

УДК 517.927.4

КРИТЕРИЙ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Э. МУХАМАДИЕВ, А.Н. НАИМОВ

Аннотация. В статье исследован вопрос о существовании периодических решений для одного класса систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с выделенной главной нелинейной частью. С учётом структуры множества нулей главной нелинейной части найдены новые условия, обеспечивающие априорную оценку периодических решений. В условиях априорной оценки сформулирован и доказан критерий существования периодических решений при любом возмущении из заданного класса. Доказательство проведено с применением методов вычисления вращения векторных полей, используя свойство инвариантности существования периодических решений при непрерывном изменении главной нелинейной части.

Ключевые слова: главная нелинейная часть, возмущение, периодическое решение, априорная оценка, направляющая функция, вращение векторного поля.

Mathematics Subject Classification: 34B15, 45G15

1. ВВЕДЕНИЕ

В статье исследован вопрос о существовании ω -периодических решений для систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$x'' = \prod_{j=1}^q \varphi_j(x' - B_j(x))Q(x' - B(x)) + f(t, x, x'), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (1.1)$$

Здесь n, q — натуральные числа, $n \geq 2$, $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, отображения $\varphi_j : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, $B_j, Q, B : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^{1+2n} \mapsto \mathbb{R}^n$ непрерывны и при некоторых положительных $\omega, \alpha, \alpha_j, j = \overline{1, q}$, где $\alpha_1 + \dots + \alpha_q + \alpha = m > 1$, удовлетворяют следующим условиям:

- 1) $\varphi_j(\lambda y) \equiv \lambda^{\alpha_j} \varphi_j(y)$, $B_j(\lambda y) \equiv \lambda B_j(y)$, $j = \overline{1, q}$, $B(\lambda y) \equiv \lambda B(y)$, $Q(\lambda y) \equiv \lambda^\alpha Q(y)$ при всех $\lambda > 0$ (условия положительной однородности);
- 2) $\varphi_j(y) > 0$, $j = \overline{1, q}$ и $Q(y) \neq 0$ при $y \neq 0$;
- 3) $f(t + \omega, y_1, y_2) \equiv f(t, y_1, y_2)$;
- 4) порядок роста $|f(t, y_1, y_2)|$ при больших $|y_1| + |y_2|$ ограничен пределом

$$\lim_{|y_1|+|y_2| \rightarrow \infty} (|y_1| + |y_2|)^{-m} \max_{t \in [0, \omega]} |f(t, y_1, y_2)| = 0.$$

E. MUKHAMADIEV, A.N. NAIMOV, EXISTENCE CRITERION FOR PERIODIC SOLUTIONS TO ONE CLASS OF SYSTEMS OF SECOND ORDER NONLINEAR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS.

© МУХАМАДИЕВ Э., НАИМОВ А.Н. 2026.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00032, <https://rscf.ru/project/23-21-00032/>.

Поступила 12 января 2025 г.

В правой части системы уравнений (1.1) слагаемое

$$\prod_{j=1}^q \varphi_j(x' - B_j(x))Q(x' - B(x)),$$

являющееся положительно однородным по x и x' , назовем главной нелинейной частью, а $f(t, x, x')$ — возмущением. Решение $x \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$ системы уравнений (1.1) называем ω -периодическим, если $x(t + \omega) \equiv x(t)$.

В работах [5], [6], [7] исследовано существование ω -периодических решений для систем уравнений вида

$$x'' = P(t, x, x') + f(t, x, x'), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1.2)$$

с главной положительно однородной нелинейной частью P и возмущением f , удовлетворяющем условиям 3, 4. Исследование проведено в два этапа. На первом этапе найдены условия, обеспечивающие априорную оценку ω -периодических решений x , т.е. существование числа $M_1 > 0$, не зависящего от x и такого, что

$$\|x\| + \|x'\| < M_1, \quad (1.3)$$

где $\|x\| = \max\{|x(t)| : t \in [0, \omega]\}$.

