ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 18 № 2 (2026). С. 58-69.

УДК 517.929

О ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМ С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ И ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

В.П. МАКСИМОВ

Аннотация. Рассматриваются динамические модели с последействием в форме функционально–дифференциальных уравнений с дробной производной. Эти модели охватывают процессы, в которых состояние системы в некоторые моменты времени может меняться скачкообразно, что интерпретируется как результат импульсных воздействий (шоков). Траектории таких систем могут иметь разрывы в отдельные моменты времени, в промежутках между которыми поведение системы описывается дифференцируемыми функциями, которые удовлетворяют уравнению в обычном смысле. Приводится постановка общей задачи управления относительно заданной системы целевых функционалов. Для этой задачи формулируются условия разрешимости в классе импульсных управлений, L_2–управлений и их гибридов. Предлагаемый подход к исследованию систем с дробной производной основан на систематическом использовании теории абстрактного функционально–дифференциального уравнения и обладает определенными преимуществами при исследовании систем и процессов с последействием.

Ключевые слова: функционально–дифференциальные системы с дробной производной, системы с последействием, импульсные системы, задачи управления.

Mathematics Subject Classification: 34K06, 34K30, 34K35, 34K45

1. Введение

Уравнения и системы с дробными производными, несмотря на обилие и разнообразие полученных в течение последних 10–15 лет результатов, продолжают оставаться в центре внимания как российских, так и зарубежных исследователей. Общее число работ этого направления превысило сто тысяч. В том числе продолжает расширяться область прикладных задач, для которых использование дробных производных оказывается не только оправданным, но и целесообразным. Наряду с традиционными сферами приложения моделей с дробными производными, отмеченными в известном обзоре [2] (процессы релаксации в диэлектриках, поведение электрохимических сред, физика полупроводников, физика плазмы, процессы в микро– и нано–структурированных средах, процессы обработки сигналов), появляются новые области приложений, в частности, связанные с динамическими моделями экономики [23], [12], [20], [21].

Мы отметим здесь только относительно новые работы, так или иначе связанные с задачами управления. В работе [13] исследуются модели мультиагентных систем, для которых динамика агентов описывается дробной производной Капуто переменного порядка. Рассматривается случай, когда обмен информацией между агентами происходит только в изначально заданное время. При этом исследованы два случая мультиагентных систем: без лидера и с лидером. Отметим, что правые части уравнений в обоих случаях определяются локально определенными операторами (операторами Немыцкого), не обладающими

V.P. Maksimov, On control problems for fractional systems with aftereffect.

© Максимов В.П. 2026.

Поступила 17 февраля 2025 г.

памятью. Обращают на себя внимание работы, посвященные получению аналогов принципа максимума Понтрягина для задач оптимального управления системами с дробными производными, см., например, [10].

Отдельно отметим цикл исследований (см. работу [16] и цитированную в ней литературу), посвященных разработке методов построения оптимальных стратегий по принципу обратной связи в дифференциальных играх и задачах оптимального управления.

В отличие от большинства работ, посвященных задачам импульсного управления, см. обзор [24], мы рассматриваем системы с дробной производной, в которых памятью обладают не только оператор дробного дифференцирования, но и оператор, определяющий правую часть уравнения, что представляется более естественным. Кроме того, при постановке задачи управления мы используем целевой функционал достаточно общего вида, включающий случаи многоточечных и интегральных целевых показателей, а также оператор, реализующий программные управления, который тоже обладает памятью.

2. Предварительные сведения

Пусть $\mathbf{D}$ и $\mathbf{B}$ — банаховы пространства, причем $\mathbf{D}$ изоморфно прямому произведению $\mathbf{B}\times\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$ ($\mathbf{D}\simeq\mathbf{B}\times\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$). Ниже всюду будем считать, что норма элемента $\{z,a\}\in\mathbf{B}\times\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$ определена равенством

$$\|\{z,a\}\|_{\mathbf{B}\times\mathbb{R}^{\mathbf{n}}}=\|z\|_{\mathbf{B}}+|a|_{\mathbb{R}^n},$$

где $|\cdot|_{\mathbb{R}^n}$ — норма в $\mathbb{R}^n$.

Уравнение

$$\mathcal{L}x=f \tag{2.1}$$

с линейных ограниченным оператором $\mathcal{L}:\mathbf{D}\to\mathbf{B}$ называется линейным абстрактным функционально–дифференциальным уравнением (АФДУ). Теория уравнения (2.1) систематически изложена в [15], [1]. Зафиксируем изоморфизм $J=\{\Lambda,Y\}:\mathbf{B}\times\mathbb{R}^{\mathbf{n}}\to\mathbf{D}$ и обозначим обратный оператор $J^{-1}=[\delta,r]$. Здесь $\Lambda:\mathbf{B}\to\mathbf{D}$, $Y:\mathbb{R}^n\to\mathbf{D}$ и $\delta:\mathbf{D}\to\mathbf{B}$, $r:\mathbf{D}\to\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$ — соответствующие компоненты операторов J и J^{-1}:

$$J\{z,a\}=\Lambda z+Ya\in\mathbf{D},\quad z\in\mathbf{B},\quad a\in\mathbb{R}^n,$$
$$J^{-1}x=\{\delta x,rx\}\in\mathbf{B}\times\mathbb{R}^n,\quad x\in\mathbf{D}.$$

