ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 18 № 2 (2026). С. 36-57.

УДК 517.982.274+517.983.22+519.114

ОПЕРАТОРЫ ЭЙЛЕРА БЕСКОНЕЧНОГО ПОРЯДКА В ПРОСТРАНСТВАХ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ И ЧИСЛА СТИРЛИНГА

О.А. ИВАНОВА, С.Н. МЕЛИХОВ

Аннотация. Исследованы операторы Эйлера бесконечного порядка в пространстве $H(\Omega)$ всех функций, голоморфных на открытом множестве Ω в $\mathbb{C}^N$, с топологией равномерной сходимости на компактах в Ω. В терминах их характеристических функций доказаны необходимые и достаточные условия для применимости данных операторов к $H(\Omega)$. Рассмотрен особый случай $\Omega = (\mathbb{C}\backslash\{0\})^N$. Изучена связь двух представлений оператора Эйлера, в которой существенную роль играют числа Стирлинга первого и второго рода. Она выражается с помощью ассоциированных функций, одна из которых является суммой интерполяционного ряда Ньютона. Из полученных результатов следует, что всякая целая функция экспоненциального типа 0 в $\mathbb{C}^N$ раскладывается в многомерный интерполяционный ряд Ньютона. Доказан многомерный вариант теоремы Вигерта — Ло. Показано, что в пространстве $H(\mathbb{C}^N)$ всех целых в $\mathbb{C}^N$ функций оператором Эйлера является любой оператор адамаровского типа в $H(\mathbb{C}^N)$, т.е. всякий линейный непрерывный в $H(\mathbb{C}^N)$ оператор, имеющий каждый моном своим собственным вектором.

Ключевые слова: голоморфная функция, оператор Эйлера бесконечного порядка, числа Стирлинга первого и второго рода.

Mathematics Subject Classification: 46E10, 47B99, 11B73

1. Введение

В работе изучаются операторы Эйлера бесконечного порядка, действующие в пространстве $H(\Omega)$ всех функций, голоморфных на открытом множестве Ω в $\mathbb{C}^N$, с топологией равномерной сходимости на компактах в Ω, представляемые в виде

$$\mathcal{E}_a(f)(t) := \sum_{\beta\in\mathbb{N}_0^N} a_\beta t^\beta f^{(\beta)}(t) \tag{1.1}$$

или

$$\mathcal{E}_{\theta,a}(f)(t) := \sum_{\beta\in\mathbb{N}_0^N} a_\beta \theta^\beta(f)(t), \tag{1.2}$$

где $\theta^\beta := \theta_1^{\beta_1}\cdots\theta_N^{\beta_N}$, $\theta_j(f)(t) := t_j\dfrac{\partial f}{\partial t_j}(t)$, $a_\beta \in \mathbb{C}$, $\beta\in\mathbb{N}_0^N$, $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N}\cup\{0\}$. В $H(\Omega)$ они исследовались в значительном числе работ. Большей частью решалась задача о корректной определенности и сюръективности операторов Эйлера. В статьях [9], [11], [15], [22] (при

O.A. Ivanova, S.N. Melikhov, Infinite order Euler operators in spaces of holomorphic functions and Stirling numbers.

Исследование выполнено в Южном федеральном университете за счет гранта Российского научного фонда № 25-21-00062, https://rscf.ru/project/25-21-00062/.

Поступила 04 декабря 2025 г.

$N = 1$) и в [29], [30] (для $N \geqslant 1$) изучались операторы вида (1.1). В [6], [31] исследованы операторы Эйлера в $H(\Omega)$ с представлением (1.2) при $N = 1$. Операторы Эйлера бесконечного порядка в пространствах вещественно аналитических функций одной и многих переменных, имеющие представление (1.2), изучены в статьях [23]–[27].

Основными целями данной работы являются исследование сходимости рядов, задающих операторы Эйлера, и связь их представлений. Задача о действии $\mathcal{E}_a$ и $\mathcal{E}_{\theta,a}$ в $H(\Omega)$ решается в § 2. Мы придерживаемся определения суммируемого и абсолютно суммируемого семейства в локально выпуклом пространстве из [16, гл. 1, § 1.3]. Для счетного множества индексов Λ вместо термина «семейство $\{x_\beta : \beta \in \Lambda\}$ абсолютно суммируемо» будем употреблять термин «ряд $\sum\limits_{\beta\in\Lambda} x_\beta$ абсолютно сходится». Следуя Ю.Ф. Коробейнику, назовем операторы, определяемые равенствами (1.1) и (1.2), применимыми к $H(\Omega)$, если ряд в их определении абсолютно сходится в каждой точке $t \in \Omega$ для любой функции $f \in H(\Omega)$. Достаточным условием для применимости к $H(\Omega)$ как операторов (1.1), так и (1.2) для всех открытых множеств Ω в $\mathbb{C}^N$ является равенство

$$\lim_{|\beta|\to\infty} (\beta!|a_\beta|)^{\frac{1}{|\beta|}} = 0.$$

Для широкого класса открытых множеств $\Omega \subset \mathbb{C}^N$ оно и необходимо. Необходимым и достаточным условием применимости к $H(\mathbb{C}^N)$ операторов обоих видов является соотношение

$$\limsup_{|\beta|\to\infty} (\beta!|a_\beta|)^{\frac{1}{|\beta|}} < +\infty.$$

Упомянутые условия обеспечивают абсолютную сходимость рядов (1.1) и (1.2) в $H(\Omega)$, а значит, и непрерывность $\mathcal{E}_a$ и $\mathcal{E}_{\theta,a}$ в $H(\Omega)$. Отметим, что упомянутые результаты о применимости при $N = 1$ были известны, оставался только открытым вопрос о необходимости условия

