ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 18 № 2 (2026). С. 79-92.

УДК 517.98

КРИТЕРИЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ КРАТНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ В ПРООБРАЗЕ ОПЕРАТОРА СВЕРТКИ

В.В. НАПАЛКОВ (МЛ.), А.А. НУЯТОВ

Аннотация. В работе найден критерий разрешимости задачи кратной интерполяции в прообразе оператора свертки и, как следствие, критерий разрешимости задачи Абеля — Гончарова в том же пространстве. В случае когда в качестве прообраза берется ядро оператора, будет иметь место единственность решения указанных задач при условии, что множество узлов интерполяции будет множеством единственности в ядре оператора свертки.

Ключевые слова: кратная интерполяция, задача Абеля — Гончарова, оператор свертки, целые функции.

Mathematics Subject Classification: 46A13, 30D20

1. Введение

Пусть $H(\mathbb{C})$ — пространство целых функций с топологией равномерной сходимости на компактах; сопряженное к пространству $H(\mathbb{C})$ обозначим через $H^*(\mathbb{C})$, кроме того, введем обозначение

$$P_{\mathbb{C}} = \{f(z) \in H(\mathbb{C}) : \exists c_1, c_2 > 0, |f(z)| \leqslant c_1 e^{c_2|z|}\}.$$

Функции $\varphi(z) \in P_{\mathbb{C}}$ поставим в соответствие функционал $F \in H^*(\mathbb{C})$ такой, что $\widehat{F}(z) = \varphi(z)$, где $\widehat{F}(z) = \langle F_\lambda, e^{\lambda z}\rangle$ — преобразование Лапласа функционала F.

Оператор свертки, действующий из $H(\mathbb{C})$ в $H(\mathbb{C})$, с характеристической функцией $\varphi(z) \in P_{\mathbb{C}}$ запишем в виде

$$M_\varphi[f](z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C f(z+t)\gamma(t)dt, \tag{1.1}$$

где C — замкнутый контур, $\gamma(t)$ — функция аналитическая на C и вне C, $\gamma(\infty) = 0$.

Возьмем произвольно и зафиксируем функцию $g_0(z) \in H(\mathbb{C})$. Рассмотрим сверточное уравнение

$$M_\varphi[f](z) = g_0(z),$$

обозначим $\operatorname{Im}^{-1} M_\varphi[f]$ — прообраз оператора свертки. В случае, когда $g_0(z) \equiv 0$, прообраз оператора свертки становится ядром $\operatorname{Ker} M_\varphi[f]$.

Для произвольной функции $\psi(z) \in H(\mathbb{C})$ построим в $H(\mathbb{C})$ идеал

$$(\psi) = \{\psi(z) \cdot R(z) : \ R(z) \in H(\mathbb{C})\}.$$

Определение 1.1. *Равенства*

$$H(\mathbb{C}) = (\psi) + \operatorname{Im}^{-1} M_\varphi, \tag{1.2}$$

$$H(\mathbb{C}) = (\psi) \oplus \operatorname{Im}^{-1} M_\varphi, \tag{1.3}$$

V.V. Napalkov, A.A. Nuyatov, Solvability criterion for multiple interpolation problem in preimage of convolution operator.

Исследование Напалкова В.В. (мл.) выполнено при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках выполнения государственного задания (код научной темы FMRS-2025-0010).

Поступила 30 ноября 2025 г.

будем называть представление и разложение Фишера для прообраза M_φ в $H(\mathbb{C})$ соответственно.

Если имеет место (1.2), то любую целую функцию можно представить, вообще говоря, не единственным образом в виде

$$f(z) = h(z) + g(z), \qquad g(z) \in \operatorname{Im}^{-1} M_\varphi, \qquad h(z) \in (\psi).$$

Приведем пример, когда характеристическая функция $\varphi(z)$ оператора M_φ будет полиномом $P(z) = z^2 + 1$, тогда оператор свертки станет дифференциальным оператором с постоянными коэффициентами

$$P\left(\frac{d}{dz}\right) = \frac{d^2}{d\,z^2} + 1,$$

и в качестве функции из идеала возьмем полином $Q(z) = z + 1$.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 f(z)}{d\,z^2} + f(z) = e^z,$$

функцией из прообраза будет

$$f(z) = c_1 e^{i\,z} + c_2 e^{-i\,z} + \frac{1}{2} e^z.$$

Тогда представление Фишера будет иметь вид:

$$H(\mathbb{C}) = (Q) + c_1 e^{i\,z} + c_2 e^{-i\,z} + \frac{1}{2} e^z.$$

Это значит, что для любой $f(z) \in H(\mathbb{C})$:

$$\frac{f(z) - (c_1 e^{i\,z} + c_2 e^{-i\,z} + \frac{1}{2} e^z)}{z + 1} \in H(\mathbb{C}),$$

из этого следует, что в нуле многочлена $z + 1$ будет равенство:

$$f(-1) = c_1 e^{-i} + c_2 e^{i} + \frac{1}{2} e^{-1},$$

т.е. функция $f(z)$ будет определена, но не единственным образом.

Если же имеет место (1.3), то такое представление целой функции будет единственным.

Задачу кратной интерполяции в $\operatorname{Im}^{-1} M_\varphi$ с узлами $\mu_j \in \mathbb{C}$, являющимися нулями $\psi \in H(\mathbb{C})$, с кратностями q_j, $j = 0, 1, 2, \ldots$, поставим следующим образом: для произвольной последовательности комплексных чисел a_j^k, $j = 0, 1, 2, \ldots;$, $k = 0, 1, \ldots, q_k - 1$ существует ли функция $y \in \operatorname{Im}^{-1} M_\varphi$ такая, что

$$y^{(k)}(\mu_j) = a_j^k, \quad j = 0, 1, 2, \ldots; \quad k = 0, 1, \ldots, q_k - 1.$$

Лемма 1.1. *Разрешимость задачи кратной интерполяции эквивалентна тому, что имеет место представление Фишера*

$$H(\mathbb{C}) = (\psi) + \operatorname{Im}^{-1} M_\varphi.$$

Доказательство. 1. Пусть имеет место представление Фишера (1.2). Из теоремы Миттаг — Леффлера и теоремы Вейерштрасса о существовании целых функций с заданными нулями следует, что существует функция $h(z) \in H(\mathbb{C})$ такая, что $h^{(k)}(\mu_j) = a_j^k$, $j = 0, 1, 2, \ldots;$ $k = 0, 1, \ldots, q_k - 1$. В силу (1.2)

$$h(z) = y(z) + \psi(z) \cdot g(z), \qquad y(z) \in \operatorname{Im}^{-1} M_\varphi, \quad g(z) \in H(\mathbb{C}),$$

из которого следует равенство $y^{(k)}(\mu_j) = a_j^k$, $j = 0, 1, 2, \ldots;$ $k = 0, 1, \ldots, q_k - 1$. Заметим, что если выполняется (1.3), то функция $y(z)$ единственна.