Система

$$\delta x=z,\qquad rx=a$$

для каждого $\{z,a\}\in\mathbf{B}\times\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$ имеет единственное решение

$$x=\Lambda z+Ya. \tag{2.2}$$

Равенство (2.2) приводит к представлению оператора $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L}x=\mathcal{L}(\Lambda z+Ya)=\mathcal{L}\Lambda z+\mathcal{L}Ya=Qz+Aa,$$

где так называемая главная часть оператора $\mathcal{L}$, — оператор $Q:\mathbf{B}\to\mathbf{B}$, и конечномерный оператор $A:\mathbb{R}^n\to\mathbf{D}$ определены равенствами $Q=\mathcal{L}\Lambda$ и $A=\mathcal{L}Y$. Общая теория уравнения (2.1) построена в предположении, что Q — фредгольмов оператор (представляет сумму обратимого и вполне непрерывного операторов [4]).

Общей краевой задачей называется система

$$\mathcal{L}x=f,\qquad \ell x=\beta, \tag{2.3}$$

где $\ell=(\ell^1,\dots,\ell^N):\mathbf{D}\to\mathbb{R}^N$ — линейный ограниченный вектор–функционал с линейно независимыми компонентами. Краевая задача (2.3) — один из центральных объектов теории АФДУ. В случае, когда $N=n$ и задача (2.3) однозначно разрешима для любых $f\in\mathbf{B}$

и $\beta \in \mathbb{R}^n$, имеет место представление решения в виде

$$x = G_\ell f + X\beta. \tag{2.4}$$

Оператор $G_\ell : \mathbf{B} \to \mathbf{D}$ называется оператором Грина задачи (2.3), оператор $X : \mathbb{R}^n \to \mathbf{D}$ называется фундаментальным вектором. Необходимым и достаточным условием однозначной разрешимости задачи (2.3) является обратимость матрицы ℓX. В специальном случае $\ell = r$ задача (2.3) называется главной краевой задачей.

Рассмотрим абстрактную задачу управления

$$\mathcal{L}x = Fu + f, \qquad rx = a, \qquad \ell x = \beta, \tag{2.5}$$

где управление u принадлежит гильбертову пространству $\mathbf{H}$, $F : \mathbf{H} \to \mathbf{B}$ — линейный ограниченный оператор, $\ell = (\ell_1, \dots \ell_N)$ — целевой вектор–функционал, определяющий цель управления : $\ell x = \beta$. Будем предполагать, что главная краевая задача

$$\mathcal{L}x = f, \qquad rx = a \tag{2.6}$$

однозначно разрешима. Для формулировки теоремы о разрешимости задачи (2.5) определим линейный ограниченный функционал $\lambda_i : \mathbf{H} \to \mathbb{R}, i = 1, \dots, N$, равенством $\lambda_i u = \ell_i G_r F u$, где G_r — оператор Грина задачи (2.6). Очевидно, значение $\lambda_i u$ может быть записано в форме $\lambda_i u = \langle \nu_i, u \rangle$, где скобки $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ означают скалярное произведение в $\mathbf{H}$, и ν_i — элемент пространства $\mathbf{H}$, порождающий функционал $\lambda_i : \mathbf{H} \to \mathbb{R}$.

Теорема 2.1 ([18])**.** *Задача управления* (2.5) *разрешима для любых* $f \in \mathbf{B}$ *и* $a \in \mathbb{R}^n$, $\beta \in \mathbb{R}^N$ *тогда и только тогда, когда обратима матрица* $W \stackrel{def}{=} \{\langle \nu_i, \nu_j \rangle\}_{i,j=1,\dots,N}$. *Управление* $u_0 = \sum_{i=1}^N \nu_i c_i$, *где* $\mathrm{col}(c_i, \dots, c_N) = W^{-1}[\beta - \ell G_r f - \ell X a]$ *решает задачу* (2.5).

3. Импульсные системы

Устойчивый интерес к импульсным системам с производными целого порядка возник в середине XX века, их систематическое исследование связано с многими известными именами, ссылки на основополагающие результаты в этой области можно найти в главе 3 монографии [1]. Траектории таких систем могут иметь разрывы в отдельные моменты времени, в промежутках между которыми поведение системы описывается дифференцируемыми функциями, которые удовлетворяют уравнению в обычном смысле. Современная теория импульсных систем базируется на теории обобщенных функций (распределений), основы которой были заложены С.Л. Соболевым и Л. Шварцем. Другой подход к изучению дифференциальных уравнений с разрывными решениями связан с так называемыми «обобщенными обыкновенными дифференциальными уравнениями», исследование которых было начато Я. Курцвейлем. В настоящее время эта теория получила широкое развитие. Согласно принятым подходам, импульсные уравнения рассматриваются в классе функций ограниченной вариации. В этом случае решение понимается как функция ограниченной вариации, удовлетворяющая интегральному уравнению с интегралом Лебега — Стилтьеса или Перрона — Стилтьеса. Интегральные уравнения в пространстве функций ограниченной вариации стали предметом отдельного интереса и подробно изучаются в [22] и последующих работах. Напомним, что функция ограниченной вариации может быть представлена в виде суммы абсолютно непрерывной функции, функции скачков и сингулярной составляющей (непрерывной функции, производная которой равна нулю почти всюду). Решения уравнений с импульсным воздействием, которые рассматриваются ниже, не содержат сингулярной составляющей и могут иметь разрывы только в конечном числе заданных точек.