На втором этапе в условиях, обеспечивающих априорную оценку, применяя методы вычисления вращения векторных полей [2, с. 98-168], установлено существование ω -периодических решений.

Условия, обеспечивающие априорную оценку (1.3), исследованы в зависимости от структуры множества нулей главной нелинейной части $P(t, y_1, y_2)$. Рассматриваются случаи, когда множество нулей состоит из

- а) одной поверхности $y_2 = B(t, y_1)$, и система уравнений $x' = B(t, x)$ не имеет ненулевых ω -периодических решений;
- б) конечного числа поверхностей $y_2 = B_j(t, y_1)$, $j = \overline{1, q}$, между которыми нет так называемых переключений, что означает отсутствие нестационарного ограниченного решения у автономной системы $y' = P(t_0, x_0, y)$, $y \in \mathbb{R}^n$, при любых фиксированных t_0 и x_0 ;
- в) конечного числа поверхностей $y_2 = B_j(t, y_1)$, $j = \overline{1, q}$, между которыми возможны указанные выше переключения.

Случаи а) и б) исследованы в работах [5], [6], а случай в) при $n = 2$ в одном примере рассмотрен в работе [7].

Система уравнений (1.1) относится к случаю в). Путем развития подхода из [7] в настоящей работе найдены условия, обеспечивающие априорную оценку (1.3) при любом возмущении f . При выводе априорной оценки применяется метод направляющей функции и учитывается явная структура множества нулей главной нелинейной части. В условиях априорной оценки сформулирован и доказан критерий существования ω -периодических решений при любом возмущении f . В доказательстве применяются и развиваются методы работ [6], [8] и используется свойство инвариантности существования ω -периодических решений при непрерывном изменении главной нелинейной части.

В работе [1] методом направляющей функции исследовано существование периодического решения у нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений высших порядков.

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Наряду с условиями 1 – 4 рассмотрим следующие условия:

- 5) система уравнений $y' = Q(y)$, $y \in \mathbb{R}^n$ не имеет ненулевых ограниченных решений;
 6) $B \in C^1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}; \mathbb{R}^n)$ и существует функция $W \in C^1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}; \mathbb{R})$ такая, что при любом $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ выполнены неравенства

$$\langle B(y), W'(y) \rangle > 0, \quad \langle B_j(y), W'(y) \rangle > 0, \quad j = \overline{1, q},$$

где $W'(y)$ — производная (градиент) $W(y)$, $\langle y, z \rangle = y_1 z_1 + \dots + y_n z_n$ — скалярное произведение в \mathbb{R}^n ;

- 7) $B_j(y) = A_j y$, $j = \overline{1, q}$ и $B(y) = Ay$, где A, A_j , $j = \overline{1, q}$ — перестановочные между собой матрицы и $\det(\exp(\omega D) - I) \neq 0$ для любой их выпуклой комбинации $D = \mu_0 A + \mu_1 A_1 + \dots + \mu_q A_q$.

Введем в рассмотрение семейство отображений

$$P_\lambda(y_1, y_2) = \prod_{j=1}^q \varphi_j(y_2 - B_{j,\lambda}(y_1)) Q(y_2 - B(y_1)), \quad y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n, \quad \lambda \in [0, 1],$$

где $B_{j,\lambda}(y) = (1 - \lambda)B_j(y) + \lambda B(y)$. Априорная оценка (1.3) для ω -периодических решений системы уравнений (1.1) вытекает из следующей теоремы.

Теорема 2.1. Пусть выполнены условия 1, 2, 5 и одно из условий 6 или 7. Тогда существуют положительные числа σ и M такие, что для любой ω -периодической вектор-функции $x \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$, удовлетворяющей неравенству $\|x\| + \|x'\| > M$, справедлива оценка

$$\|x'' - P_\lambda(x, x')\| \geq \sigma (\|x\| + \|x'\|)^m \quad (2.1)$$

при любом значении $\lambda \in [0, 1]$.

Обозначим через $\gamma(Q)$, $\gamma(B)$ вращения (степени отображений) векторных полей $Q, B : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ на единичной сфере $|y| = 1$ пространства \mathbb{R}^n [2, с. 16].