$$\limsup_{|\beta|\to\infty} (\beta!|a_\beta|)^{\frac{1}{|\beta|}} < +\infty$$

для применимости $\mathcal{E}_{\theta,a}$ к $H(\mathbb{C})$ (он сформулирован в статье [31, предложение 6.2]). Рассмотрен особый случай $\Omega = (\mathbb{C}\backslash\{0\})^N$, не исследованный в данном направлении и при $N = 1$. Для этой области Ω критерием применимости к $H(\Omega)$ оператора $\mathcal{E}_a$ является условие

$$\limsup_{|\beta|\to\infty} (\beta!|a_\beta|)^{\frac{1}{|\beta|}} < 1,$$

а $\mathcal{E}_{\theta,a}$ — соотношение

$$\limsup_{|\beta|\to\infty} (\beta!|a_\beta|)^{\frac{1}{|\beta|}} < +\infty.$$

При доказательстве необходимых условий на коэффициенты a_β, $\beta \in \mathbb{N}_0^N$, используются множества, дуальные по Кете к специальным пространствам (мульти)последовательностей. Сведения о них приведены, например, в [10, § 2].

Связи представлений (1.1) и (1.2) посвящен § 3 работы. По–видимому, данная проблема ранее для операторов Эйлера бесконечного порядка систематически не изучалась. При ее исследовании применяются числа Стирлинга первого и второго рода. В случае, когда порядок $\mathcal{E}_a$ и $\mathcal{E}_{\theta,a}$ конечен, с помощью этих чисел каждый из этих операторов может быть выражен через другой. Это легко следует из известных одномерных равенств, связывающих операторы $f \mapsto t^\beta f^{(\beta)}(t)$ и θ^β. Если порядки $\mathcal{E}_a$ и $\mathcal{E}_{\theta,a}$ бесконечны, то установить связь представлений удается вследствие наличия нужных оценок сверху чисел Стирлинга второго рода и модулей чисел Стирлинга первого рода, обеспечивающих абсолютную сходимость соответствующих рядов и справедливость нужных равенств. Она описана с помощью ассоциированных с a функций, одна из которых является суммой интерполяционного ряда Ньютона. Показано при этом, что всякая целая функция экспоненциального типа 0 в $\mathbb{C}^N$ разлагается в соответствующий ей многомерный ряд Ньютона. Это позволило доказать в § 4 некоторую многомерную версию теоремы Вигерта — Ло в терминах определяющего компактного множества аналитического функционала. В § 5 установлено, что оператором Эйлера вида (1.1) (и (1.2)) в $H(\mathbb{C}^N)$ является любой оператор адамаровского типа в $H(\mathbb{C}^N)$.

2. Условия на коэффициенты

2.1. Применимость $\mathcal{E}_a$. Вначале изучим действие в $H(\Omega)$ оператора $\mathcal{E}_a$. Для $L \in \mathbb{N}$, $c \in \mathbb{C}^L$, $c \neq 0$, $d \in \mathbb{C}$ введем гиперплоскость в $\mathbb{C}^L$:

$$T(c,d) := \{t \in \mathbb{C}^L : \langle c, t\rangle = d\}.$$

При этом $\langle z, w\rangle := \sum\limits_{k=1}^{L} z_k w_k$, $z, w \in \mathbb{C}^L$. Доказательство необходимого условия применимости оператора Эйлера использует некоторое локальное условие линейной выпуклости. Оно формулируется в терминах существования комплексной гиперплоскости, проходящей через граничную точку множества и не пересекающей его. Далее $\mathbb{C}^* := \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Для множества Q в $\mathbb{C}^L$ через ∂Q обозначаем границу Q в $\mathbb{C}^L$;

$$t^\beta := t_1^{\beta_1}\cdots t_L^{\beta_L}, \qquad |\beta| := \beta_1 + \cdots + \beta_L, \qquad \beta! := \beta_1!\cdots\beta_L!, \qquad t \in \mathbb{C}^L, \qquad \beta \in \mathbb{N}_0^L.$$

Теорема 2.1. (i) *Если*

$$\lim_{|\beta|\to\infty} (\beta!|a_\beta|)^{\frac{1}{|\beta|}} = 0,$$

то для любого непустого открытого множества Ω в $\mathbb{C}^N$, всякой функции $f \in H(\Omega)$ ряд (1.1) *абсолютно сходится в $H(\Omega)$.*

(ii) *Пусть*

$$\Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_M, \qquad 1 \leqslant M \leqslant N, \qquad N_m \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{m=1}^{M} N_m = N,$$

$\Omega_m \neq \mathbb{C}^{N_m}$ — непустое открытое множество в $\mathbb{C}^{N_m}$, обладающее в $\mathbb{C}^{N_m}$ следующим свойством: найдутся $c^{(m)} \in (\mathbb{C}^*)^{N_m}$, $d_m \in \mathbb{C}$, точки

$$w^{(m)} \in T(c^{(m)}, d_m) \cap (\mathbb{C}^*)^{N_m} \cap \partial\Omega_m$$

такие, что

$$T(c^{(m)}, d_m) \cap \Omega_m = \emptyset.$$

Если оператор $\mathcal{E}_a$ применим к $H(\Omega)$, то

$$\lim_{|\beta|\to\infty} (\beta!|a_\beta|)^{\frac{1}{|\beta|}} = 0.$$

Доказательство. Утверждение (i) доказывается стандартным образом с использованием оценок, получаемых с помощью формулы Коши.