Мы здесь следуем подходу к импульсным системам, предложенному в работе [14], который основан на рассмотрении уравнений на таком пространстве, которое является конечномерным расширением традиционного пространства абсолютно непрерывных функций. Этот подход не использует сложную теорию обобщенных функций, оказался богатым по содержанию и находит множество применений в тех случаях, когда вопрос о сингулярной составляющей не возникает, в частности, в некоторых задачах экономической динамики [15]. С точки зрения теории АФДУ, рассматриваемые импульсные системы являются одним из конкретных представителей уравнений, рассматриваемых на конечномерных расширениях традиционных пространство. При этом специфика таких уравнений определяется не только спецификой этих пространств, но и конкретными свойствах изоморфизма $J : \mathbf{D} \to \mathbf{B} \times \mathbb{R}^n$. Для уравнений с производными целого порядка разнообразные примеры таких уравнений можно найти в главе 3 монографии [1].

Напомним сначала конструкцию основного пространства траекторий для импульсных систем с производной целого порядка.

Пусть $\mathbf{L}$ — пространство суммируемых по Лебегу функций $z : [0, T] \to \mathbb{R}^n$ с нормой

$$\|z\|_{\mathbf{L}} = \int_0^T |z(t)|_{\mathbb{R}^n}\, dt;$$

$\mathbf{AC}$ — пространство абсолютно непрерывных функций $y : [0, T] \to \mathbb{R}^n$ с нормой

$$\|y\|_{\mathbf{AC}} = \|\dot{y}\|_{\mathbf{L}} + |y(0)|_{\mathbb{R}^n};$$

$\mathbf{L}_\infty$ — пространство измеримых и ограниченных в существенном функций $z : [0, T] \to \mathbb{R}^n$ с нормой

$$\|z\|_{\mathbf{L}_\infty} = \mathrm{vraisup}(|z(t)|_{\mathbb{R}^n} : t \in [0, T]);$$

$\mathbf{AC}_\infty$ — пространство абсолютно непрерывных функций $y : [0, T] \to \mathbb{R}^n$ с ограниченной в существенном производной $\dot{y}$ и нормой

$$\|y\|_{\mathbf{AC}_\infty} = \|\dot{y}\|_{\mathbf{L}_\infty} + |y(0)|_{\mathbb{R}^n}.$$

Зафиксируем дискретный набор точек $t_k \in (0, T)$, $0 < t_1 < \ldots < t_m < T$. Рассмотрим пространство $\mathbf{D} = \mathbf{DS}(m)$ функций $x : [0, T] \to \mathbb{R}^n$, представимых в виде

$$x(t) = \int_0^t z(s)\, ds + x(0) + \sum_{k=1}^m \chi_{[t_k, T]}(t) \Delta x(t_k),$$

где $z \in \mathbf{L}$, $\Delta x(t_k) = x(t_k) - x(t_k - 0)$, $\chi_{[t_k,T]}(t)$ — характеристическая функция отрезка $[t_k, T]$. В таком случае имеем $\mathbf{D} \simeq \mathbf{L} \times \mathbb{R}^{n+mn}$ с изоморфизмом $J = \{\Lambda, Y\}$,

$$(\Lambda z)(t) = \int_0^t z(s)\, ds; \qquad (Y a)(t) = a^0 + \sum_{k=1}^m \chi_{[t_k,T]}(t) a^k; \qquad a = \mathrm{col}(a^0, \ldots, a^m).$$

При этом для $J^{-1} = \{\delta, r\}$ имеем

$$\delta x = \dot{x}, \qquad rx = \mathrm{col}(x(0), \Delta x(t_1), \ldots, \Delta x(t_m)).$$

Результаты исследования задач управления для широкого класса импульсных систем с обыкновенной производной и пространством траекторий $\mathbf{D} = \mathbf{DS}(m)$ представлены в работах [5], [18].

Перейдем к определению основных пространств и изоморфизма, позволяющих рассматривать импульсные системы с точки зрения теории АФДУ в случае производной дробного порядка. При этом нам понадобятся два следующих хорошо известных оператора: оператор дробного дифференцирования Капуто порядка $\alpha \in (0,1)$ [11], [17],

$$(\mathcal{D}^{\alpha}x)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^t \frac{\dot{x}(s)}{(t-s)^{\alpha}}\, ds,$$

и оператор дробного интегрирования Римана — Лиувилля того же порядка [11], [17],

$$(\mathcal{J}^{\alpha}z)(t) = (\Lambda z)(t) = \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} z(s)\, ds.$$

Здесь $\Gamma(\cdot)$ — Гамма–функция Эйлера.

По-прежнему считаем фиксированным дискретный набор точек $t_k \in (0,T)$, $0 < t_1 < \ldots < t_m < T$ («моменты импульсного воздействия»).