2. Пусть разрешима задача кратной интерполяции. То, что имеет место представление Фишера можно записать иначе, а именно, для любой функции $h(z) \in H(\mathbb{C})$ существует функция $y(z) \in \operatorname{Im}^{-1} M_\varphi$ такая, что

$$\frac{h(z) - y(z)}{\psi(z)} \in H(\mathbb{C}).$$

Последнее будет выполнено, если $h(z) - y(z)$ будет обращаться в ноль в нулях функции $\psi(z)$ (в противном случае функция $\dfrac{h(z) - y(z)}{\psi(z)}$ будет мероморфной).

Поскольку по условию задача кратной интерполяции разрешима в прообразе оператора свертки, и существует функция $h(z) \in H(\mathbb{C})$ такая, что $h^{(k)}(\mu_j) = a_j^k$, $j = 0, 1, 2, \ldots$; $k = 0, 1, \ldots, q_k - 1$, то

$$h^{(k)}(\mu_j) = a_j^k = y^{(k)}(\mu_j), \quad j = 0, 1, 2, \ldots; \quad k = 0, 1, \ldots, q_k - 1,$$

где μ_j, $j = 0, 1, 2, \ldots$ — нули функции $\psi(z)$. Таким образом имеет место представление Фишера (1.2). Заметим, что если задача кратной интерполяции в прообразе оператора свертки имеет единственное решение, то имеет место (1.3). $\square$

Частным случаем рассматриваемой задачи является:

$$y^{(k)}(\mu_j) = a_j^k, \quad j = 0, 1, 2, \ldots; \quad k = \overline{0, j}.$$

Значит, в прообразе оператора свёртки будет существовать функция $y(z)$, у которой для последовательности комплексных чисел a_0^0, a_1^1, ..., a_n^n, ... будет выполнено

$$y^{(k)}(\mu_k) = a_k^k.$$

Тем самым получаем задачу Абеля — Гончарова (см. [4]) в прообразе оператора свертки.

В случае, когда характеристической функцией оператора свёртки является многочлен, оператор свёртки становится линейным дифференциальным оператором конечного порядка с постоянными коэффициентами, а значит, важным частным следствием получаем, что для однородного линейного дифференциального уравнения конечного порядка с постоянными коэффициентами решается задача кратной интерполяции и задача Абеля — Гончарова. Кроме того, дифференциально-разностный оператор, интегро-дифференциальный оператор, линейный дифференциальный оператор бесконечного порядка с постоянными коэффициентами также являются частным случаем оператора свёртки, и для соответствующих однородных уравнений как следствие решены эти задачи.

В работе [9] задача интерполяции решена для случая, когда узлы простые и лежат на вещественной оси. В работе [10] решена задача интерполяции в ядре оператора свертки, когда узлы могут быть комплексные. В работе [11] решена задача кратной интерполяции в ядре оператора свертки. Цель данной работы: найти условия, при которых будет разрешима задача кратной интерполяции в прообразе оператора свертки.

2. Предварительные результаты

Наряду с оператором $M_\varphi[f](z)$ введем линейный и непрерывный в топологии пространства $H(\mathbb{C})$ оператор

$$M_\varphi[\psi(z) \cdot y(z)] + g_0(z) : \ H(\mathbb{C}) \to H(\mathbb{C}), \tag{2.1}$$

как и выше, $g_0(z)$ — функция из образа оператора $M_\varphi[f](z)$.

Теорема 2.1. *Имеет место представление Фишера в $H(\mathbb{C})$ тогда и только тогда, когда оператор (2.1) сюръективен.*

Доказательство. 1. Пусть выполнено равенство (1.2) и $g(z) \in H(\mathbb{C})$. Поскольку оператор свертки (1.1) является сюръективным (см. [6]), то для $g(z)$ существует $f(z) \in H(\mathbb{C}) : M_\varphi[f] = g(z)$. Согласно (1.2) функцию $f(z)$ можно представить в виде

$$f(z) = \psi(z) \cdot h(z) + u(z), \, h(z) \in H(\mathbb{C}), \, u(z) \in \operatorname{Im}^{-1} M_\varphi,$$

поэтому

$$M_\varphi[f] = M_\varphi[\psi(z) \cdot h(z)] + M_\varphi[u(z)] = M_\varphi[\psi(z) \cdot h(z)] + g_0(z) = g(z),$$

получаем, что оператор $M_\varphi[\psi(z) \cdot h(z)] + g_0(z)$ является сюръективным.

2. Пусть оператор (2.1) сюръективен. Требуется доказать равенство (1.2). Поскольку оператор (2.1) и оператор свертки сюръективны, то для произвольной $f(z) \in H(\mathbb{C})$ существуют функции $w_1(z) \in \operatorname{Im}^{-1} M_\varphi, y_1(z) \in H(\mathbb{C})$, удовлетворяющие равенству

$$M_\varphi[f(z)] = M_\varphi[\psi(z) \cdot y_1(z)] + g_0(z) = M_\varphi[\psi(z) \cdot y_1(z)] + M_\varphi[w_1(z)],$$

поэтому

$$f(z) = w_1(z) + \psi(z) \cdot y_1(z),$$

тем самым доказано, что имеет место представление Фишера (1.2). □

Обозначим через N_φ и N_ψ — нулевые множества функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$. Сформулируем условия инъективности оператора $M_\varphi[\psi\,\cdot] + g_0(z)$.

Теорема 2.2. *Если выполнены два условия:*

1. $\exists\, h_0(z) \in H(\mathbb{C}) : h_0(z) \in (\psi) \bigcap \{f \in H(\mathbb{C}) : M_\varphi[f] = g_0\}$;
2. N_ψ *— множество единственности в* $\operatorname{Ker} M_\varphi$,

то оператор $M_\varphi[\psi\,\cdot] + g_0(z)$ *будет инъективным.*

Доказательство. Согласно пункту 1, $\exists \hat{h}_0 \in H(\mathbb{C}) : h_0(z) = \hat{h}_0(z) \cdot \psi(z)$, при этом

$$M_\varphi[\psi \cdot f] + g_0(z) = M_\varphi[\psi \cdot f] + M_\varphi[h_0] = M_\varphi[\psi(f + \hat{h}_0)].$$

Рассмотрим уравнение

$$M_\varphi[\psi(z)(f(z) + \hat{h}_0(z))] = 0,$$

функция $u(z) = \psi(z)(f(z)+\hat{h}_0(z))$ обращается в нуль в точках множества N_ψ, которое по условию является множеством единственности в $\operatorname{Ker} M_\varphi$, поэтому $u(z) \equiv 0$, поскольку для линейного оператора инъективность эквивалентна тривиальности его ядра, то оператор $M_\varphi[\psi(z)\,\cdot] + g_0(z)$ будет инъективный. □

Следствие 2.1. *Если* N_ψ *— множество единственности в* $\operatorname{Ker} M_\varphi$*, то оператор* $M_\varphi[\psi\,\cdot]$ *будет инъективным.*