(ii): Будем записывать точку $t \in \mathbb{C}^N$ в виде $t = (t^{(1)}, \dots, t^{(M)})$, где $t^{(m)} \in \mathbb{C}^{N_m}$, $1 \leqslant m \leqslant M$. Существует последовательность $t(n) \in \Omega \cap (\mathbb{C}^*)^N$, $n \in \mathbb{N}$, сходящаяся к точке $w = (w^{(1)}, \dots, w^{(M)})$ в $\mathbb{C}^N$. Поскольку функция

$$f(t) = \prod_{m=1}^{M} \frac{1}{d_m - \langle c^{(m)}, t^{(m)}\rangle}$$

голоморфна в Ω и

$$f^{(\beta)}(t) = \prod_{m=1}^{M} \frac{|\beta^{(m)}|!(c^{(m)})^{\beta^{(m)}}}{(d_m - \langle c^{(m)}, t^{(m)}\rangle)^{|\beta^{(m)}|+1}}, \qquad \beta \in \mathbb{N}_0^N,$$

тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ найдется постоянная $A_n > 0$, для которой

$$|a_\beta| \left(\prod_{m=1}^{M} |\beta^{(m)}|!\right) |(t(n))^\beta||c^\beta| \leqslant A_n \prod_{m=1}^{M} |d_m - \langle c^{(m)}, (t(n))^{(m)}\rangle|^{|\beta^{(m)}|+1}, \qquad \beta \in \mathbb{N}_0^N. \tag{2.1}$$

Существует $\delta > 0$ такое, что $|(t(n))^\beta||c^\beta| \geqslant \delta^{|\beta|}$ для любых $n \in \mathbb{N}$, $\beta \in \mathbb{N}_0^N$. Вследствие (2.1) и того, что $\beta! \leqslant \prod\limits_{m=1}^{M} |\beta^{(m)}|!$,

$$\beta!|a_\beta| \leqslant \frac{A_n}{\delta^{|\beta|}} \prod_{m=1}^{M} |d_m - \langle c^{(m)}, (t(n))^{(m)}\rangle|^{|\beta^{(m)}|+1}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

и

$$\begin{aligned}(\beta!|a_\beta|)^{\frac{1}{|\beta|}} &\leqslant \frac{(A_n)^{\frac{1}{|\beta|}}}{\delta} \prod_{m=1}^{M} |d_m - \langle c^{(m)}, (t(n))^{(m)}\rangle|^{\frac{|\beta^{(m)}|+1}{|\beta|}} \\ &\leqslant \frac{(A_n)^{\frac{1}{|\beta|}}}{\delta} \left(\prod_{m=1}^{M} |d_m - \langle c^{(m)}, (t(n))^{(m)}\rangle|\right)^{\frac{1}{|\beta|}} \\ &\quad \cdot \sum_{m=1}^{M} |d_m - \langle c^{(m)}, (t(n))^{(m)}\rangle|, \quad n \in \mathbb{N}, \beta \in \mathbb{N}_0^N.\end{aligned}$$

Отсюда следует, что для всех $n \in \mathbb{N}$

$$\limsup_{|\beta|\to\infty} (\beta!|a_\beta|)^{\frac{1}{|\beta|}} \leqslant \frac{1}{\delta} \sum_{m=1}^{M} |d_m - \langle c^{(m)}, (t(n))^{(m)}\rangle|.$$

Поэтому существует $\lim\limits_{|\beta|\to\infty} (\beta!|a_\beta|)^{\frac{1}{|\beta|}}$, равный 0.

□

Замечание 2.1. *Доказанная теорема при $N = 1$ известна* [9]. *В этом случае дополнительному условию в (ii) удовлетворяет любое непустое открытое множество Ω в $\mathbb{C}$, отличное от $\mathbb{C}$ и $\mathbb{C}^*$.*

При $N \geqslant 2$ множество $\Omega \subset \mathbb{C}^N$ обладает свойством, как в утверждении (ii) теоремы 2.1, например, в следующих ситуациях: если $\Omega = \Omega_1 \times \dots \times \Omega_N$, где Ω_j, $1 \leqslant j \leqslant N$, — непустое открытое множество в $\mathbb{C}$, отличное от $\mathbb{C}$ и $\mathbb{C}^*$; если Ω — ограниченная выпуклая область в $\mathbb{C}^N$, каждая точка границы которой гладкая, т.е. через любую точку в $\partial\Omega$ проходит единственная (вещественная) опорная гиперплоскость к Ω [12, определение 10.7].

Обоснуем последний пример. Пусть $H_\Omega(t) := \sup\limits_{z\in\Omega} \mathrm{Re}\langle z, t\rangle$, $t \in \mathbb{C}^N$, — опорная функция Ω, $S := \left\{z \in \mathbb{C}^N : \sum\limits_{j=1}^{N} |z_j|^2 = 1\right\}$ — единичная сфера в $\mathbb{C}^N$, $\omega : \partial\Omega \to S$ — отображение, ставящее в соответствие $z \in \partial\Omega$ точку $\omega(z) \in S$ такую, что вещественная гиперплоскость

$$W(z) = \{t \in \mathbb{C}^N : \mathrm{Re}\langle \omega(z), t\rangle = H_\Omega(\omega(z))\}$$

является опорной к Ω в точке z. По [12, теорема 10.8] *отображение $\omega : \partial\Omega \to S$ непрерывно (при наделении $\partial\Omega$ и S топологиями, индуцированными евклидовой топологией в $\mathbb{C}^N$). Поскольку ω биективно и $\partial\Omega$ компактно, то ω — гомеоморфизм $\partial\Omega$ на S. Зафиксируем $z \in (\partial\Omega) \cap (\mathbb{C}^*)^N$. Существует окрестность U точки z в $\mathbb{C}^N$ такая, что $(\partial\Omega) \cap U \subset (\mathbb{C}^*)^N$. Множество $V = \omega((\partial\Omega) \cap U)$ является окрестностью точки $\omega(z)$ в S, и найдется точка $c \in V \cap (\mathbb{C}^*)^N$. Комплексная гиперплоскость $T(w(c), \langle w(c), c\rangle)$ проходит через c, содержится в $W(c)$, а значит, не пересекает Ω.*

Рассмотрим теперь случай $\Omega = \mathbb{C}^N$. Обозначим символом $\mathbf{1}$ точку из $\mathbb{C}^N$ (и мультииндекс из $\mathbb{N}_0^N$), все координаты которой равны 1.