Рассмотрим пространство $\mathbf{D} = \mathbf{DS}_{\infty}(m)$ функций $x : [0,T] \to \mathbb{R}^n$, представимых в виде

$$x(t) = (\mathcal{J}^{\alpha}z)(t) + x(0) + \sum_{k=1}^{m} \chi_{[t_k,T]}(t)\Delta x(t_k),$$

где $z \in \mathbf{L}_{\infty}$, $\Delta x(t_k) = x(t_k) - x(t_k - 0)$, $\chi_{[t_k,T]}(t)$ — характеристическая функция отрезка $[t_k, T]$. В таком случае имеем $\mathbf{D} \simeq \mathbf{L}_{\infty} \times \mathbb{R}^{n+mn}$,

$$(\Lambda z)(t) = (\mathcal{J}^{\alpha}z)(t); \qquad (Ya)(t) = a^0 + \sum_{k=1}^{m} \chi_{[t_k,T]}(t)a^k; \qquad a = \operatorname{col}(a^0, \ldots, a^m),$$
$$\delta x = \mathcal{D}^{\alpha}x; \qquad rx = \operatorname{col}(x(0), \Delta x(t_1), \ldots, \Delta x(t_m)).$$

Рассмотрим импульсную систему

$$(\mathcal{D}^{\alpha}x)(t) = (\mathcal{T}x)(t) + f(t), \qquad t \in [0,T], \tag{3.1}$$

где $\mathcal{T} : \mathbf{DS}_{\infty}(m) \to \mathbf{L}_{\infty}$ — линейный ограниченный вольтерров оператор [1], удовлетворяющий условию: существует такое $\rho > 0$, что неравенство

$$|(\mathcal{T}y)(t)| \leqslant \rho \max_{s\in[0,t]} |y(s)|, \qquad t \in [0,T],$$

выполняется для любого $y \in \mathbf{AC}^{\alpha}_{\infty}$. Здесь $\mathbf{AC}^{\alpha}_{\infty}$ — пространство функций $y : [0,T] \to \mathbb{R}^n$, представимых в виде

$$y(t) = y(0) + (\mathcal{J}^{\alpha}z)(t),$$

где $z \in \mathbf{L}_{\infty}$, с нормой

$$\|y\|_{\mathbf{AC}^{\alpha}_{\infty}} = \|\mathcal{D}^{\alpha}y\|_{\mathbf{L}_{\infty}} + |y(0)|_{\mathbb{R}^n}.$$

Всюду ниже считаем, что норма $|\cdot|$ в $\mathbb{R}^n$ обладает свойством монотонности: для любых $a = \operatorname{col}(a_1, \ldots, a_n)$, $b = \operatorname{col}(b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, таких что $|a_i| \leqslant |b_i|$, $i = 1, \ldots, n$, имеем $|a| \leqslant |b|$.

Кроме того, предполагается, что оператор $K = \mathcal{T}J^{\alpha}$ является регулярным [3, с. 99], интегральным оператором Вольтерра:

$$(Kz)(t) = \int\limits_0^t K(t,s)z(s)\, ds.$$

В [9] показано, что оператор $(I-K)^{-1}$ существует и представим в виде сходящегося ряда Неймана (здесь и ниже I — тождественный оператор. Как известно [3, Теорема 2.2, с.

119], в таком случае $(I-K)^{-1} = I + R$, где R — резольвентный оператор, который также является интегральным оператором Вольтерра:

$$(Rf)(t) = \int_0^t R(t,s)f(s)\,ds$$

с резольвентным ядром $R(t,s)$.

Примером оператора $\mathcal{T}$, удовлетворяющего сформулированным условиям, является оператор

$$(\mathcal{T}x)(t) = P(t)x_h(t), \qquad h(t) \leqslant t, \tag{3.2}$$

где столбцы $(n \times n)$–матрицы P принадлежат пространству $\mathbf{L}_\infty$,

$$x_h(t) = \begin{cases} x[h(t)], & t \in [0,T], \\ 0, & t \notin [0,T], \end{cases} \tag{3.3}$$

функция $h : [0,\, T] \to R$ измерима.

Главной краевой задачей для системы (3.1) является задача

$$\mathcal{D}^\alpha x = \mathcal{T}x + f; \qquad x(0) = a^0, \qquad \Delta x(t_1) = a^1, \quad \dots, \quad \Delta x(t_m) = a^m. \tag{3.4}$$

В [9] показано, что при $a^k = 0$, $k = 0, \dots, m$ эта задача однозначно разрешима для любого $f \in \mathbf{L}_\infty$ и ее решение имеет представление

$$x(t) = (Cf)(t) = \int_0^t C(t,s)f(s)\,ds, \tag{3.5}$$

где $C(t,s)$ — матрица Коши, определенная равенством

$$C(t,s) = \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}E + \int_s^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} R(\tau,s)\,d\tau \tag{3.6}$$

(здесь и ниже E — единичная $(n \times n)$–матрица).