Теорема 2.2. В условиях теоремы 2.1 для существования ω -периодических решений системы уравнений (1.1) при любом возмущении f необходимо и достаточно, чтобы $\gamma(Q)\gamma(B) \neq 0$.

В доказательстве теоремы 2.2 применяются и развиваются методы работ [6], [8] и используется свойство инвариантности существования ω -периодических решений системы уравнений

$$x'' = P_\lambda(x, x') + f(t, x, x'), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

при непрерывном изменении $\lambda \in [0, 1]$.

Примеры положительно однородных отображений Q , удовлетворяющих условию 5, приведены в работе [4]. Для них предложен эффективный алгоритм вычисления $\gamma(Q)$.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.1

Предположим, что оценка (2.1) не верна. Тогда найдутся последовательности $\lambda_k \in [0, 1]$, $x_k \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$, $k = 1, 2, \dots$, такие, что

$$\begin{aligned} x_k(t + \omega) &\equiv x_k(t), & r_k &:= \|x_k\| + \|x'_k\| \rightarrow \infty, & k &\rightarrow \infty, \\ \|x''_k - P_{\lambda_k}(x_k, x'_k)\| &< \frac{1}{k} \left(\|x_k\| + \|x'_k\| \right)^m. \end{aligned}$$

Рассмотрим вектор-функции $y_k(t) = r_k^{-1}x_k(t)$, $t \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \dots$. Для этих вектор-функций имеем

$$\begin{aligned} y_k &\in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n), \quad y_k(t + \omega) \equiv y_k(t), \quad \|y_k\| + \|y'_k\| = 1, \\ r_k^{1-m} y''_k(t) &= P_{\lambda_k}(y_k(t), y'_k(t)) + o(1), \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Без ограничения общности можно считать, что $\lambda_k \rightarrow \lambda_0$ и $\|y_k - y_0\| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

Если $y_0(t) \equiv 0$, то для последовательности вектор-функций $z_k(t) = y'_k(t_k + tr_k^{1-m})$, $k = 1, 2, \dots$, где $|y'_k(t_k)| = \|y'_k\| \rightarrow 1$ при $k \rightarrow \infty$, имеем

$$\begin{aligned} |z_k(t)| &\leq |z_k(0)|, \quad z'_k(t) = P_{\lambda_0}(0, z_k(t)) + o(1), \quad t \in \mathbb{R}, \\ |z_k(0)| &\rightarrow 1, \quad k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Переходя к пределу, получаем ненулевое ограниченное решение системы уравнений

$$z' = P_{\lambda_0}(0, z(t)), \quad z \in \mathbb{R}^n. \quad (3.2)$$

С другой стороны, можно непосредственно проверить, что в силу условий 2 и 5 система уравнений (3.2) не может иметь ненулевых ограниченных решений. Следовательно, $y_0(t) \not\equiv 0$. Далее, рассуждая как при доказательстве теоремы 1 из работы [5, с. 48-50], выводим

$$y_0(t) \neq 0, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (3.3)$$

В последующем можно считать, что $|y_k(t)| > \frac{1}{2}|y_0(t)|$ при всех t и k .

Теперь воспользуемся тем, что в силу условия 5 и согласно теоремам 2.2, 2.3 работы [3], для Q существует так называемая направляющая функция $V \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ со свойствами:

$$V(\lambda y) \equiv \lambda^2 V(y), \quad \langle Q(y), V'(y) \rangle > c_1 |y|^{\alpha+1} > 0, \quad y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},$$

где $V'(y)$ — производная (градиент) $V(y)$. Обе стороны (3.1) скалярно перемножим на $V'(y'_k(t) - B(y_k(t)))$ и проинтегрируем от 0 до ω :

$$\begin{aligned} r_k^{1-m} \int_0^\omega \langle y''_k(t), V'(y'_k(t) - B(y_k(t))) \rangle dt \\ = \int_0^\omega \langle P_{\lambda_0}(y_k(t), y'_k(t)), V'(y'_k(t) - B(y_k(t))) \rangle dt + o(1). \end{aligned}$$