По теореме 2.1 сюръективность оператора $M_\varphi[\psi\,\cdot]+g_0(z)$ эквивалентна представлению Фишера

$$H(\mathbb{C}) = (\psi) + \operatorname{Im}^{-1} M_\varphi.$$

Очевидно, что для существования разложения Фишера должна быть еще инъективность оператора $M_\varphi[\psi\,\cdot] + g_0(z)$, при этом инъективность этого оператора эквивалентна тому, что

$$(\psi) \cap \{f \in H(\mathbb{C}) : M_\varphi[f] = g_0\} = \{0\},$$

(поскольку прямая сумма двух линейных подпространств возможна только в случае, когда подпространства пересекаются в нуле) поэтому по теореме 2.2, вообще говоря, разложение Фишера не существует, но будет существовать представление Фишера, т.е. задача интерполяции в прообразе оператора свертки разрешима, но не единственным образом. Заметим, что по следствию 2.1 в случае, когда N_ψ — множество единственности в $\operatorname{Ker} M_\varphi$, существует разложение

$$H(\mathbb{C}) = (\psi) \oplus \operatorname{Ker} M_\varphi.$$

3. Оператор свертки в пространстве $P_\mathbb{C}$

Согласно результатам статей [15], [19] функция $\psi \in H(\mathbb{C})$ порождает в пространстве $P_\mathbb{C}$ сюръективный оператор свертки $M_\psi : P_\mathbb{C} \to P_\mathbb{C}$

$$M_\psi[f](z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \psi(t)\gamma(t)e^{zt}dt, \tag{3.1}$$

где $\gamma(t)$ — функция, ассоциированная по Борелю с $f(z)$, C - замкнутый контур, охватывающий все особые точки $\gamma(t)$.

Выберем произвольно и зафиксируем функцию $G_0(z) \in P_\mathbb{C}$, и рассмотрим уравнение

$$M_\psi[f] = G_0(z).$$

Пусть $(\varphi) = \{\varphi(z)\cdot G(z) : G(z) \in P_{\mathbb{C}}\}$ — идеал в пространстве $P_{\mathbb{C}}$, $\operatorname{Im}^{-1} M_{\psi}[f]$ — прообраз оператора (3.1).

Определение 3.1. *Равенства*

$$P_{\mathbb{C}} = (\varphi) + \operatorname{Im}^{-1} M_{\psi},$$
$$P_{\mathbb{C}} = (\varphi) \oplus \operatorname{Im}^{-1} M_{\psi},$$

будем называть представление и разложение Фишера для прообраза M_{ψ} в $P_{\mathbb{C}}$ соответственно.

Введем в рассмотрение линейный и непрерывный оператор

$$M_{\psi}[\varphi(z)\cdot y(z)] + G_0(z) :\ P_{\mathbb{C}} \to P_{\mathbb{C}}. \tag{3.2}$$

Сформулируем аналог теоремы 2.1 для оператора (3.2).

Теорема 3.1. *Имеет место представление Фишера в $P_{\mathbb{C}}$ тогда и только тогда, когда оператор (3.2) сюръективен.*

Доказательство теоремы 3.1 аналогично доказательству теоремы 2.1, поскольку для любой $g(z) \in P_{\mathbb{C}}$ существует $f(z) \in P_{\mathbb{C}} : M_{\psi}[f](z) = g(z)$.

Теорема 3.2. *Если выполнены два условия:*

1. $\exists\, h_0(z) \in P_{\mathbb{C}} : h_0(z) \in (\varphi) \bigcap \{f \in P_{\mathbb{C}} : M_{\psi}[f] = G_0\}$;
2. N_{φ} *— множество единственности в* $\operatorname{Ker} M_{\psi}$,

то оператор $M_{\psi}[\varphi\cdot] + G_0(z)$ будет инъективным.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.2.

Следствие 3.1. *Если N_{φ} — множество единственности в $\operatorname{Ker} M_{\psi}$, то оператор $M_{\psi}[\varphi\cdot]$ будет инъективным.*

По аналогии с пространством $H(\mathbb{C})$, вообще говоря, единственности в задаче интерполяции в прообразе оператора M_{ψ} не будет, но при определенных условиях будет существовать разложение

$$P_{\mathbb{C}} = (\varphi) \oplus \operatorname{Ker} M_{\psi}.$$

Перепишем оператор (2.1) в виде:

$$M_{\varphi}[\psi\cdot f + f_0],$$

здесь ψ и f_0 — фиксированные целые функции, а f «пробегает» все пространство $H(\mathbb{C})$. Поскольку оператор $M_{\varphi}[\psi\cdot f + f_0]$ линейно и непрерывно отображает $H(\mathbb{C})$ в $H(\mathbb{C})$, тогда сопряженный оператор $M^*_{\varphi}[\psi\cdot f + f_0]$ линейно и непрерывно отображает пространство $H^*(\mathbb{C})$ в $H^*(\mathbb{C})$. Так как пространства $H^*(\mathbb{C})$ и $P_{\mathbb{C}}$ топологически изоморфны (см. [6]), то оператор $M^*_{\varphi}[\psi\cdot f + f_0]$ порождает линейный и непрерывный оператор, действующий из $P_{\mathbb{C}}$ в $P_{\mathbb{C}}$ по правилу: если $G(z) \in P_{\mathbb{C}}$, то

$$\widehat{M^*_{\varphi}}[G] = M_{\psi}[\varphi\cdot G], \tag{3.3}$$

где M_{ψ} — оператор вида (3.1). Поскольку пространство $H(\mathbb{C})$ является пространством Фреше, применяя результат работы [3] (или [1, теорема 1.2, стр. 81]), получаем, что справедлива следующая теорема.

Теорема 3.3. *Справедливы утверждения:*

1. $\operatorname{Im}(M_{\varphi}[\psi\,\cdot\,] + g_0)$ *замкнут в* $H(\mathbb{C})$ *тогда и только тогда, когда* $\operatorname{Im} M_{\psi}[\varphi\cdot]$ *замкнут в* $P_{\mathbb{C}}$;
2. $\operatorname{Im}(M_{\varphi}[\psi\,\cdot\,] + g_0)$ *является всюду плотным в* $H(\mathbb{C})$ *тогда и только тогда, когда* $M_{\psi}[\varphi\cdot]$ *является инъективным;*
3. $M_{\varphi}[\psi\,\cdot\,] + g_0$ *является инъективным тогда и только тогда, когда* $\operatorname{Im} M_{\psi}[\varphi\,\cdot\,]$ *является всюду плотным в* $P_{\mathbb{C}}$.

Из теорем 2.1, 3.1 и 3.3 получаем

Следствие 3.2.

$$H(\mathbb{C}) = (\psi) \oplus \operatorname{Ker} M_{\varphi} \Leftrightarrow P_{\mathbb{C}} = (\varphi) \oplus \operatorname{Ker} M_{\psi},$$

где $\operatorname{Ker} M_{\psi}$ — ядро оператора (3.1).

4. Достаточные множества

Топология $\tau_{\mathbb{C}}$ пространства $P_{\mathbb{C}}$ определяется, как индуктивный предел нормированных весовых пространств

$$B_n = \{\varphi(\lambda) \in P_{\mathbb{C}} : \|\varphi\|_n = \sup_{\lambda\in\mathbb{C}} |\varphi(\lambda)| e^{-n|\lambda|} < \infty\}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Пусть $S \subset \mathbb{C}$ — множество единственности в $P_{\mathbb{C}}$. Тогда в $P_{\mathbb{C}}$ можно ввести топологию τ_S индуктивного предела пространств

$$B_{n,S} = \{\varphi(\lambda) \in P_{\mathbb{C}} : \|\varphi\|_{n,S} = \sup_{\lambda\in S} |\varphi(\lambda)| e^{-n|\lambda|} < \infty\}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Для дальнейшего нам понадобится сходимость к нулю в топологии $\tau_{\mathbb{C}}$ (см. [12]): пусть f_m — счетная последовательность функций из $P_{\mathbb{C}}$, тогда $f_m \to 0$ при $m \to \infty$ в топологии $\tau_{\mathbb{C}}$ тогда и только тогда, когда найдутся числа $\sigma > 0$ и $M > 0$ такие, что

(a.1) $|f_m(z)| \leqslant Me^{\sigma|z|}$, $\forall m \in \mathbb{N}$, $\forall z \in \mathbb{C}$;

(b.1) для любого компакта $K_{\mathbb{C}} \subset \mathbb{C}$: $|f_m(z)| \rightrightarrows 0$ при $m \to \infty$, $z \in K_{\mathbb{C}}$.