Теорема 2.2. *Если оператор $\mathcal{E}_a$ применим к $H(\mathbb{C}^N)$, то*

$$\limsup_{|\beta|\to\infty} (\beta!|a_\beta|)^{\frac{1}{|\beta|}} < +\infty.$$

Если последнее условие выполняется, то ряд (1.1) *абсолютно сходится в $H(\mathbb{C}^N)$ для любой функции $f \in H(\mathbb{C}^N)$.*

Доказательство. Докажем необходимость условия

$$\limsup_{|\beta|\to\infty} (\beta!|a_\beta|)^{\frac{1}{|\beta|}} < +\infty$$

для применимости $\mathcal{E}_a$. Введем пространство последовательностей

$$\Lambda_\infty = \left\{ c \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0^N} : \forall m \in \mathbb{N} \sum_{\beta \in \mathbb{N}_0^N} |c_\beta| \frac{m^{|\beta|}}{\beta!} < +\infty \right\}.$$

Как известно, для $d \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0^N}$ ряд $\sum\limits_{\beta \in \mathbb{N}_0^N} |d_\beta c_\beta|$ сходится для всех $c \in \Lambda_\infty$ тогда и только тогда, когда существует $m \in \mathbb{N}$, для которого

$$\sup_{\beta \in \mathbb{N}_0^N} \frac{|d_\beta|\beta!}{m^{|\beta|}} < +\infty$$

(см., например, [10, § 2]).

Для любого $c \in \Lambda_\infty$ функция

$$f_c(t) = \sum_{\beta \in \mathbb{N}_0} \frac{c_\beta}{\beta!}(t - \mathbf{1})^\beta$$

является целой в $\mathbb{C}^N$. Поэтому для каждого $c \in \Lambda_\infty$ сходится ряд $\sum\limits_{\beta \in \mathbb{N}_0^N} |a_\beta||f_c^{(\beta)}(\mathbf{1})|$, т.е. $\sum\limits_{\beta \in \mathbb{N}_0^N} |a_\beta||c_\beta| < +\infty$. Значит, существует $m \in \mathbb{N}$, для которого

$$\sup_{\beta \in \mathbb{N}_0^N} \frac{\beta!|a_\beta|}{m^{|\beta|}} < +\infty,$$

и

$$\limsup_{|\beta|\to\infty} (\beta!|a_\beta|)^{\frac{1}{|\beta|}} < +\infty.$$

И в этом случае то, что условие

$$\limsup_{|\beta|\to\infty} (\beta!|a_\beta|)^{\frac{1}{|\beta|}} < +\infty$$

обеспечивает абсолютную сходимость ряда (1.1) в $H(\mathbb{C}^N)$, показывается стандартным образом с помощью формулы Коши.

$\square$

Замечание 2.2. *Применимость (в другом смысле) к $H(\Omega)$ дифференциальных операторов бесконечного порядка*

$$\mathcal{L}(f)(t) = \sum_{\beta\in\mathbb{N}_0^N} \varphi_\beta(t) f^{(\beta)}(t),$$

где φ_β, $\beta \in \mathbb{N}_0^N$, — функции, заданные на компактном подмножестве области голоморфности Ω в $\mathbb{C}^N$, изучена в работе [1].

2.2. Применимость $\mathcal{E}_{\theta,a}$. Исследуем применимость оператора $\mathcal{E}_{\theta,a}$. Далее $f_\alpha(t) := t^\alpha := t_1^{\alpha_1}\cdots t_N^{\alpha_N}$, $\alpha \in \mathbb{Z}^N$. Следующее утверждение о действии оператора θ^β на функции f_α очевидно.

Лемма 2.1. *Для любых $\alpha \in \mathbb{Z}^N$, $\beta \in \mathbb{N}_0^N$ в области определения f_α выполняется равенство $\theta^\beta(f_\alpha) = \alpha^\beta f_\alpha$.*

Введем оператор растяжения $M_v(f)(t) := f(vt)$, $vt := (v_j t_j)_{j=1}^N$, $v, t \in \mathbb{C}^N$.

Теорема 2.3. (i) *Если*

$$\lim_{|\beta|\to\infty} (\beta!|a_\beta|)^{\frac{1}{|\beta|}} = 0,$$

то для любого непустого открытого множества Ω в $\mathbb{C}^N$, каждой функции $f \in H(\Omega)$ ряд (1.2) абсолютно сходится в $H(\Omega)$.

(ii) *Пусть $\Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_N$, где Ω_j, $1 \leqslant j \leqslant N$, — открытое множество в $\mathbb{C}$, отличное от $\mathbb{C}$ и $\mathbb{C}^*$. Если оператор $\mathcal{E}_{\theta,a}$ применим к $H(\Omega)$, то*

$$\lim_{|\beta|\to\infty} (\beta!|a_\beta|)^{\frac{1}{|\beta|}} = 0.$$

(iii) *Если оператор $\mathcal{E}_{\theta,a}$ применим к $H(\mathbb{C}^N)$, то*

$$\limsup_{|\beta|\to\infty} (\beta!|a_\beta|)^{\frac{1}{|\beta|}} < +\infty.$$

Если последнее условие выполняется, то для любой функции $f \in H(\mathbb{C}^N)$ ряд (1.2) абсолютно сходится в $H(\mathbb{C}^N)$.