Оценим правую часть снизу

$$\begin{aligned} \int_0^\omega \langle P_{\lambda_0}(y_k(t), y'_k(t)), V'(y'_k(t) - B(y_k(t))) \rangle dt \\ \geq c_1 \int_0^\omega \prod_{j=1}^q \varphi_j(y'_k(t) - B_{j,\lambda_0}(y_k(t))) |y'_k(t) - B(y_k(t))|^{\alpha+1} dt, \end{aligned}$$

а подынтегральную функцию слева представим в виде

$$\langle y''_k, V'(y'_k - B(y_k)) \rangle = (V(y'_k - B(y_k)))' + \langle B'(y_k)y'_k, V'(y'_k - B(y_k)) \rangle.$$

В итоге, учитывая ограниченность y_k , y'_k и переходя к пределу, получаем

$$\int_0^\omega \prod_{j=1}^q \varphi_j(y'_k(t) - B_{j,\lambda_0}(y_k(t))) |y'_k(t) - B(y_k(t))|^{\alpha+1} dt \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Без ограничения общности можно считать, что почти при всех $t \in [0, \omega]$

$$\prod_{j=1}^q \varphi_j(y'_k(t) - B_{j,\lambda_0}(y_k(t))) |y'_k(t) - B(y_k(t))|^{\alpha+1} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

При любом $\varepsilon > 0$ для меры множества

$$E_{k,\varepsilon} = \{t \in [0, \omega] : |y'_k(t) - B(y_k(t))| \geq \varepsilon, |y'_k(t) - B_{j,\lambda_0}(y_k(t))| \geq \varepsilon, j = \overline{1, q}\}$$

имеем $\text{mes}(E_{k,\varepsilon}) \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$.

Фиксируя $\varepsilon > 0$, введем множества

$$E_{k,\varepsilon}^0 = \{t \in [0, \omega] : |y'_k(t) - B_{0,\lambda_0}(y_k(t))| < \varepsilon\}, \quad \text{где } B_{0,\lambda_0} = B,$$

$$E_{k,\varepsilon}^l = \{t \in [0, \omega] : |y'_k(t) - B_{l,\lambda_0}(y_k(t))| < \varepsilon, |y'_k(t) - B_{j,\lambda_0}(y_k(t))| \geq \varepsilon, j = \overline{0, l-1}\}, \quad l = \overline{1, q}.$$

Множества $E_{k,\varepsilon}, E_{k,\varepsilon}^0, \dots, E_{k,\varepsilon}^q$ попарно не пересекаются, и их объединение совпадает с $[0, \omega]$.

Если выполнено условие 6, то выберем положительное c_2 , удовлетворяющее неравенствам

$$\langle B(y), W'(y) \rangle \geq c_2, \quad \langle B_j(y), W'(y) \rangle \geq c_2, \quad j = \overline{1, q}$$

при любом $y \in \mathbb{R}^n, a_0 \leq |y| \leq 1$, где $a_0 = 0,5 \min\{|y_0(t)| : t \in [0, \omega]\}$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} 0 = W(y_k(\omega)) - W(y_k(0)) &= \int_0^\omega (W(y_k(t)))' dt = \int_0^\omega \langle y'_k(t), W'(y_k(t)) \rangle dt \\ &= \sum_{j=0}^q \int_{E_{k,\varepsilon}^j} \langle B_{j,\lambda_0}(y_k(t)), W'(y_k(t)) \rangle dt + \sum_{j=0}^q \int_{E_{k,\varepsilon}^j} \langle y'_k(t) - B_{j,\lambda_0}(y_k(t)), W'(y_k(t)) \rangle dt \\ &\quad + \int_{E_{k,\varepsilon}} \langle y'_k(t), W'(y_k(t)) \rangle dt > c_2 (\omega - \text{mes}(E_{k,\varepsilon})) - (\varepsilon\omega + \text{mes}(E_{k,\varepsilon})) \max_{a_0 \leq |y| \leq 1} |W'(y)|. \end{aligned}$$

Учитывая предел $\text{mes}(E_{k,\varepsilon}) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, число $\varepsilon > 0$ и номер k можно подобрать так, что

$$c_2 (\omega - \text{mes}(E_{k,\varepsilon})) - (\varepsilon\omega + \text{mes}(E_{k,\varepsilon})) \max_{a_0 \leq |y| \leq 1} |W'(y)| > 0.$$

Пришли к противоречию.