Введем понятие достаточности множества $S \subset \mathbb{C}$ в $U \subset P_{\mathbb{C}}$ с индуцированной из $P_{\mathbb{C}}$ топологией.

Определение 4.1. *Будем говорить, что S — достаточное множество на U, если из условий*

(a.2) *для любой последовательности функций $q_k(z) \in U$ найдутся числа $\sigma > 0$ и $M > 0$ такие, что $|q_k(z)| \leqslant Me^{\sigma|z|}$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall z \in S$;*

(b.2) *для любого компакта $K_S \subset S:$ $|q_k(z)| \rightrightarrows 0$ при $k \to \infty$, $z \in K_S$;*

следует сходимость этой последовательности на U.

Условия (a.2) и (b.2) задают сходимость к нулю в топологии τ_S.
В работе [9, теорема 6, с. 81] доказана

Теорема 4.1. *Если N_φ — достаточное множество в $\operatorname{Ker} M_\psi$, то оператор $M_\psi[\varphi\,\cdot\,]$ будет инъективным и $\operatorname{Im} M_\psi[\varphi\,\cdot\,]$ замкнут в $P_{\mathbb{C}}$.*

Поскольку два условия: $M_\psi[\varphi\,\cdot\,]$ будет инъективным и $\operatorname{Im} M_\psi[\varphi\,\cdot\,]$ замкнут в $P_{\mathbb{C}}$ согласно теореме 3.3 эквивалентны тому, что оператор $M_\varphi[\psi\,\cdot\,] + g_0$ будет сюръективным, то получается, что верна

Теорема 4.2. *Пусть $\varphi(z) \in P_{\mathbb{C}}, \psi(z) \in H(\mathbb{C})$. Если N_φ — достаточное множество в $\operatorname{Ker} M_\psi$, то имеет место представление Фишера*

$$H(\mathbb{C}) = (\psi) + \operatorname{Im}^{-1} M_\varphi.$$

Кроме того, если N_ψ — множество единственности в $\operatorname{Ker} M_\varphi$, то существует разложение Фишера

$$H(\mathbb{C}) = (\psi) \oplus \operatorname{Ker} M_\varphi.$$

Пусть $N_\varphi = \{\lambda_k\}_{k=1}^{+\infty}$ — нулевое множество функции $\varphi \in P_{\mathbb{C}}$, каждый нуль повторяется столько раз какова его кратность (для того чтобы не было громоздких обозначений в дальнейшем под $\lambda_{\tilde{k}}$, $\tilde{k} = 1, 2\ldots$ будем понимать некоторую подпоследовательность последовательности $\{\lambda_k\}_{k=1}^{+\infty}$); $N_\psi = \{\mu_k\}_{k=1}^{+\infty}$ — множество нулей функции $\psi \in H(\mathbb{C})$, каждый нуль повторяется столько раз какова его кратность; через q_j обозначим кратность нуля μ_j; $\tilde{N}_\psi$ — бесконечное множество, которое состоит из всех различных нулей функции $\psi \in H(\mathbb{C})$.

Теорема 4.3 ([11]). *Пусть для некоторого фиксированного $\alpha \in [0, +\infty)$ существует число $\beta \in [0, +\infty)$ такое, что $\alpha \cdot \beta < 1$, при этом выполнены условия:*

(a) $N_\varphi \subset D_\alpha = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| \leqslant \alpha \operatorname{Re} z\}$ *и существует подпоследовательность $\lambda_{\tilde{k}}$ такая, что*

$$\operatorname{Re}(\lambda_{\tilde{k}}) < \operatorname{Re}(\lambda_{\tilde{k}+1}), \qquad \tilde{k} \in \mathbb{N}.$$

(b) $N_\psi \subset D_\beta = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| \leqslant \beta \operatorname{Re} z\}$, *при этом для элементов множества* $\tilde{N}_\psi$ *выполнено:*

$$\operatorname{Re}(\mu_k) < \frac{1-\alpha\beta}{1+\alpha\beta} \operatorname{Re}(\mu_{k+1}), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Тогда множество N_φ *является достаточным в* $\operatorname{Ker} M_\psi$.

В работе [5, с. 142] приводится пример, который показывает, что существуют такие операторы свертки из рассматриваемого класса, что проблема интерполяции функциями из ядра оператора свертки с произвольными комплексными узлами интерполяции μ_j, $j = 1, 2, \ldots$, вообще говоря, неразрешима. Пусть множество узлов интерполяции содержит точки $\mu_1 \in \mathbb{R}$, $\mu_2 = \mu_1 + i \in \mathbb{C}$, а $\varphi(z) = 1 - e^{iz}$. Тогда проблема простой интерполяции целыми функциями из $\operatorname{Ker} M_\varphi = \{f \in H(\mathbb{C}) : f(z) = f(z+i)\}$ неразрешима.

В этом примере $\lambda_n = 2\pi n \in \mathbb{R}$. Все функции из ядра $\operatorname{Ker} M_\varphi$ являются периодическим с периодом i, поэтому нет возможности задавать произвольные интерполяционные данные в узлах $\mu_1 \in \mathbb{R}$, $\mu_2 = \mu_1 + i \in \mathbb{C}$.

5. Основной результат

Пусть $N_\varphi = \{\lambda_k\}_{k=1}^{s\leqslant\infty}$ — нулевое множество функции $\varphi \in P_{\mathbb{C}}$, $N_\psi = \{\mu_k\}_{k=1}^{m\leqslant\infty}$ — множество нулей функции $\psi(z) \in H(\mathbb{C})$, каждый ноль повторяется с учетом его кратности. Используя результат [15], [19], отметим, что $\operatorname{Ker} M_\psi$ состоит из квазиполиномов с показателями из множества N_ψ, т.е. для любого $r(z) \in \operatorname{Ker} M_\psi$ можно записать

$$r(z) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{q_i-1} C_{ij} z^j e^{\mu_i \cdot z}, \tag{5.1}$$

где q_i — кратность нуля μ_i, все коэффициенты C_{ij}, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{0, q_i - 1}$ отличны от нуля.

Замечание 5.1. *Важно, что в равенстве (5.1) участвуют только те мономы, у которых показатели* $\mu_i \in N_\psi$, $i = \overline{1,n}$ *принадлежат сопряженной диаграмме* $r(z)$.