Доказательство. Утверждение (i), по сути, доказано в [26]; см. идущее от [28, лемма 11.2] доказательство импликации (c)⇒(d) в теореме 2.2 статьи [26], использующее интегральную формулу Коши и оценки сверху модуля функции $\theta^\beta(g_w)$, где

$$g_w(t) := \frac{1}{(w_1 - t_1)\cdots(w_N - t_N)}.$$

Доказательство (ii) сводится к случаю одной переменной, рассмотренному в [31]. Существуют $v_j \in \mathbb{C}^* \cap (\partial\Omega_j)$, $1 \leqslant j \leqslant N$. Так как $\theta^\beta M_v(f) = M_v\theta^\beta(f)$ для всех $\beta \in \mathbb{N}_0^N$, $f \in H(\Omega)$, оператор $\mathcal{E}_{\theta,a}$ применим к $H\left(\frac{1}{v}\Omega\right)$, где

$$\frac{1}{v}\Omega := \left\{\left(\frac{t_1}{v_1}, \ldots, \frac{t_N}{v_N}\right) : t \in \Omega\right\}.$$

Функция

$$g(t) = \frac{1}{(1 - t_1)\cdots(1 - t_N)}$$

голоморфна в $\frac{1}{v}\Omega$ и

$$\theta^\beta(g)(t) = \frac{A_{\beta_1}(t_1)}{(1-t_1)^{\beta_1+1}} \cdots \frac{A_{\beta_N}(t_N)}{(1-t_N)^{\beta_N+1}}, \qquad \beta \in \mathbb{N}_0^N,$$

где A_n, $n \in \mathbb{N}_0$, — многочлен Эйлера степени n. По доказательству импликации (3)⇒(5) в теореме 6.3 статьи [31] из того, что многочлены A_n имеют неположительные вещественные корни, следует, что существует последовательность $w^{(k)} \in \frac{1}{v}\Omega$, $k \in \mathbb{N}$, такая, что $w^{(k)} \to \mathbf{1}$ и выполняются неравенства

$$|\theta^\beta(g)(w^{(k)})| \geqslant k^{|\beta|+N} 2^N \beta!, \quad \beta \in \mathbb{N}_0^N, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Это влечет, что

$$\lim_{|\beta|\to\infty} (\beta!|a_\beta|)^{\frac{1}{|\beta|}} = 0.$$

(iii): Условие

$$\limsup_{|\beta|\to\infty} (\beta!|a_\beta|)^{\frac{1}{|\beta|}} < +\infty$$

обеспечивает абсолютную сходимость ряда (1.2) в $H(\mathbb{C}^N)$ для каждой функции $f \in H(\mathbb{C}^N)$ вследствие леммы 2.1 и оценок, вытекающих из интегральной формулы Коши.

Предположим, что ряд (1.2) абсолютно сходится для всех $f \in H(\mathbb{C}^N)$, $t \in \mathbb{C}^N$. Для любой последовательности $c \in \Lambda_\infty$ функция

$$g_c(t) := \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} \frac{|c_\alpha|}{\alpha!} t^\alpha$$

является целой в $\mathbb{C}^N$. Поэтому

$$+\infty > \sum_{\beta \in \mathbb{N}_0^N} |a_\beta||\theta^\beta(g_c)(\mathbf{1})| \geqslant \sum_{\beta \in \mathbb{N}_0^N} |a_\beta| \frac{|c_\beta|}{\beta!} \theta^\beta(f_\beta)(\mathbf{1}) = \sum_{\beta \in \mathbb{N}_0^N} |a_\beta| \frac{|c_\beta|}{\beta!} \beta^\beta.$$

Отсюда следует, что

$$\limsup_{|\beta|\to\infty} (\beta!|a_\beta|)^{\frac{1}{|\beta|}} < +\infty.$$

□

Замечание 2.3. (i) *Условие*

$$\limsup_{|\beta|\to\infty} (\beta!|a_\beta|)^{\frac{1}{|\beta|}} < +\infty$$

равносильно тому, что функция

$$a(t) = \sum_{\beta \in \mathbb{N}_0^N} a_\beta t^\beta$$

является целой функцией экспоненциального типа в $\mathbb{C}^N$, *а условие*

$$\lim_{|\beta|\to\infty} (\beta!|a_\beta|)^{\frac{1}{|\beta|}} = 0$$

эквивалентно тому, что a *— целая функция экспоненциального типа 0 в* $\mathbb{C}^N$ [5], [18, гл. 3, § 1], [26, лемма 2.1].

(ii) *Если* $\limsup\limits_{|\beta|\to\infty}(\beta!|a_\beta|)^{\frac{1}{|\beta|}} < +\infty$, *то справедливы равенства*

$$\mathcal{E}_a(f_\beta) = \lambda_\beta f_\beta, \quad \text{где} \quad \lambda_\beta = \beta! \sum_{0\leqslant\gamma\leqslant\beta} \frac{a_\gamma}{(\beta-\gamma)!}, \quad \beta \in \mathbb{N}_0^N,$$

и

$$\mathcal{E}_{\theta,a}(f_\beta) = a(\beta) f_\beta, \quad \beta \in \mathbb{N}_0^N.$$

Далее $\mathrm{Exp}(\mathbb{C}^N)$ (соответственно, $\mathrm{Exp}(\{0\})$) — пространство всех целых функций экспоненциального типа (соотв., экспоненциального типа 0) в $\mathbb{C}^N$.

2.3. Случай $\Omega = (\mathbb{C}^*)^N$. Рассмотрим случай, когда $\Omega = (\mathbb{C}^*)^N$. Это множество Ω не удовлетворяет дополнительным предположениям, сделанным при доказательстве необходимых условий применимости в теоремах 2.1, 2.3. Будем использовать многомерные убывающие факториалы

$$(t)_\beta := (t_1)_{\beta_1} \cdots (t_N)_{\beta_N}, \quad t \in \mathbb{C}^N, \quad \beta \in \mathbb{N}_0^N,$$

где

$$(z)_n := z(z-1)\cdots(z-n+1), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (z)_0 := 1, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Лемма 2.2. *Для любого компакта Q в $(\mathbb{C}^*)^N$, каждой функции $f \in H((\mathbb{C}^*)^N)$, любого $R > 1$ существует постоянная $C > 0$, для которой*

$$|t^\beta||f^{(\beta)}(t)| \leqslant C R^{|\beta|}, \quad t \in Q, \quad \beta \in \mathbb{N}_0^N.$$

Доказательство. Для $R > 1$ положим $\varepsilon := 1 - \dfrac{1}{R}$. Функцию $f \in H((\mathbb{C}^*)^N)$ можно разложить в ряд Лорана:

$$f(t) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}^N} d_\nu t^\nu, \quad t \in (\mathbb{C}^*)^N.$$