Если выполнено условие 7, то определим

$$D_{k,\varepsilon}(t) = \begin{cases} A, & t \in E_{k,\varepsilon} \cup E_{k,\varepsilon}^0, \\ A_l, & t \in E_{k,\varepsilon}^l, l \geq 1, \end{cases}$$

$$h_{k,\varepsilon}(t) = y'_k(t) - D_{k,\varepsilon}(t)y_k(t).$$

Легко проверить, что

$$|h_{k,\varepsilon}(t)| < \varepsilon, \quad t \in E_{k,\varepsilon}^l, \quad l = \overline{0, q},$$

$$D_{k,\varepsilon}(t) \int_0^s D_{k,\varepsilon}(\tau) d\tau = \int_0^s D_{k,\varepsilon}(\tau) d\tau D_{k,\varepsilon}(t), \quad t, s \in [0, \omega].$$

Учитывая эти свойства, для y_k имеем:

$$y_k(\omega) = e^{\int_0^\omega D_{k,\varepsilon}(\tau)d\tau} y_k(0) + \int_0^\omega e^{\int_t^\omega D_{k,\varepsilon}(\tau)d\tau} h_{k,\varepsilon}(t) dt,$$

$$\left| \left(e^{\int_0^\omega D_{k,\varepsilon}(\tau)d\tau} - I \right) y_k(0) \right| < N\varepsilon \quad \text{при } k > k_0(\varepsilon),$$

где N не зависит от k и ε ,

$$\left| \left(e^{\mu_{k,\varepsilon} A + \mu_{k,\varepsilon}^{(0)} A + \mu_{k,\varepsilon}^{(1)} A_1 + \dots + \mu_{k,\varepsilon}^{(q)} A_q} - I \right) y_k(0) \right| < N\varepsilon, \quad k > k_0(\varepsilon),$$

здесь

$$\mu_{k,\varepsilon} = \text{mes}(E_{k,\varepsilon}), \quad \mu_{k,\varepsilon}^{(l)} = \text{mes}(E_{k,\varepsilon}^l), \quad \mu_{k,\varepsilon} + \mu_{k,\varepsilon}^{(0)} + \dots + \mu_{k,\varepsilon}^{(q)} = \omega, \quad \mu_{k,\varepsilon} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$, получаем

$$\left| \left(e^{\mu_\varepsilon^{(0)} A + \mu_\varepsilon^{(1)} A_1 + \dots + \mu_\varepsilon^{(q)} A_q} - I \right) y_0(0) \right| \leq N\varepsilon,$$

где $\mu_\varepsilon^{(0)} + \dots + \mu_\varepsilon^{(q)} = \omega$. Устремляя ε к нулю, приходим к равенствам

$$\left(e^{\mu_0^{(0)} A + \mu_0^{(1)} A_1 + \dots + \mu_0^{(q)} A_q} - I \right) y_0(0) = 0, \quad \mu_0^{(0)} + \dots + \mu_0^{(q)} = \omega.$$

Так как $y_0(0) \neq 0$ (в силу (3.3)), находим

$$\det \left(e^{\mu_0^{(0)} A + \mu_0^{(1)} A_1 + \dots + \mu_0^{(q)} A_q} - I \right) = 0,$$

что противоречит условию 7. Теорема 2.1 доказана.