Введем обозначения

$$\mathcal{A}^0(t) = (\mathcal{T}E)(t), \qquad \mathcal{A}^k(t) = (\mathcal{T}(E\chi_{[t_k,T]}))(t), \qquad k = 1, \dots, m.$$

Заметим, что для $(n\times n)$–матрицы X со столбцами X_i из $\mathbf{DS}_\infty(m)$ запись $(\mathcal{T}X)(t)$ означает матрицу $((\mathcal{T}X_1)(t), \dots, (\mathcal{T}X_n)(t))$.

Определим матрицы $X^0(t)$, $X^1(t)$, …, $X^m(t)$ равенствами

$$X^0(t) = E + \int_0^t C(t,s)\mathcal{A}^0(s)\,ds, \tag{3.7}$$

$$X^k(t) = \chi_{[t_k,T]}(t)E + \int_0^t C(t,s)\mathcal{A}^k(s)\,ds, \quad k = 1, \dots, m.$$

Получим представление решения задачи (3.4) для любых a^k, $k = 0, \dots, m$.

Теорема 3.1. *Задача (3.4) однозначно разрешима при любых $f \in \mathbf{L}_\infty$ и $a^k \in \mathbb{R}^n$, $k = 0, 1, \ldots, m$, и ее решение $x \in \mathbf{DS}_\infty(m)$ имеет представление*

$$x(t) = (X^0(t), X^1(t), \ldots, X^m(t)) \begin{pmatrix} a^0 \\ a^1 \\ \ldots \\ a^m \end{pmatrix} + \int_0^t C(t,s) f(s)\, ds. \tag{3.8}$$

Доказательство. В доказательстве нуждается только представление решения однородной системы (3.1) (случай $f = 0$). Рассмотрим задачу

$$\mathcal{D}^\alpha x = \mathcal{T} x; \qquad x(0) = a^0, \qquad \Delta x(t_1) = 0, \quad \ldots, \quad \Delta x(t_m) = 0. \tag{3.9}$$

Замена $y(t) = x(t) - a^0$ сводит эту задачу к задаче

$$\mathcal{D}^\alpha y = \mathcal{T} y + \mathcal{T} a^0; \qquad y(0) = 0, \qquad \Delta y(t_1) = 0, \quad \ldots, \quad \Delta y(t_m) = 0. \tag{3.10}$$

Для решения этой задачи имеем

$$y(t) = \int_0^t C(t,s)(\mathcal{T} a^0)(s)\, ds = \int_0^t C(t,s)(\mathcal{T} E)(s)\, ds\, a^0 = \int_0^t C(t,s)\mathcal{A}^0(s)\, ds\, a^0. \tag{3.11}$$

Отсюда, возвращаясь к исходной фазовой переменной и обозначая решение задачи (3.9) через x^0, получаем

$$x^0(t) = a^0 + \int_0^t C(t,s)\mathcal{A}^0(s)\, ds\, a^0 = X^0(t)\, a^0. \tag{3.12}$$

Повторяя эти рассуждения для задачи

$$\mathcal{D}^\alpha x = \mathcal{T} x; \quad x(0) = 0, \qquad \Delta x(t_1) = a^1, \qquad \Delta x(t_2) = 0, \quad \ldots, \quad \Delta x(t_m) = 0 \tag{3.13}$$

с использованием замены $y(t) = x(t) - \chi_{[t_1,T]}(t) a^1$, получаем представление решения задачи (3.13):

$$x^1(t) = \chi_{[t_1,T]}(t) a^1 + \int_0^t C(t,s)\mathcal{A}^1(s)\, ds\, a^1 = X^1(t)\, a^1. \tag{3.14}$$

Аналогичное представление получаем для решения задачи

$$\mathcal{D}^\alpha x = \mathcal{T} x; \qquad x(0) = 0, \qquad \Delta x(t_1) = 0, \ldots, \Delta x(t_k) = a^k, \ldots, \Delta x(t_m) = 0 : \tag{3.15}$$

$$x^k(t) = \chi_{[t_k,T]}(t) a^k + \int_0^t C(t,s)\mathcal{A}^k(s)\, ds\, a^k = X^k(t)\, a^k, \quad k = 2, \ldots, m.$$

Остается заметить, что $x(t) = \sum_{k=0}^m x^k(t)$.

□

4. Задача импульсного управления

Поставим для системы (3.1) задачу управления, считая управляющими воздействиями скачки траектории $\Delta x(t_k)$ в моменты времени t_k, $k = 1, \ldots, m$.

Будем считать заданным начальное состояние системы:

$$x(0) = a^0, \tag{4.1}$$

а цель управления зададим равенством

$$\ell x \equiv \sum_{j=1}^{\mu} A_j x(\tau_j) + \int_0^T B(\tau)x(\tau)\,d\tau + \sum_{k=1}^{m} H_k \Delta x(t_k) = \beta \in \mathbb{R}^N, \tag{4.2}$$

где τ_j, $j = 1, \ldots, \mu$, — фиксированные точки из $[0, T]$ (эти точки, вообще говоря, никак не связаны с точками t_k, $k = 1, \ldots, m$, введенными ранее, A_j и H_k — постоянные $(N \times n)$–матрицы, $B(\cdot)$ — $(N \times n)$–матрица с суммируемыми элементами, β — заданный постоянный вектор целевых значений.