Расставим μ_i, $i = \overline{1,n}$ в порядке возрастания модулей, поскольку слагаемых в (5.1) конечное число, тогда

$$|\mu_i| \leqslant C_\mu, \quad \exists C_\mu > 0, \quad i = \overline{1,n}.$$

Теорема 5.1. *Пусть конечный набор комплексных чисел* $\widetilde{N}_\psi = \{\mu_i\}_{i=1}^n$ *— это множество нулей* $\psi(z)$, *которые попали в сопряженную диаграмму функции* $r(z) \in \operatorname{Ker} M_\psi[\varphi\cdot]$, *т.е.*

$$r(z) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{q_i-1} C_{ij} z^j e^{\mu_i \cdot z}.$$

Для того чтобы множество N_φ *было достаточным множеством в* $\operatorname{Ker} M_\psi[\varphi\cdot]$ *необходимо и достаточно, чтобы существовали элементы множества* N_φ *в количестве* $Q = \sum\limits_{i=1}^{n} q_i$ *для которых*

$$D_{\mu\lambda} = \det\left(\lambda_p^j e^{\mu_i \lambda_p}\right) \neq 0, \quad i = \overline{1,n}, \quad j = \overline{0, q_i - 1}, \quad p = 1, \ldots, Q.$$

Доказательство. 1. Пусть $D_{\mu\lambda} \neq 0$.

Возьмем последовательность из пространства $\operatorname{Ker} M_\psi$

$$r_m(z) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{q_i-1} C_{ij}(m) z^j e^{\mu_i \cdot z}, \quad m = 1, 2, \ldots.$$

Согласно условию теоремы существует Q элементов множества N_φ таких, что

$$D_{\mu\lambda} = \det\left(\lambda_p^j e^{\mu_i \lambda_p}\right) \neq 0, \quad i = \overline{1,n}, \quad j = \overline{0, q_i - 1}, \quad p = \overline{1,Q},$$

тогда коэффициенты $C_{ij}(m)$ являются решениями системы

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{q_i-1} C_{ij}(m)\lambda_p^j e^{\mu_i\cdot\lambda_p} = r_m(\lambda_p), \quad p=\overline{1,Q},$$

и по правилу Крамера выражаются по формулам

$$C_{ij}(m) = \frac{\Delta_{l(j,i)}}{D_{\mu\lambda}},$$

где $\Delta_{l(j,i)}$ — определитель матрицы, полученной из матрицы $A = \left(\lambda_p^j e^{\mu_i\lambda_p}\right)$ заменой $l(j,i)$-того столбца столбцом свободных членов, при этом

$$\Delta_{l(j,i)} = \sum_{p=1}^{Q}(-1)^{l(j,i)+p}\det A_{l(j,i),p} r_m(\lambda_p).$$

Расставим λ_p, $p=\overline{1,Q}$ в порядке возрастания модулей, тогда

$$|\lambda_p| \leqslant C_\lambda, \quad \exists C_\lambda > 0, \quad p=\overline{1,Q}.$$

Покажем, что все коэффициенты $C_{ij}(m)$, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{0,q_i-1}$ ограничены. Проведем оценки на определители $\Delta_{l(j,i)}$, для этого с помощью (a.2) оценим $r_m(\lambda_p)$, $p=\overline{1,Q}$:

$$|r_m(\lambda_p)| \leqslant Me^{\sigma|\lambda_p|} \leqslant Me^{\sigma\cdot C_\lambda},$$

а также оценим сверху $\det A_{l(j,i),p}$:

$$\begin{aligned}\left|\det A_{l(j,i),p}\right| &\leqslant (Q-1)!\,|\lambda_{Q-1}|^{Q-1}\, e^{(Q-1)\operatorname{Re}(\mu_n\cdot\lambda_{Q-1})}\\ &\leqslant (Q-1)!\,|C_\lambda|^{Q-1}\, e^{(Q-1)C_\mu C_\lambda}.\end{aligned}$$

Тогда для $C_{ij}(m)$ будет верно неравенство:

$$|C_{ij}(m)| \leqslant C := \frac{Q!\cdot M}{D_{\mu\lambda}}\cdot|C_\lambda|^{Q-1}\, e^{(Q-1)C_\mu C_\lambda+\sigma C_\lambda}.$$

Докажем, что N_φ является множеством единственности в $\operatorname{Ker} M_\psi$. Для этого надо показать, что из равенства $r_m(\lambda_p)=0$ следует тождество $r_m(z)\equiv 0$. Рассмотрим систему

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{q_i-1} C_{ij}(m)\lambda_p^j e^{\mu_i\cdot\lambda_p} = 0.$$

Согласно условию теоремы определитель этой системы будет отличен от нуля. Выражая коэффициенты $C_{ij}(m)$ по правилу Крамера, как это было сделано выше, и, заменяя в определителе $\Delta_{l(j,i)}$ столбец $l(j,i)$ столбцом свободных членов, получим, что $C_{ij}(m)=0$, а значит, $r_m(z)\equiv 0$.

Докажем, что

$$\lim_{m\to\infty} C_{ij}(m) = 0, \qquad i=\overline{1,n}, \qquad j=\overline{0,q_i-1}.$$

Из рассуждений ранее следует, что для $C_{ij}(m)$ в силу соотношения $|r_m(\lambda_p)|\to 0$, $m\to\infty$ выполнена оценка

$$|C_{ij}(m)| \leqslant \frac{Q!}{D_{\mu\lambda}} C_\lambda^{Q-1} e^{(Q-1)C_\mu C_\lambda}\cdot|r_m(\lambda_p)| \to 0, \quad m\to\infty, \quad \forall p\in\mathbb{N}.$$

Следовательно, $C_{ij}(m)\to 0$, $m\to\infty$, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{0,q_i-1}$, т.е. $\max\limits_{i=\overline{1,n},j=\overline{0,q_i-1}}|C_{ij}(m)|\to 0$, а это значит, что для любого компакта $K_{\mathbb{C}}$ будет выполнено

$$|r_m(z)| \leqslant Q\cdot \max_{i=\overline{1,n},j=\overline{0,q_i-1}}|C_{ij}(m)| \max_{z\in K_{\mathbb{C}}}|z|^{\max\limits_{i=\overline{1,n}} q_i}\, e^{C_\mu\cdot\max\limits_{z\in K_{\mathbb{C}}}|z|} \to 0, \quad m\to\infty, \quad z\in K_{\mathbb{C}}.$$

Кроме того, будет выполнена оценка для $z\in\mathbb{C}$

$$|r_m(z)| \leqslant Q\cdot|C_{ij}(m)||z|^{\max\limits_{i=\overline{1,n}} q_i} e^{\operatorname{Re}(\mu_i\cdot z)} \leqslant Q\cdot C\cdot e^{\left(\max\limits_{i=\overline{1,n}} q_i\right)\ln|z|+C_\mu|z|} \leqslant Q\cdot C\cdot e^{2\max\left(\max\limits_{i=\overline{1,n}} q_i, C_\mu\right)|z|}.$$

Получаем, что $r_m(z) \to 0$ в топологии $\tau_{\mathbb{C}}$, и множество N_φ будет достаточным в $\operatorname{Ker} M_\psi$.

