C_{ac}^b,\end{aligned} \tag{3.16}$$

т.е. тензор Риччи гармонического NTS–многобразия, с η–параллельным тензором Риччи, является параллельным. А значит, для гармонического NTS–многобразия с η–параллельным тензором Риччи имеет место теорема 3.6.

А. Грей в [5] ввел два класса римановых многобразий, определяемых ковариантной производной тензора Риччи. Класс A состоит из всех римановых многобразий, тензор Риччи S которых является тензором Киллинга, т.е.

$$\nabla_X(S)(Y,Z) + \nabla_Y(S)(X,Z) + \nabla_Z(S)(X,Y) = 0; \qquad \forall X, Y, Z \in \mathcal{X}(M).$$

Второй класс B состоит из всех римановых многообразий, тензор Риччи которых являетсятензором Кодацци, т.е.

$$\nabla_X(S)(Y,Z) = \nabla_Y(S)(X,Z); \qquad \forall X,Y,Z \in \mathcal{X}(M).$$

Определение 3.2 ([10], [6]). *Симметрическое 2–тензорное поле T называется тензором Кодацци, если $dT = 0$, т.е. если T удовлетворяет уравнению Кодацци*

$$\nabla_X(T)(Y,Z) = \nabla_Y(T)(X,Z), \qquad \forall X,Y,Z \in \mathcal{X}(M).$$

Пусть M^{2n+1} — гармоническое NTS–многообразие, тензор Риччи которого является тензором Кодацци. Тогда имеет место равенство

$$\nabla_X(S)(Y,Z) = \nabla_Y(S)(X,Z); \qquad \forall X,Y,Z \in \mathcal{X}(M). \tag{3.17}$$

Равенство (3.17) на пространстве присоединенной G–структуры запишется в виде:

$$S_{ij,k} = S_{kj,i}. \tag{3.18}$$

В частности, из (3.7) и (3.18) имеем: $S_{ab,c} = S_{cb,a}$, т.е.

$$\begin{aligned}
&(A^d_{(a} - 3C^d_{(a)})C_{|d|b)c} = (A^d_{(c} - 3C^d_{(c)})C_{|d|b)a},\\
&A^d_aC_{dbc} + A^d_bC_{dac} - 3C^d_aC_{dbc} - 3C^d_bC_{dac} = A^d_cC_{dba} + A^d_bC_{dca} - 3C^d_cC_{dba} - 3C^d_bC_{dca},\\
&A^d_cC_{abd} - A^d_aC_{cbd} + 2A^d_bC_{acd} = 3C^d_aC_{bcd} + 3C^d_cC_{abd} + 6C^d_bC_{acd}.
\end{aligned}$$

С учетом третьего фундаментального тождества полученное равенство можно записать в виде:

$$\begin{aligned}
&4C^d_bC_{cad} + 2A^d_bC_{acd} = 3C^d_aC_{bcd} + 3C^d_cC_{abd} + 6C^d_bC_acd,\\
&2A^d_bC_{acd} = 3C^d_aC_{bcd} + 3C^d_cC_{abd} + 10C^d_bC_{acd}.
\end{aligned}$$

Альтернируя последнее равенство по индексам a и b, с учетом третьего фундаментального тождества и свойств объекта C^{abc}, получим

$$C^d_cC_{abd} = 7C^d_{[b}C_{a]cd}. \tag{3.19}$$

Рассуждая также как и при доказательстве теорем 3.3 и 3.5, из равенства (3.19) получаем, что $C_{abc} = 0$, т.е. многообразие является либо косимплектическим многообразием, либо многообразием Кенмоцу.

Также из (3.7) и (3.18) имеем, что $S_{\hat{b}a,0} = S_{0a,\hat{b}}$, т.е.

$$\begin{aligned}
&2\chi(A^b_a - 3C^b_a) = \chi(A^b_a - 3C^b_a),\\
&\chi(A^b_a - 3C^b_a) = 0.
\end{aligned}$$

Проведя рассуждения, аналогичные рассуждениям при доказательство теоремы 3.5, получаем следующее утверждение.