Перепишем представление (3.8) в виде

$$x(t) = X^0(t)a^0 + \sum_{k=1}^{m} X^k(t)a^k + \int_0^t C(t,s)f(s)\,ds. \tag{4.3}$$

В этом представлении векторы $a^k \in \mathbb{R}^n$, $k = 1, \ldots, m$ являются свободными и подлежат определению для достижения цели (4.2).

Для формулировки условий разрешимости задачи (3.1), (4.1), (4.2) введем обозначения:

$$\Xi^k = \sum_{j=1}^{\mu} A_j X^k(\tau_j) + \int_0^T B(\tau)X^k(\tau)\,d\tau + H^k, \quad k = 1, \ldots, m, \tag{4.4}$$

$$\beta_1 = \left[\sum_{j=1}^{\mu} A_j X^k(\tau_j)\right] a^0 + \int_0^T B(\tau)X^0(\tau)\,d\tau\, a^0, \tag{4.5}$$

$$\beta_2 = \sum_{j=1}^{\mu} A_j \int_0^{\tau_j} C(\tau_j, s)f(s)\,ds + \int_0^T \int_s^T B(\tau)C(\tau,s)\,d\tau\, f(s)\,ds. \tag{4.6}$$

Теорема 4.1. *Разрешимость задачи* (3.1), (4.1), (4.2) *эквивалентна разрешимости линейной системы*

$$\sum_{k=1}^{m} \Xi^k a^k = \beta - \beta_1 - \beta_2, \tag{4.7}$$

где $(N \times n)$–матрицы Ξ^k и векторы β_1, $\beta_2 \in \mathbb{R}^N$ определены равенствами (4.4), (4.5), (4.6). *Каждое решение $(a_0^1, \ldots, a_0^m)$, $a_0^k \in \mathbb{R}^n$ этой системы порождает решение $x_0 \in \mathbf{DS}_\infty(m)$ задачи* (3.1), (4.1), (4.2) *, при этом $\Delta x_0(t_k) = a_0^k$.*

Доказательство. Используя представление (4.3), найдем значение целевого вектор–функционала ℓ (4.2) на правой части этого равенства. Для этого последовательно вычисляем ℓ на каждом из трех его слагаемых, обозначая эти составляющие $\ell_1 x$, $\ell_2 x$, $\ell_3 x$:

$$\ell_1 x = \sum_{j=1}^{\mu} A_j X^0(\tau_j) a^0 + \sum_{j=1}^{\mu} \sum_{k=1}^{m} A_j X^k(\tau_j) a^k + \sum_{j=1}^{\mu} A_j \int\limits_0^{\tau_j} C(\tau_j, s) f(s)\, ds,$$

$$\ell_2 x = \int\limits_0^T B(\tau) X^0(\tau)\, d\tau\, a^0 + \int\limits_0^T B(\tau) \sum_{k=1}^{m} X^k(\tau) d\tau\, a^k$$
$$+ \int\limits_0^T B(\tau) \int\limits_0^{\tau} C(\tau, s) f(s) ds\, d\tau,$$

$$\ell_3 x = \sum_{k=1}^{m} H^k a^k.$$

Приводя подобные в выражении $\ell x = \ell_1 x + \ell_2 x + \ell_3 x$ относительно сомножителей a^0, a^k и интегральных операторов, действующих на $f(\cdot)$, меняя порядок суммирования в двойных суммах и порядок интегрирования в двойных интегралах, получаем запись целевого равенства (4.2) в виде (4.7). □

Заметим, что в случае $nm > N$ свобода в выборе импульсных управляющих переменных оказывается избыточной. В таком случае в число целевых условий можно включить дополнительные условия равенства нулю скачков отдельных компонент траектории ($\Delta x_i(t_k) = 0$).

Мы здесь не обсуждаем вопросы практической реализации импульсных воздействий, т.е. соответствующих скачков траектории. Отметим только, что в задачах экономической динамики такие скачки имеют естественную интерпретацию, например, отрицательный скачок некоторой компоненты траектории означает одномоментную передачу производственных фондов (капитала) из соответствующей отрасли в другую отрасль, для которой скачок компоненты траектории в этот же момент времени будет положительным. При равенстве абсолютных величин упомянутых скачков такая передача фондов не требует дополнительных ресурсов. Для систем с производными целого порядка эти вопросы подробно обсуждаются в [5], [6, с. 270-273], [7, с. 68-70].

5. Задача смешанного управления

Рассмотрим функционально–дифференциальную систему управления с дробной производной

$$\mathcal{D}^{\alpha} x = \mathcal{T} x + F u + f, \tag{5.1}$$

где $F : \mathbf{L}_2 \to \mathbf{L}_\infty$ — линейный ограниченный вольтерров оператор, реализующий управляющие воздействия $u \in \mathbf{L}_2$. Здесь $\mathbf{L}_2$ — пространство суммируемых с квадратом функций $v : [0, T] \to \mathbb{R}^q$ со скалярным произведением $\langle u, v\rangle = \int\limits_0^T u'(t) v(t)\, dt$ ($(\cdot)'$ — символ транспонирования).

По-прежнему будем считать, что начальное состояние системы задано равенством (4.1) а цель управления — равенством (4.2).