2. Пусть N_φ — достаточное множество в $\operatorname{Ker} M_\psi[\varphi\cdot]$. Это значит, что N_φ будет множеством единственности в $\operatorname{Ker} M_\psi[\varphi\cdot]$, т.е. для любой функции $r(z) \in \operatorname{Ker} M_\psi[\varphi\cdot]$, обращающейся в нуль на каждом элементе множества N_φ, будет следовать, что $r(z) \equiv 0$.

Подставим в функцию

$$r(z) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{q_i-1} C_{ij} z^j e^{\mu_i \cdot z}$$

Q элементов множества N_φ, и получим однородную систему

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{q_i-1} C_{ij} \lambda_p^j e^{\mu_i \cdot \lambda_p} = 0, \qquad p = 1, \ldots, Q.$$

Поскольку эта однородная система имеет только тривиальное решение ($r(z) \equiv 0$), определитель этой системы отличен от нуля. Значит,

$$D_{\mu\lambda} = \det\left(\lambda_p^j e^{\mu_i \lambda_p}\right) \neq 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{0, q_i - 1}, \quad p = 1, \ldots, Q.$$

□

Следствие 5.1. *Пусть множество N_ψ состоит только из простых нулей функции ψ, при этом $\widetilde{N}_\psi = \{\mu_i\}_{i=1}^n$ — это множество нулей $\psi(z)$, которые попали в сопряженную диаграмму функции $r(z) \in \operatorname{Ker} M_\psi[\varphi\cdot]$, т.е.*

$$r(z) = \sum_{i=1}^{n} C_{ij} e^{\mu_i \cdot z}.$$

Для того чтобы множество N_φ было достаточным в $\operatorname{Ker} M_\psi[\varphi\cdot]$ необходимо и достаточно, чтобы существовало n элементов множества N_φ для которых

$$D_{\mu\lambda} = \det\left(e^{\mu_i \lambda_p}\right) \neq 0, \qquad i, p = \overline{1, n}.$$

Замечание 5.2. *Инъективность линейного оператора эквивалентна тому, что его ядро тривиально, значит, если оператор $M_\psi[\varphi\cdot]$ инъективный, то*

$$D_{\mu\lambda} = \det\left(\lambda_p^j e^{\mu_i \lambda_p}\right) \neq 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{0, q_i - 1}, \quad p = 1, \ldots, Q.$$

Доказательство этого факта аналогично доказательству пункта 2 теоремы 5.1.

Для случая когда узлы интерполяции простые можно указать условия, при которых определитель $D_{\mu\lambda}$ будет отличен от нуля. Для этого воспользуемся результатом работы [16], в этой статье приводится

Теорема 5.2. *Пусть p — простое число, и ε — корень степени p из единицы в поле характеристики нуль. Предположим, что $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ являются попарно не сравнимыми по модулю p, для $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{Z}$ аналогично. Тогда*

$$\det\left(\varepsilon^{a_i \cdot b_j}\right) \neq 0.$$

Поскольку пространство комплексных чисел является полем характеристики ноль, можно сформулировать

Следствие 5.2. *Пусть p — простое число, для него зафиксируем натуральное число $k \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$. Предположим, что $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ являются попарно не сравнимыми по модулю p, для $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{Z}$ аналогично. Тогда*

$$\det\left(e^{\frac{2\pi ik}{p}(a_i + i\cdot A)\cdot(b_j + i\cdot B)}\right) \neq 0, \quad \forall A, B \in \mathbb{R}. \tag{5.2}$$

Доказательство. По свойствам определителей и (5.2) для любых $A, B \in \mathbb{R}$ будет выполнено

$$\det\left(e^{\frac{2\pi ik}{p}(a_i + i\cdot A)\cdot(b_j + i\cdot B)}\right) = e^{-\frac{2\pi kB}{p}\sum\limits_{i=1}^{n} a_i} \cdot e^{-\frac{2\pi kA}{p}\sum\limits_{j=1}^{n} b_j} \cdot e^{-\frac{2\pi ikn}{p} A\cdot B} \cdot \det\left(e^{\frac{2\pi ik}{p} a_i \cdot b_j}\right) \neq 0.$$

□

Сформулируем теорему, которая содержит основные выводы работы.

Теорема 5.3. *Следующие условия эквивалентны.*

(1) *Разрешима задача кратной интерполяции в прообразе оператора свертки.*

(2) *Имеет место представление Фишера* $H(\mathbb{C}) = \operatorname{Im}^{-1} M_\varphi + (\psi)$.

(3) *Оператор* $M_\varphi[\psi\,\cdot\,] + g_0(z)$ *является сюрьективным.*

(4) *Оператор* $M_\psi[\varphi\,\cdot\,]$ *является инъективным и* $\operatorname{Im} M_\psi[\varphi\,\cdot\,]$ *является замкнутым в* $P_{\mathbb{C}}$.

(5) *Множество* N_φ *является достаточным в* $\operatorname{Ker} M_\psi$.

(6) *Определитель* $D_{\mu\lambda} = \det\left(\lambda_p^j e^{\mu_i\lambda_p}\right) \neq 0$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{0, q_i - 1}$, $p = 1, \dots, Q = \sum\limits_{i=1}^{n} q_i$.

Доказательство. 1. (1) $\Leftrightarrow$ (2) доказано в лемме 1.1.

2. (2) $\Leftrightarrow$ (3) доказано в теореме 2.1.

3. (3) $\Leftrightarrow$ (4) следует из теоремы 3.3.

4. (4) $\Rightarrow$ (6) следует из замечания 5.2.

5. (5) $\Leftrightarrow$ (6) доказано в теореме 5.1.

6. (5) $\Rightarrow$ (2) следует из теоремы 4.2.

□

6. Частные случаи

6.1. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Если характеристической функцией оператора свертки является многочлен, то оператор свертки становится линейным дифференциальным оператором с постоянными коэффициентами конечного порядка. Возьмем два полинома $P(z)$ и $Q(z)$ над полем комплексных чисел. Рассмотрим уравнение

$$P\left(\frac{d}{dz}\right) f_0(z) = g_0(z),$$

здесь $g_0(z) \in H(\mathbb{C})$ выбрана произвольно и зафиксирована. Для введенных полиномов $P(z)$, $Q(z)$ и функции $g_0(z)$ зададим оператор

$$T[f] = P\left(\frac{d}{dz}\right)(Q \cdot f) + g_0(z),$$

он будет действовать из пространства целых функций в себя.