Проверим, что в условиях теоремы 2.1 из (2.1) вытекает априорная оценка (1.3). Действительно, для любого ω -периодического решения системы уравнений (1.1) либо $\|x\| + \|x'\| \leq M$, либо $\|x\| + \|x'\| > M$ и из (2.1) следует

$$\sigma (\|x\| + \|x'\|)^m \leq \|x'' - P_0(x, x')\| = \|f(\cdot, x, x')\|.$$

В силу условия 4

$$\|f(\cdot, x, x')\| < \frac{\sigma}{2} (\|x\| + \|x'\|)^m + M_{f,\sigma}.$$

Следовательно, в случае $\|x\| + \|x'\| > M$ верна оценка

$$(\|x\| + \|x'\|)^m < \frac{2}{\sigma} M_{f,\sigma},$$

а в общем случае

$$(\|x\| + \|x'\|)^m < M^m + \frac{2}{\sigma} M_{f,\sigma}.$$

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.2

Сначала по схеме работы [5, теорема 3] докажем свойство инвариантности существования ω -периодических решений системы уравнений

$$x'' = P_\lambda(x, x') + f(t, x, x'), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (4.1)$$

при непрерывном изменении $\lambda \in [0, 1]$.

Лемма 4.1. Система уравнений (4.1) имеет ω -периодические решения при $\lambda = 0$ и любом возмущении f тогда и только тогда, когда имеет ω -периодические решения при $\lambda = 1$ и любом возмущении f .

Доказательство. Пусть $\lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1]$, и для любой вектор-функции $y \in C^1([0, \omega]; \mathbb{R}^n)$ имеет место неравенство

$$\|P_{\lambda_1}(y, y') - P_{\lambda_2}(y, y')\| \leq \frac{1}{4}\sigma \left(\|y\| + \|y'\| \right)^m.$$

Воспользуясь оценкой (2.1), покажем, что в системе уравнений (4.1) при замене $\lambda = \lambda_1$ на $\lambda = \lambda_2$ сохраняется свойство существования ω -периодического решения при любом возмущении f . Этим самым лемма будет доказана.

Возьмем произвольное возмущение \tilde{f} . Для любой вектор-функции $y \in C^1([0, \omega]; \mathbb{R}^n)$ имеет место неравенство

$$\|\tilde{f}(\cdot, y, y')\| \leq \frac{1}{4}\sigma \left(\|y\| + \|y'\| \right)^m + M_{\tilde{f}, \sigma},$$

где $M_{\tilde{f}, \sigma}$ — положительное число, зависящее лишь от \tilde{f} и σ . Выберем число

$$L > \max \left(M, \left(2\sigma^{-1}M_{\tilde{f}, \sigma} \right)^{\frac{1}{m}} \right)$$

и определим возмущение

$$g_L(t, y_1, y_2) = \tilde{f}(t, y_1, y_2) + \eta(|y_1| + |y_2|) (P_{\lambda_2}(y_1, y_2) - P_{\lambda_1}(y_1, y_2)),$$

где $\eta(s) \in C(\mathbb{R})$, $0 \leq \eta(s) \leq 1$ при всех $s \in \mathbb{R}$, $\eta(s) = 1$ при $|s| \leq L$ и $\eta(s) = 0$ при $|s| \geq L+1$.

Пусть x — ω -периодическое решение системы уравнений (4.1) при $\lambda = \lambda_1$ и возмущении $f = g_L$. Проверим, что $\|x\| + \|x'\| \leq L$; тогда отсюда следует, что x также является ω -периодическим решением системы уравнений (4.1) при $\lambda = \lambda_2$ и возмущении $f = \tilde{f}$. Действительно, если $\|x\| + \|x'\| > L$, то, согласно оценке (2.1) и выбору числа L , имеем

$$\begin{aligned} \sigma \left(\|x\| + \|x'\| \right)^m &< \|x'' - P_{\lambda_1}(x, x')\| \leq \|\tilde{f}(\cdot, x, x')\| \\ &+ \|P_{\lambda_1}(x, x') - P_{\lambda_2}(x, x')\| \leq 0,5\sigma \left(\|x\| + \|x'\| \right)^m + M_{\tilde{f}, \sigma}. \end{aligned}$$