В рассматриваемом случае все множество траекторий системы (5.1) описывается равенством

$$x(t) = X^0(t)a^0 + \sum_{k=1}^{m} X^k(t)a^k + \int_0^t C(t,s)(Fu)(s)\,ds + \int_0^t C(t,s)f(s)\,ds. \tag{5.2}$$

В этой записи смешанное управляющее воздействие содержит импульсную конечномерную составляющую $(a^1,\dots,a^m)' \in \mathbb{R}^{nm}$ и составляющую $u \in \mathbf{L}_2$.

Для формулировки условий разрешимости задачи управления (5.1),(4.1),(4.2) введем дополнительные обозначения. Обозначим через Θ_0 $(N \times q)$–матрицу, определяющую линейный ограниченный вектор–функционал $\Theta_0 : \mathbf{L}_2 \to \mathbb{R}^N$:

$$\Theta_0 u = \int_0^T \Theta_0(s)u(s)\,ds = \int_0^T \int_s^T B(\tau)C(\tau,s)\,d\tau(Fu)(s)\,ds. \tag{5.3}$$

Пусть, далее, Θ_j — $(N \times q)$–матрица, определяющая линейный ограниченный вектор-функционал $\Theta_j : \mathbf{L}_2 \to \mathbb{R}^N$:

$$\Theta_j u = \int_0^T \Theta_j(s)u(s)\,ds = \int_0^T \chi_j(s)C(\tau_j,s)(Fu)(s)\,ds, \tag{5.4}$$

где $\chi_j(\cdot)$ — характеристическая функция отрезка $[0,\tau_j]$, $j = 1,\dots,\mu$,

$$M(s) = \Theta_0(s) + \sum_{j=1}^{\mu} A_j\Theta_j(s); \qquad W = \int_0^T M(s)M'(s)\,ds. \tag{5.5}$$

Теорема 5.1. *Задача управления (5.1),(4.1),(4.2) разрешима тогда и только тогда, когда линейная алгебраическая система*

$$\sum_{k=1}^{m} \Xi^k a^k + Wd = \beta - \beta_1 - \beta_2, \tag{5.6}$$

где $(N \times n)$–матрицы Ξ^k, $k = 1,\dots,m$ и векторы β_1, $\beta_2 \in \mathbb{R}^N$ определены равенствами (4.4), (4.5), (4.6), соответственно, разрешима относительно $(nm+N)$–вектора $(a^1,\dots,a^m,d)'$. Каждое решение $(a_0^1,\dots,a_0^m,d_0)'$ системы (5.6) определяет смешанное управление, решающее задачу управления (5.1), (4.1), (4.2): $\Delta x(t_k) = a_0^k$, $k = 1,\dots,m$, $u(t) = M'(t)d_0$.

Доказательство. Введение в систему управления $u \in \mathbf{L}_2$ приводит к дополнительному слагаемому $\int_0^t C(t,s)(Fu)(s)\,ds$ в описании (5.2) множества всех траекторий и необходимости вычисления значения целевого вектор–функционала на этом слагаемом. Такое вычисление приводит к двум дополнительным по отношению к случаю импульсного управления (Теорема 4.1) слагаемым:

$$\ell_4 x = \int_0^T B(\tau) \int_0^\tau C(\tau,s)(Fu)(s)\,ds d\tau, \tag{5.7}$$

$$\ell_5 x = \sum_{j=1}^{\mu} A_j \int_0^{\tau_j} C(\tau_j,s)(Fu)(s)\,ds. \tag{5.8}$$

С учетом введенных обозначений Θ_0 и Θ_j получаем

$$\ell_4 x + \ell_5 x = \int_0^T [\Theta_0(s) + \sum_{j=1}^{\mu} A_j \Theta_j(s)] u(s)\, ds = \int_0^T M(s) u(s)\, ds. \tag{5.9}$$

Пусть L — линейное многообразие, натянутое на столбцы матрицы M', а $L^{\perp}$ — его ортогональное дополнение в $\mathbf{L}_2$. Возьмем произвольную линейную комбинацию столбцов M': $g = M'd$, $d \in \mathbb{R}^N$. Очевидно $g \in L$. В силу теоремы об ортогональном разложении в гильбертовом пространстве, любое управление u может быть представлено в виде $u = g + h$, где $h \in L^{\perp}$. При этом $\int_0^T M(s)h(s)\, ds = 0$, и слагаемое h дает нулевой вклад в значение целевого вектор–функционала. Таким образом, слагаемое $\int_0^T M(s)u(s)\, ds$ в составе значений целевого вектор–функционала можно без потери общности заменить слагаемым Wd и получить систему (5.6).

□

Отметим, что в случае обратимости матрицы W управление

$$u(t) = M'(t) W^{-1} (\beta - \beta_1 - \beta_2 - \sum_{k=1}^{m} \Xi^k a^k)$$

решает задачу (5.1), (4.1), (4.2) при любых $a^k = \Delta x(t_k)$, $k = 1, \dots, m$.