Все теоремы параграфов 2 и 3 данной статьи для функций $\psi(z) \in H(\mathbb{C})$, $\varphi(z) \in P_{\mathbb{C}}$ переносятся на случай полиномов $P(z)$ и $Q(z)$ над полем комплексных чисел. Из следствия 3.2 получается

Теорема 6.1.

$$H(\mathbb{C}) = (Q) \oplus \operatorname{Ker} P\left(\frac{d}{dz}\right) \Leftrightarrow P_{\mathbb{C}} = (P) \oplus \operatorname{Ker} Q\left(\frac{d}{dz}\right).$$

Теорема 6.1 также была получена в работе [17]. В работе [18, с. 91] доказывается

Теорема 6.2. *Для пары полиномов* (P, Q) *из* $\mathbb{C}$ *имеет место*

$$H(\mathbb{C}) = (Q) \oplus \operatorname{Ker} P\left(\frac{d}{dz}\right)$$

тогда и только тогда, когда степени полиномов $P(z)$ *и* $Q(z)$ *равны, и оператор* $P\left(\frac{d}{dz}\right)(Q\, cdot\,)$ *будет инъективным.*

В частности, когда нули полиномов $P(z)$ и $Q(z)$ простые, обозначим их через λ_k и μ_k, $k = \deg P(z) = \deg Q(z)$, инъективность будет означать, что

$$\det \left| e^{\lambda_k \mu_k} \right| \neq 0. \tag{6.1}$$

Кроме того, как для функций (φ, ψ) не существует разложения Фишера в $H(\mathbb{C})$, так и для пары полиномов (P, Q) не существует разложения Фишера

$$H(\mathbb{C}) = (Q) \oplus \mathrm{Im}^{-1}\, P\left(\frac{d}{dz}\right),$$

но существует представление Фишера

$$H(\mathbb{C}) = (Q) + \mathrm{Im}^{-1}\, P\left(\frac{d}{dz}\right).$$

6.2. Представление Фишера для функций с сопряженными нулями. Для функции $f(z) \in H(\mathbb{C})$ функция $f^*(z) := \overline{f(\overline{z})} \in H(\mathbb{C})$ будет иметь сопряженные нули. Для пары полиномов $(P(z), P^*(z))$ от одной переменной известно (см. [18]), что существует разложение

$$H(\mathbb{C}) = (P^*) \oplus \mathrm{Ker}\, P\left(\frac{d}{dz}\right).$$

Приведем другой метод доказательства

$$H(\mathbb{C}) = (P^*) + \mathrm{Im}^{-1}\, P\left(\frac{d}{dz}\right)$$

для случая, когда все нули полинома $P(z)$ простые, а именно, используя условие (6.1). Пусть λ_1, λ_2, …, λ_m — набор точек из $\mathbb{C}$. Матрица A имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1\overline{\lambda_1}} & e^{\lambda_1\overline{\lambda_2}} & \dots & e^{\lambda_1\overline{\lambda_m}} \\ e^{\lambda_2\overline{\lambda_1}} & e^{\lambda_2\overline{\lambda_2}} & \dots & e^{\lambda_2\overline{\lambda_m}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e^{\lambda_m\overline{\lambda_1}} & e^{\lambda_m\overline{\lambda_2}} & \dots & e^{\lambda_m\overline{\lambda_m}} \end{pmatrix}. \tag{6.2}$$

Предложение 6.1. *Если числа λ_1, λ_2, …, λ_m все различны, то определитель матрицы A отличен от нуля. Если в наборе чисел λ_1, λ_2, …, λ_m встречаются одинаковые числа, то*

$$\det A = 0.$$

Доказательство. Построим следующее конечномерное унитарное пространство R (см. определение [2, с. 222–223]). Возьмем набор функций от переменной $z \in \mathbb{C}$, порожденный числами λ_1, λ_2, …, λ_m:

$$\mathcal{E} = \{e^{\lambda_1 z}, e^{\lambda_2 z}, \dots, e^{\lambda_m z}\}.$$

Все функции из множества $\mathcal{E}$ целые и, более того, $\mathcal{E} \subset F$, где F — пространство Фока, т.е.

$$F = \{f \in H(\mathbb{C})\colon \|f\|_F^2 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{C}} |f(z)|^2 e^{-|z|^2}\, dv(z) < \infty\}.$$

Пусть $R \overset{def}{=} \operatorname{span}\mathcal{E}$, тогда элементами пространства R являются целые функции, которые представляются как конечные линейные комбинации функций из $\mathcal{E}$. Для функций $p(z), q(z) \in R$, $z \in \mathbb{C}$ введем скалярное произведение по правилу:

$$(p, q)_R \overset{def}{=} (p, q)_F = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{C}} p(z) \cdot \overline{q(z)}\, e^{-|z|^2}\, dv(z).$$

Получаем, что R — это конечномерное замкнутое подпространство гильбертова пространства Фока. Легко также проверить, что для любого $z_0 \in \mathbb{C}$ справедлива оценка

$$|p(z_0)| \leqslant C_{z_0}\|p\|_R, \quad \forall p \in R.$$

где C_{z_0} константа, зависящая только от z_0. Последнее означает, что дельта–функционал $\delta_{z_0}\colon p \to p(z_0)$ является линейным непрерывным функционалом на R. Значит, R является пространством с воспроизводящим ядром [13].

Нетрудно подсчитать, что

$$(e^{\lambda_j z}, e^{\lambda_k z})_R \stackrel{def}{=} \frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{C}} e^{\lambda_j z}\cdot\overline{e^{\lambda_k z}}\, e^{-|z|^2}\, dv(z) = e^{\lambda_j\overline{\lambda_k}}, \quad j,k = 1,\dots,m. \tag{6.3}$$

В книге [2, с. 225-226] приведен критерий линейной независимости векторов x_1, x_2, …, x_m в абстрактном конечномерном унитарном пространстве R. Там же доказывается, что система векторов x_1, x_2, …, x_m линейно независима тогда и только тогда, когда определитель матрицы Грама этой системы:

$$\det\Gamma(x_1,x_2,\dots,x_m) = \det\begin{pmatrix} (x_1,x_1)_R & (x_1,x_2)_R & \dots & (x_1,x_m)_R \\ (x_2,x_1)_R & (x_2,x_2)_R & \dots & (x_2,x_m)_R \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (x_m,x_1)_R & (x_m,x_2)_R & \dots & (x_m,x_m)_R \end{pmatrix}$$

будет отличен от нуля. Эти же рассуждения справедливы и для R. В качестве векторов x_1, x_2, …, x_m возьмем функции:

$$e^{\lambda_1 z}, \quad e^{\lambda_2 z}, \quad \dots, \quad e^{\lambda_m z}.$$

Линейная независимость этой системы означает, что из условия:

$$c_1e^{\lambda_1 z} + c_2e^{\lambda_2 z} + \dots + c_me^{\lambda_m z} = \varnothing, \tag{6.4}$$

где $\varnothing$ — нулевой элемент пространства R, а c_1, c_2, …, c_m — комплексные числа, вытекает, что $c_j = 0$, $j = 1,2,\dots,m$.

В силу предложения [13], линейная независимость системы функций

$$e^{\lambda_1 z}, \quad e^{\lambda_2 z}, \quad \dots, \quad e^{\lambda_m z}$$

означает, что из условия:

$$c_1e^{\lambda_1 z} + c_2e^{\lambda_2 z} + \dots + c_me^{\lambda_m z} \equiv 0, \quad z\in\mathbb{C}$$

вытекает, что $c_j = 0$, $j = 1,2,\dots,m$. Матрица Грама в нашем случае — это матрица A (см. (6.2), (6.3)).

Докажем: если в наборе чисел λ_1, λ_2, …, λ_m встречаются одинаковые числа, то система функций

$$e^{\lambda_1 z}, \quad e^{\lambda_2 z}, \quad \dots, \quad e^{\lambda_m z}$$

линейно зависима в R.

Если же все числа λ_1, λ_2, …, λ_m различны, то система функций

$$e^{\lambda_1 z}, \quad e^{\lambda_2 z}, \quad \dots, \quad e^{\lambda_m z}$$

линейно независима в R.