Для всех $\beta \in \mathbb{N}_0^N$, $t \in (\mathbb{C}^*)^N$

$$t^\beta f^{(\beta)}(t) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}^N} d_\nu (\nu)_\beta t^\nu,$$

а значит,

$$|t^\beta||f^{(\beta)}(t)| \leqslant \sum_{\nu\in\mathbb{Z}^N} |d_\nu||(\nu)_\beta||t^\nu|.$$

Воспользуемся неравенствами Коши для коэффициентов ряда Лорана: для любых $r_j > 0$, $1 \leqslant j \leqslant N$,

$$|d_\nu| \leqslant \frac{M(f; r_1, \ldots, r_N)}{(r_1)^{\nu_1}\cdots(r_N)^{\nu_N}}, \quad \nu \in \mathbb{Z}^N,$$

где $M(f; r_1, \ldots, r_N) := \max\{|f(z)| : |z_j| = r_j, 1 \leqslant j \leqslant N\}$. Найдутся $\tau, T > 0$ такие, что $\tau \leqslant |z_j| \leqslant T$, $1 \leqslant j \leqslant N$, для каждого $z \in Q$. Для $\nu \in \mathbb{Z}^N$ определим числа r_j, $1 \leqslant j \leqslant N$. Если $\nu_j \leqslant -1$, то $r_j := \varepsilon\tau$; если $\nu_j \geqslant 0$, то полагаем $r_j := \dfrac{T}{\varepsilon}$. Тогда для всех $t \in Q$, $\nu \in \mathbb{Z}^N$, $1 \leqslant j \leqslant N$ выполняется неравенство $\left(\dfrac{|t_j|}{r_j}\right)^{\nu_j} \leqslant \varepsilon^{|\nu_j|}$. Поэтому для любых $t \in Q$, $\beta \in \mathbb{N}_0^N$, для постоянных

$$B := \sup\{M(f; \rho_1, \ldots, \rho_N) : \varepsilon\tau \leqslant \rho_j \leqslant T/\varepsilon, 1 \leqslant j \leqslant N\}, \qquad C := B 2^{N+1} R^N$$

имеем

$$|t^\beta||f^{(\beta)}(t)| \leqslant B 2^{N+1} \sum_{\mu\in\mathbb{N}_0^N} \varepsilon^{|\mu|} C_{\mu+\beta}^{\mu} = \frac{B 2^{N+1}}{(1-\varepsilon)^N} \frac{\beta!}{(1-\varepsilon)^{|\beta|}} = C\beta! R^{|\beta|}.$$

□

Введем пространство последовательностей

$$\Lambda_1 := \left\{ d \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0^N} : \forall n \in \mathbb{N} \sup_{\beta \in \mathbb{N}_0^N} \frac{|d_\beta|}{e^{|\beta|/n}} < +\infty \right\}.$$

Оно совпадает с множеством всех последовательностей $d \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0^N}$, для которых

$$\limsup_{|\beta| \to \infty} |d_\beta|^{\frac{1}{|\beta|}} \leqslant 1.$$

Расширим лемму Б.А. Вострецова [3] на многомерный случай.

Лемма 2.3. *Для любого $d \in \Lambda_1$ существует функция $g \in \mathrm{Exp}(\{0\})$ такая, что $g(\beta) \geqslant |d_\beta|$ для всех $\beta \in \mathbb{N}_0^N$.*

Доказательство. Положим $c_\beta := \max\{1; |d_\beta|\}$, $\beta \in \mathbb{N}_0^N$. Тогда $\lim_{|\beta| \to \infty} (c_\beta)^{\frac{1}{|\beta|}} = 1$. Определим последовательности–мажоранты

$$x_{j,n} := \max\{c_\gamma : 0 \leqslant \gamma_k \leqslant n, 1 \leqslant k \leqslant N, k \neq j; \gamma_j = n\}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad 1 \leqslant j \leqslant N.$$

Выполняются неравенства $x_{j,n} \geqslant 1$, $1 \leqslant j \leqslant N$, $n \in \mathbb{N}_0$, и $c_\beta \leqslant x_{1,\beta_1} \cdots x_{N,\beta_N}$ для каждого $\beta \in \mathbb{N}_0^N$. Действительно, для $\beta_k = \max\{\beta_j : 1 \leqslant j \leqslant N\}$

$$c_\beta \leqslant x_{k,\beta_k} \leqslant x_{1,\beta_1} \cdots x_{N,\beta_N}.$$

Из соотношений

$$\begin{aligned}(x_{j,n})^{\frac{1}{n}} &= \max\left\{(c_\gamma)^{\frac{1}{n}} : 0 \leqslant \gamma_k \leqslant n, 1 \leqslant k \leqslant N, k \neq j; \gamma_j = n\right\} \\ &\leqslant \max\left\{(c_\gamma)^{\frac{N}{|\gamma|}} : 0 \leqslant \gamma_k \leqslant n, 1 \leqslant k \leqslant N, k \neq j; \gamma_j = n\right\},\end{aligned}$$

$1 \leqslant j \leqslant N$, $n \in \mathbb{N}$, следует, что

$$\lim_{n \to \infty} (x_{j,n})^{\frac{1}{n}} = 1, \qquad 1 \leqslant j \leqslant N.$$

По лемме из статьи [3] существуют целые в $\mathbb{C}$ функции h_j, $1 \leqslant j \leqslant N$, нулевого экспоненциального типа с неотрицательными тейлоровскими коэффициентами такие, что

$$h_j(n) \geqslant x_{j,n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Для целых в $\mathbb{C}$ функций $g_j(z) = x_{j,0} + z h_j(z)$, $1 \leqslant j \leqslant N$, нулевого экспоненциального типа неравенства $h_j(n) \geqslant x_{j,n}$ выполняются для всех $n \in \mathbb{N}_0$. Функция $g(t) := g_1(t_1) \cdots g_N(t_N)$, $t \in \mathbb{C}^N$, является целой функцией экспоненциального типа 0 в $\mathbb{C}^N$ и $g(\beta) \geqslant c_\beta \geqslant |d_\beta|$ для каждого $\beta \in \mathbb{N}_0^N$.