Отсюда приходим к противоречию

$$\|x\| + \|x'\| \leq \max \left(2\sigma^{-1}M_{\tilde{f}, \sigma} \right)^{\frac{1}{m}} < L.$$

Лемма 4.1 доказана. □

Таким образом, система уравнений (1.1) имеет ω -периодические решения при любом возмущении f тогда и только тогда, когда при любом возмущении f имеет ω -периодические решения система уравнений

$$x'' = Q_1(x' - B(x)) + f(t, x, x'), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (4.2)$$

где $Q_1(y) = \varphi_1(y) \cdot \dots \cdot \varphi_q(y)Q(y)$. При этом выполнено условие

8) система уравнений $y' = Q_1(y)$, $y \in \mathbb{R}^n$ не имеет ненулевых ограниченных решений.

В случае выполнения условия 6 из оценки $\langle B(y), W'(y) \rangle > 0$, $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ следует

9) система уравнений $y' = B(y)$, $y \in \mathbb{R}^n$ не имеет ненулевых ограниченных решений.

Если выполнено условие 7, то $B(y) = Ay$. В данном случае отображение $B(y)$ формулой $Ay + \lambda \varepsilon y$, $\lambda \in [0, 1]$ сводим к отображению $Ay + \varepsilon y$ с матрицей $A + \varepsilon I$, не имеющей чисто мнимых собственных значений. При таком изменении, согласно теореме 3 работы [5], сохраняется свойство существования ω -периодических решений системы уравнений (4.2) при любом возмущении f . Поэтому в последующем, без ограничения общности, можно считать, что 9 выполнено и при условии 7.

Теперь теорема 2.2 вытекает из следующей леммы.

Лемма 4.2. Для существования ω -периодических решений системы уравнений (4.2) при любом возмущении f необходимо и достаточно, чтобы $\gamma(Q)\gamma(B) \neq 0$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\gamma(Q)\gamma(B) = 0$. Докажем, что при некотором возмущении f система уравнений (4.2) не имеет ω -периодических решений. Для этого применим метод работы [8, теорема 2, необходимость].

По известным свойствам вращения векторных полей имеем

$$\gamma(Q_1(-B)) = \gamma(Q)\gamma(-B) = (-1)^n \gamma(Q)\gamma(B) = 0.$$

Отсюда в силу теоремы 5.2, приведенной в [2, с. 24], отображение $Q_1(-B)$ можно непрерывно продолжить внутри шара $|y| < 1$ без нулей:

$$F(y) = Q_1(-B(y)) \quad \text{при} \quad |y| = 1 \quad \text{и} \quad F(y) \neq 0 \quad \text{при} \quad |y| < 1.$$

Положим $g(y) = F(y) - Q_1(-B(y))$ при $|y| \leq 1$ и $g(y) = 0$ при $|y| > 1$. Легко проверить, что

$$|y_2| + |Q_1(y_2 - B(y_1)) + g(y_1)| > 0 \quad \text{при} \quad \text{всех} \quad y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n. \quad (4.3)$$

Покажем, что система уравнений

$$x'' = Q_1(x' - B(x)) + g(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (4.4)$$

при некотором $\omega_0 > 0$ не имеет ω_0 -периодических решений. Действительно, в противном случае имеется последовательность $\left(\frac{1}{k}\right)$ -периодических решений $x_k, k = 1, 2, \dots$ системы уравнений (4.4). Следуя схеме доказательства теоремы 2.1, можно показать, что

$$\sup_{k \geq 1} \sup_{t \in \mathbb{R}} (|x_k(t)| + |x'_k(t)|) < \infty.$$

Учитывая (4.4), можно считать, что последовательности вектор-функций x_k, x'_k равномерно сходятся на любом отрезке $[a, b]$:

$$\sup_{a \leq t \leq b} (|x_k(t) - x_0(t)| + |x'_k(t) - x'_0(t)|) \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Кроме того, в силу $\left(\frac{1}{k}\right)$ -периодичности x_k при любых $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^n, k = 1, 2, \dots$ имеем

$$\frac{1}{k} \int_0^{\frac{1}{k}} (\langle x'_k(t), z_1 \rangle + \langle Q(x_k(t), x'_k(t)) + g(x_k(t)), z_2 \rangle) dt = 0.$$

Переходя к пределу, получаем

$$\langle x'_0(0), z_1 \rangle + \langle Q(x_0(0), x'_0(0)) + g(x_0(0)), z_2 \rangle = 0$$

при любых $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^n$. Полученное противоречит (4.3).