Действительно, предположим противное. Пусть существуют различные комплексные числа λ_1, λ_2, …, λ_m такие, что система функций

$$e^{\lambda_1 z}, \quad e^{\lambda_2 z}, \quad \dots, \quad e^{\lambda_m z}$$

линейно зависима в R. Это значит, что существует набор комплексных чисел c_1, c_2, …, c_l, $l\leqslant m$, $c_j\neq 0$ такой, что

$$\sum_{j=1}^{l} c_je^{\lambda_j z} = \varnothing,$$

(см. (6.4)).

Рассмотрим пространство $\widehat{F}$

$$\widehat{F} = \{\widehat{f}\colon \widehat{f}(\lambda) = (e^{\lambda z}, f)_F,\ f\in F\}$$

преобразований Лапласа функционалов на F, $R \subset F$. Для любой функции $f \in F$ выполнено

$$0 = (\varnothing, f)_F = \left(\sum_{j=1}^{l} c_j e^{\lambda_j z}, f(z) \right)_F = \sum_{k=1}^{l} c_k \widehat{f}(\lambda_k). \tag{6.5}$$

Мы получили, что найдутся не равные нулю постоянные $c_1, \ldots, c_l$ такие, что для любой функции $\widehat{f} \in \widehat{F}$ выполнено равенство (6.5).

Хорошо известно, что пространство $\widehat{F}$ совпадает с пространством F (см. [14]).

Поэтому пространство $\widehat{F}$ содержит те же функции, что и пространство F. Отсюда вытекает, что для любой функции $g \in F$ выполнено равенство

$$\sum_{k=1}^{l} c_k g(\lambda_k) = 0, \tag{6.6}$$

при этом $c_1, \ldots, c_l \neq 0$. Соотношение (6.6) для любой функции $g \in F$ очевидно невозможно.

Значит, система функций

$$e^{\lambda_1 z}, \quad e^{\lambda_2 z}, \quad \ldots, \quad e^{\lambda_m z}$$

линейно независима в R. По теореме из ([2, с. 226]) определитель Грама этой системы отличен от нуля, а значит, определитель матрицы A отличен от нуля. □

Очевидно, что предложение 6.1 справедливо также для произвольного конечного набора точек из $\mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N}$.

А именно, справедливо

Предложение 6.2. *Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ — набор точек из $\mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N}$. Матрица A имеет вид:*

$$A = \begin{pmatrix} e^{\langle \lambda_1, \overline{\lambda_1} \rangle} & e^{\langle \lambda_1, \overline{\lambda_2} \rangle} & \ldots & e^{\langle \lambda_1, \overline{\lambda_m} \rangle} \\ e^{\langle \lambda_2, \overline{\lambda_1} \rangle} & e^{\langle \lambda_2, \overline{\lambda_2} \rangle} & \ldots & e^{\langle \lambda_2, \overline{\lambda_m} \rangle} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e^{\langle \lambda_m, \overline{\lambda_1} \rangle} & e^{\langle \lambda_m, \overline{\lambda_2} \rangle} & \ldots & e^{\langle \lambda_m, \overline{\lambda_m} \rangle} \end{pmatrix}.$$

Если точки $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ из $\mathbb{C}^n$ все различны, то определитель матрицы A отличен от нуля. Если в наборе точек $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ из $\mathbb{C}^n$ встречаются одинаковые, то $\det A = 0$.

Доказательство этого утверждения почти дословно повторяет доказательство предложения 6.1.

В заключении этого пункта отметим, что согласно результату работы [8, теорема 3] и теореме 4.2 данной статьи, получаем, что верна

Теорема 6.3. *Если $\varphi(z) \in P_{\mathbb{C}}$, $\psi(z) \equiv \varphi^*(z)$, то имеет место представление Фишера*

$$H(\mathbb{C}) = (\varphi^*) + \operatorname{Im}^{-1} M_\varphi.$$

Авторы выражают глубокую благодарность Юлмухаметову Р.С. за ценные замечания, которые были учтены в этой статье.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ф. Браудер. *Функциональный анализ и уравнения в частных производных* // Математика **4**:3, 79–106 (1960).
2. Ф.Р. Гантмахер. *Теория матриц.* М.: Наука. 1966.
3. Ж. Дьёдонне, Л. Шварц. *Двойственность в пространствах* $(\mathcal{F})$ *и* $(\mathcal{LF})$ // Математика. Сб. пер. **2**:2. 77–107 (1958).
4. *Математическая энциклопедия.* Т.1. М.: Советская Энциклопедия. 1977.
5. С.Г. Мерзляков, С.В. Попенов. *Кратная интерполяция рядами экспонент* $H(\mathbb{C})$ *с узлами на вещественной оси* // Уфимск. мат. ж. **5**:3. 130–143 (2013).
6. В.В. Напалков. *Уравнения свертки в многомерных пространствах.* М.: Наука. 1982.

7. В.В. Напалков. *Комплексный анализ и задача Коши для операторов свертки* // Тр. мат. инст. им. В.А. Стеклова **235**, 165–168 (2001).
8. В.В. Напалков, А.У. Муллабаева. *Решение задачи Шапиро для оператора свертки* // Изв. уфимск. научн. центра росс. акад. наук **4**, 5–11 (2017).
9. В.В. Напалков, А.А. Нуятов. *Многоточечная задача Валле Пуссена для операторов свертки* // Мат. сб. **203**:2, 77–86 (2012).
10. В.В. Напалков, А.А. Нуятов. *Многоточечная задача Валле Пуссена для операторов свертки с узлами, заданными в угле* // Теор. мат. физ. **180**:2, 264–271 (2014).
11. В.В. Напалков (мл.), А.А. Нуятов. *Задача Абеля – Гончарова в ядре оператора свертки* // Уфимск. мат. ж. **17**:4, 74–83 (2025).
12. Ж. Себаштьян-и-Силва. *О некоторых классах локально-выпуклых пространств, важных в приложениях* // Математика. Сб. пер. **1**, 60–77 (1957).
13. N. Aronszajn. *Theory of reproducing kernels* // Trans. Am. Math. Soc. **68**:3, 337–404 (1950).
14. V. Bargmann. *On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral transform* // Commun. Pure Appl. Math. **14**:3, 187–214 (1961).
15. D.G. Dickson. *Infinite order differential equations* // Proc. Am. Math. Soc. **15**:4, 638–641 (1964).
16. R.J. Evans, I.M. Isaacs. *Generalized Vandermonde determinants and roots of unity of prime order* // Proc. Am. Math. Soc. **58**:1, 51–54 (1976).
17. A. Meril, D.C. Struppa. *Equivalence of Cauchy problems for entire and exponential type functions* // Bull. London Math. Soc. **17**:5, 469–473 (1985).
18. A. Meril, A. Yger. *Problèmes de Cauchy globaux* // Bull. Soc. Math. Fr. **120**:1, 87–111 (1992).
19. H. Muggli. *Differentialgleichungen unendlich hoher Ordnung mit konstanten Koeffizienten* // Comment. Math. Helv. **11**:1, 151–179 (1938).

Валерий Валентинович Напалков,
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: vnap@mail.ru

Андрей Александрович Нуятов,
Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева,
ул. Минина, 24,
603155, г. Нижний Новгород, Россия
E-mail: nuyatov1aa@rambler.ru