□

Теорема 2.4. (i) *Если*

$$\limsup_{|\beta| \to \infty} (\beta! |a_\beta|)^{\frac{1}{|\beta|}} < 1,$$

то ряд (1.1) абсолютно сходится в $H((\mathbb{C}^*)^N)$. Если оператор $\mathcal{E}_a$ применим к $H((\mathbb{C}^*)^N)$, то

$$\limsup_{|\beta| \to \infty} (\beta! |a_\beta|)^{\frac{1}{|\beta|}} < 1.$$

(ii) *Из условия*

$$\limsup_{|\beta|\to\infty}(\beta!|a_\beta|)^{\frac{1}{|\beta|}} < +\infty$$

следует абсолютная сходимость ряда (1.2) *в* $H((\mathbb{C}^*)^N)$. *Если оператор* $\mathcal{E}_{\theta,a}$ *применим к* $H((\mathbb{C}^*)^N)$, *то*

$$\limsup_{|\beta|\to\infty}(\beta!|a_\beta|)^{\frac{1}{|\beta|}} < +\infty.$$

Доказательство. (i): Предположим, что

$$\limsup_{|\beta|\to\infty}(\beta!|a_\beta|)^{\frac{1}{|\beta|}} < 1.$$

Для любого компакта Q в $\mathbb{C}^N$ по лемме 2.2 ряд

$$\sum_{\beta\in\mathbb{N}_0^N}|a_\beta|\sup_{t\in Q}(|t^\beta||f^{(\beta)}(t)|)$$

сходится.

Пусть оператор $\mathcal{E}_a$ применим к $H((\mathbb{C}^*)^N)$. Зафиксируем $d\in\Lambda_1$. По лемме 2.3 существует функция

$$g\in \operatorname{Exp}(\{0\}),\qquad g(t)=\sum_{\gamma\in\mathbb{N}_0^N}\frac{c_\gamma}{\gamma!}t^\gamma,$$

для которой $g(\beta)\geqslant|d_\beta|$ при всех $\beta\in\mathbb{N}_0^N$ и $c_\gamma\geqslant 0$, $\gamma\in\mathbb{N}_0^N$. Функция

$$f(t)=\sum_{\gamma\in\mathbb{N}_0^N}\frac{c_\gamma}{t^{\gamma+\mathbf{1}}}$$

голоморфна в $(\mathbb{C}^*)^N$, и для каждого $t\in(\mathbb{C}^*)^N$ сходится ряд

$$\begin{aligned}\sum_{\beta\in\mathbb{N}_0^N}|a_\beta t^\beta|\left|f^{(\beta)}(t)\right| &= \sum_{\beta\in\mathbb{N}_0^N}|a_\beta||t^\beta|\left|\sum_{\gamma\in\mathbb{N}_0^N}\frac{(-1)^{|\beta|}c_\gamma(\gamma+\beta)!}{\gamma!t^{\gamma+\beta+\mathbf{1}}}\right|\\ &= \sum_{\beta\in\mathbb{N}_0^N}|a_\beta|\left|\sum_{\gamma\in\mathbb{N}_0^N}\frac{c_\gamma(\gamma+\beta)!}{\gamma!t^{\gamma+\mathbf{1}}}\right|.\end{aligned}$$

Значит, последний ряд сходится при $t=\mathbf{1}$, т.е. сходится ряд

$$\sum_{\beta\in\mathbb{N}_0^N}|a_\beta|\beta!\sum_{\gamma\in\mathbb{N}^N}\frac{c_\gamma(\gamma+\beta)!}{\gamma!\beta!}\geqslant\sum_{\beta\in\mathbb{N}_0^N}|a_\beta|\beta!\sum_{\gamma\in\mathbb{N}_0^N}\frac{c_\gamma}{\gamma!}\beta^\gamma\geqslant\sum_{\beta\in\mathbb{N}_0^N}|a_\beta|\beta!|d_\beta|.$$

Таким образом,

$$\sum_{\beta\in\mathbb{N}_0^N}|a_\beta|\beta!|d_\beta|<+\infty$$

для любой последовательности $d\in\Lambda_1$. Отсюда следует, что

$$\limsup_{|\beta|\to\infty}(\beta!|a_\beta|)^{\frac{1}{|\beta|}} < 1.$$

(ii): Пусть

$$\limsup_{|\beta|\to\infty}(\beta!|a_\beta|)^{\frac{1}{|\beta|}} < +\infty.$$

Положим

$$|a|(t):=\sum_{\beta\in\mathbb{N}_0^N}|a_\beta|t^\beta,\qquad t\in\mathbb{C}^N.$$

Возьмем функцию $f \in H((\mathbb{C}^*)^N)$, она разлагается в $(\mathbb{C}^*)^N$ в ряд Лорана:

$$f(t) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^N} d_\nu t^\nu.$$

Зафиксируем компакт Q в $(\mathbb{C}^*)^N$. Найдется $\rho > 0$, для которого $|t^\nu| \leqslant \rho^{|\nu_1|+\cdots+|\nu_N|}$ для всех $t \in Q$, $\nu \in \mathbb{Z}^N$. Так как $a \in \mathrm{Exp}(\mathbb{C}^N)$, то также $|a| \in \mathrm{Exp}(\mathbb{C}^N)$, и существуют постоянные $C, R > 0$ такие, что

$$|a|(|t_1|, \ldots, |t_N|) \leqslant Ce^{R(|t_1|+\cdots+|t_N|)}, \quad t \in \mathbb{C}^N.$$