В системе уравнений (4.4) произведем замену $x(t) = r^\beta y(r^\nu t)$, где $r = \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{\frac{1}{\nu}}, \beta = 0, \nu = 1$ при $m = 2$ и $\beta = 1, \nu = \frac{1-m}{m-2}$ при $m \neq 2$. Тогда получаем систему уравнений

$$y'' = Q_1(y' - r^{-\nu} B(y)) + r^{-(\beta+\nu)m} g(r^\beta y), \quad y \in \mathbb{R}^n. \quad (4.5)$$

Если решение $y(t)$ системы уравнений (4.5) ω -периодично, то решение $x(t) = r^\beta y(r^\nu t)$ системы уравнений (4.4) ω_0 -периодично. В силу выше доказанного, отсюда следует, что система уравнений (4.5) не имеет ω -периодических решений.

Семейство отображений $Q_1(y_2 - ((1-\lambda)r^{-\nu} + \lambda)B(y_1)), \lambda \in [0, 1]$ в силу условий 8 и 9 удовлетворяет условиям теоремы 3, доказанной в работе [5]. Согласно этой теореме,

так как система уравнений (4.5) не имеет ω -периодических решений, то при некотором возмущении f система уравнений (4.2) не имеет ω -периодических решений.

Достаточность. Пусть $\gamma(Q)\gamma(B) \neq 0$. Тогда $\gamma(Q_1(-B)) \neq 0$ и для системы уравнений (4.2) выполнены все условия теоремы 2 из [6]. Согласно этой теореме система уравнений (4.2) при любом возмущении f имеет ω -периодические решения.

Лемма 4.2 доказана. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. В.К. Каверина, А.И. Перов. *Существование периодического решения у нелинейных дифференциальных уравнений высших порядков* // в материалах Международной конференции «Воронежская зимняя математическая школа – 2018», 226–228 (2018).
2. М.А. Красносельский, П.П. Забрейко. *Геометрические методы нелинейного анализа*. М.: Наука. 1975.
3. Э. Мухамадиев. *Гомотопический тип пространства однородных динамических систем* // Тр. Инст. мат. Нац. акад. наук Беларуси **2**, 119–127 (1999).
4. Э. Мухамадиев, А.Н. Наимов. *Об априорной оценке и существовании периодических решений для одного класса систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений* // Изв. высш. учебн. завед., Мат. **4**, 37–48 (2022).
5. Э. Мухамадиев, А.Н. Наимов. *Об априорной оценке периодических решений системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка* // Изв. высш. учебн. завед., Мат. **8**, 45–54 (2024).
6. Э. Мухамадиев, А.Н. Наимов. *О разрешимости периодической задачи для системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка* // Диффер. уравн. **60**:3, 312–321 (2024).
7. Э. Мухамадиев, А.Н. Наимов. *О разрешимости периодической задачи для двумерной системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка* // Диффер. уравн. проц. управл. **2024**:2, 46–58 (2024).
8. А.Н. Наимов, М.В. Быстрецкий. *О существовании периодических решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с квазиоднородной нелинейностью* // Диффер. уравн. **60**:5, 714–720 (2024).

Эргашбой Мухамадиев,
Вологодский государственный университет,
ул. Ленина, 15,
160000, г. Вологда, Россия
E-mail: emuhamadiev@rambler.ru

Алижон Набиджанович Наимов,
Вологодский государственный университет,
ул. Ленина, 15,
160000, г. Вологда, Россия
E-mail: naimovan@vogu35.ru