Сведение задачи управления (5.1), (4.1), (4.2) к линейной алгебраической системе (5.6) открывает возможность применения конструктивных методов исследования, разработанных для задач управления функционально–дифференциальными системами с производными целого порядка (см. [5]; [1, гл.6]), и реализуемых с применением современной компьютерной технологии — доказательного вычислительного эксперимента (ДВЭ). Отметим, что ключевым моментом этого сведения является использование представления множества всех траекторий системы управления с использованием матрицы Коши. В общем случае отсутствие явного представления матрицы Коши приводит к необходимости использовать в рамках ДВЭ ее аппроксимации с гарантированной оценкой погрешности. Способы и алгоритмы такого построения для некоторых весьма широких классов функционально-дифференциальных систем описаны в [8], [19].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Н.В. Азбелев, В.П. Максимов, Л.Ф. Рахматуллина. *Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения.* М.: Ин-т компьютерн. иссл. 2002.
2. А. Г. Бутковский, С. С. Постнов, Е. А. Постнова. *Дробное интегро-дифференциальное исчисление и его приложения в теории управления. II. Дробные динамические системы: моделирование и аппаратная реализация* // Автоматика и телемеханика 5, 3–34 (2013).
3. П.П. Забрейко, А.И. Кошелев, М.А. Красносельский, С.Г. Михлин, Л.С. Раковщик, В.Я. Стеценко. *Интегральные уравнения.* М.: Наука. 1968.
4. С.Г. Крейн. *Линейные уравнения в банаховом пространстве.* М.: Наука. 1971.
5. В.П. Максимов, А.Н. Румянцев. *Краевые задачи и задачи импульсного управления в экономической динамике* // Изв. высш. учебн. завед., Мат. 5, 56–71 (1993).
6. В.П. Максимов. *Вопросы общей теории функционально-дифференциальных уравнений. Избранные труды.* Пермь: ПГУ, ПСИ, ПССГК. 2003.
7. В.П. Максимов. *Современные математические методы в экономике. Задачи управления и краевые задачи для линейных систем.* Пермь: ПГНИУ. 2014.

8. В.П. Максимов. *К вопросу о построении и оценках матрицы Коши для систем с последействием* // Тр. Инст. мат. мех. УрО Росс. акад. наук **25**:3, 153–162 (2019).
9. В.П. Максимов. *Матрица Коши для системы с дробной производной и последействием* // Прикл. мат. вопр. упр. 3, 53–63 (2024).
10. К.Б. Мансимов, Ж.Б. Ахмедова. *Аналог принципа максимума Понтрягина в задаче оптимального управления системой дифференциальных уравнений с дробной производной Капуто и многоточечным критерием качества* // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика 3(58), 5–10 (2022).
11. А.И. Нахушев. *Элементы дробного исчисления и их приложения.* Нальчик: НИИ ПМА КБНЦ РАН. 2000.
12. В.В. Тарасова, В.Е. Тарасов. *Неприятие риска для инвесторов с памятью: эредитарные обобщения меры Эрроу — Пратта* // Финансовый журнал 2, 46–63 (2017).
13. R.P. Agarwal, S. Hristova, D. O'Regan. *Impulsive control of variable fractional–order multi–agent systems* // Fractal and Fractional. **8**:5, 259 (2024).
14. A.V. Anokhin. *On linear impulse systems for functional-differential equations* // Sov. Math., Dokl. **33**, 220–223 (1986).
15. N.V. Azbelev, L.F. Rakhmatullina. *Theory of linear abstract functional differential equations and applications* // Mem. Diff. Eq. Math. Phys. **8**, 1–102 (1996).
16. M.I. Gomoyunov. *On optimal positional strategies in fractional optimal control problems* // in Proceedings of "Mathematical optimization theory and operations research. 22nd international conference, MOTOR 2023," Spinger, Cham 255–265 (2023).
17. A.A. Kilbas, H.H. Srivastava, J.J. Trujillo. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations.* Elsevier, Amsterdam (2006).
18. V.P. Maksimov. *Theory of functional differential equations and some problems in economic dynamics* // in "Proceedings of the International Conference on Differential and Difference Equations and their Applications", 757–765 (2006).
19. V.P. Maksimov. *On a class of linear continuous-discrete systems with discrete memory* // Vestn. Udm. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki **30**:3, 385–395 (2020).
20. M. Rahaman, S.P. Mondal, A.A. Shaikh, A. Ahmadian, N. Senu, S. Salahshour. *Arbitrary–order economic production quantity model with and without deterioration: generalized point of view* // Adv. Difference Equ. **2020**, 16 (2020).
21. H.U. Rehman, H. Darus., J. Salah. *A note on Caputo's derivative operator interpretation in economy* // J. Appl. Math. **2018**, 1260240 (2018).
22. S. Schwabik, M. Tvrdý, O. Vejvoda. *Differential and Integral Equations: Boundary Value Problems and Adjoints.* D. Reidel Publishing Company Dordrecht, in co-ed. with Academia, Praha (1979).
23. V.E. Tarasov. *Non-linear macroeconomic models of growth with memory* // Mathematics **8**:11, 2078 (2020).
24. J. Wong, M. Fečkan, Y. Zhou. *A survey on impulsive fractional differential equations* // Fract. Calc. Appl. Anal. **19**:4, 806–831 (2016).

Владимир Петрович Максимов
Пермский государственный национальный исследовательский университет,
ул. Букирева, 15,
614068, г. Пермь, Россия
E-mail: maksimov@econ.psu.ru