Теорема 3.7. *Гармоническое NTS–многообразие, тензор Риччи которого является тензором Кодацци, локально эквивалентно произведению $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$ или канонически конциркулярно многообразию $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$, снабженному косимплектической структурой.*

Определение 3.3 ([10], [6]). *Симметрическое 2–тензорное поле T называется тензором Киллинга, если*

$$\nabla_X(T)(Y,Z) + \nabla_Y(T)(X,Z) + \nabla_Z(T)(X,Y) = 0; \qquad \forall X,Y,Z \in \mathcal{X}(M).$$

Пусть теперь M^{2n+1} — гармоническое NTS–многообразие, тензор Риччи которого является тензором Киллинга. Тогда имеет место равенство

$$\nabla_X(S)(Y,Z) + \nabla_Y(S)(X,Z) + \nabla_Z(S)(X,Y) = 0; \qquad \forall X,Y,Z \in \mathcal{X}(M).$$

Последнее равенство на пространстве присоединенной G–структуры запишется в виде:

$$S_{ij,k} + S_{jk,i} + S_{ki,j} = 0. \tag{3.20}$$

В частности, из (3.7) и (3.20) следует, что

$$\begin{aligned}&S_{0a,\hat{b}} + S_{a\hat{b},0} + S_{\hat{b}0,a} = 0,\\ &\chi(A^b_a - 3C^b_a) + 2\chi(A^b_a - 3C^b_a) + \chi(A^b_a - 3C^b_a) = 0,\\ &\chi(A^b_a - 3C^b_a) = 0.\end{aligned}$$

Рассуждая так же как при доказательстве теоремы 3.5, используя третье фундаментальное тождество, получаем следующую теорему.

Теорема 3.8. *Гармоническое NTS–многообразие, тензор Риччи которого является тензором Киллинга, локально эквивалентно произведению $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$ или канонически конциркулярно многообразию $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$, снабженному косимплектической структурой.*

Замечание 3.1. *Теоремы 3.6, 3.7, 3.8 обратимы.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. В.Ф. Кириченко, А.Р. Рустанов. *Дифференциальная геометрия квази–сасакиевых многообразий* // Матем. сб. **193**:8, 71–100 (2002).
2. В.Ф. Кириченко. *Дифференциально–геометрические структуры на многообразиях.* Одесса: Печатный Дом. 2013.
3. Ш. Кобаяши, К. Номидзу. *Основы дифференциальной геометрии.* М.: Наука. 1981.
4. C. Călin. *Kenmotsu manifolds with η–parallel Ricci tensor* // Bull. Soc. Math. Banja Luka **10**, 10–15 (2003).
5. A. Gray. *Einstein–like manifolds which are not Einstein* // Geom. Dedicata **7**, 259–280 (1978).
6. J. Mikeš, L. Rýparová, S. Stepanov, I. Tsyganok. *On the geometry in the large of Einstein–like manifolds* // Mathematics **10**:13, 2208 (2022).
7. A.R. Rustanov. *Geometry of harmonic nearly Trans–Sasakian manifolds* // Axioms **12**:8, 744 (2023).
8. A.R. Rustanov, S.V. Kharitonova. *Nearly trans–Sasakian manifolds of constant holomorphic sectional curvature* // J. Geom. Phys. **199**, 105144 (2024).
9. A.R. Rustanov, S.V. Kharitonova. *Integrability of Nearly trans–sasakian manifolds* // J. Geom. Phys. **203**, 105268 (2024).
10. S.E. Stepanov, I.I. Tsyganok, J. Mikeš. *Complete Riemannian manifolds with Killing – Ricci and Codazzi – Ricci tensors* // Differ. Geom. Mnogoobr. Figur **53**, 112–117 (2022).

Алигаджи Рабаданович Рустанов,
Институт цифровых технологий и моделирования в строительстве НИУ МГСУ,
Ярославское ш., 26,
450008, г. Москва, Россия
E-mail: aligadzhi@yandex.ru

Светлана Владимировна Харитонова,
Оренбургский государственный университет,
пр. Победы 13,
460000, г. Оренбург, Россия
E-mail: hcb@yandex.ru