Значит,

$$\begin{aligned}\sum_{\beta \in \mathbb{N}_0^N} |a_\beta| \sup_{t \in Q}(|\theta^\beta(f)(t)|) &\leqslant \sum_{\beta \in \mathbb{N}_0^N} |a_\beta| \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^N} |d_\nu||\nu^\beta|\rho^{|\nu_1|+\cdots+|\nu_N|} \\ &= \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^N} |d_\nu|\rho^{|\nu_1|+\cdots+|\nu_N|}|a|(|\nu_1|, \ldots, |\nu_N|) \\ &\leqslant C \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^N} |d_\nu| \left(\rho e^R\right)^{|\nu_1|+\cdots+|\nu_N|} < +\infty.\end{aligned}$$

Предположим теперь, что оператор $\mathcal{E}_{\theta,a}$ применим к $H((\mathbb{C}^*)^N)$. Тогда для любой целой в $\mathbb{C}^N$ функции f сходится ряд

$$\sum_{\beta \in \mathbb{N}_0^N} |a_\beta||\theta^\beta(f)(\mathbf{1})|.$$

По доказательству утверждения (iii) в теореме 2.3 это влечет, что

$$\limsup_{|\beta| \to \infty}(\beta!|a_\beta|)^{\frac{1}{|\beta|}} < +\infty.$$

□

Из теорем 2.1–2.4 и теоремы Банаха — Штейнгауза вытекает

Следствие 2.1. (i) *Если*

$$\lim_{|\beta| \to \infty}(\beta!|a_\beta|)^{\frac{1}{|\beta|}} = 0,$$

то операторы $\mathcal{E}_a$, $\mathcal{E}_{\theta,a}$ линейны и непрерывны в $H(\Omega)$ для любого непустого открытого множества Ω в $\mathbb{C}^N$.

(ii) *Если*

$$\limsup_{|\beta| \to \infty}(\beta!|a_\beta|)^{\frac{1}{|\beta|}} < +\infty,$$

то операторы $\mathcal{E}_a$, $\mathcal{E}_{\theta,a}$ линейны и непрерывны в $H(\mathbb{C}^N)$, $\mathcal{E}_{\theta,a}$ — и в $H((\mathbb{C}^*)^N)$.

(iii) *Если*

$$\limsup_{|\beta| \to \infty}(\beta!|a_\beta|)^{\frac{1}{|\beta|}} < 1,$$

то оператор $\mathcal{E}_a$ линейно и непрерывно действует в $H((\mathbb{C}^*)^N)$.

3. Связь представлений операторов Эйлера

Для $\beta, \gamma \in \mathbb{N}_0^N$, $\gamma \leqslant \beta$, положим

$$s(\beta,\gamma) := \prod_{j=1}^{N} s(\beta_j,\gamma_j), \qquad S(\beta,\gamma) := \prod_{j=1}^{N} S(\beta_j,\gamma_j),$$

где $s(n,k)$, соотв., $S(n,k)$, для $k,n \in \mathbb{N}_0$, $k \leqslant n$, — число Стирлинга первого, соответственно, второго, рода. Запись $\gamma \leqslant \beta$ означает, что $\gamma_j \leqslant \beta_j$, $1 \leqslant j \leqslant N$. Эти числа определяются различными эквивалентными способами. Одно из определений использует убывающие факториалы; числа Стирлинга задаются равенствами [17, гл. 2, § 7]

$$(z)_n = \sum_{k=0}^{n} s(n,k) z^k, \qquad z^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)(z)_k, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Для всех $t \in \mathbb{C}^N$, $\beta \in \mathbb{N}_0^N$

$$(t)_\beta = \sum_{0 \leqslant \gamma \leqslant \beta} s(\beta,\gamma) t^\gamma, \qquad t^\beta = \sum_{0 \leqslant \gamma \leqslant \beta} S(\beta,\gamma)(t)_\gamma.$$

Соотношения в следующем утверждении вытекают из известных аналогичных равенств для одной переменной [17, гл. 2, задача 18].

Лемма 3.1. *Для любого непустого открытого множества Ω в $\mathbb{C}^N$, всех $\beta \in \mathbb{N}_0^N$, $f \in H(\Omega)$, $t \in \Omega$*

$$\theta^\beta(f)(t) = \sum_{0 \leqslant \gamma \leqslant \beta} S(\beta,\gamma) t^\gamma f^{(\gamma)}(t), \qquad t^\beta f^{(\beta)}(t) = \sum_{0 \leqslant \gamma \leqslant \beta} s(\beta,\gamma) \theta^\gamma(f)(t).$$

Пусть

$$a \in \operatorname{Exp}(\mathbb{C}^N), \qquad a(t) = \sum_{\beta \in \mathbb{N}_0^N} a_\beta t^\beta, \qquad t \in \mathbb{C}^N.$$

Для анализа связи операторов Эйлера бесконечного порядка нам понадобятся ряды

$$\widetilde{a}(t) := \sum_{\beta \in \mathbb{N}_0^N} a_\beta (t)_\beta, \tag{3.1}$$

$$\widehat{a}(t) := \sum_{\gamma \in \mathbb{N}_0^N} \left(\sum_{\beta \geqslant \gamma} S(\beta,\gamma) a_\beta \right) t^\gamma, \quad t \in \mathbb{C}^N.$$

Далее покажем, что ряды

$$\sum_{\beta \geqslant \gamma} S(\beta,\gamma) a_\beta, \qquad \gamma \in \mathbb{N}_0^N,$$

абсолютно сходятся; полагаем

$$\widehat{a}_\gamma := \sum_{\beta \geqslant \gamma} S(\beta,\gamma) a_\beta.$$

Ряд (3.1) (в общем случае формальный) — многомерный вариант интерполяционного ряда Ньютона; для голоморфных функций одной переменной он изучался, например, в [7], [4], [14, § 1, п. 10].

Далее будем использовать некоторые свойства чисел Стирлинга, в частности, оценки для $S(\beta,\gamma)$ и $|s(\beta,\gamma)|$, при $N = 1$ известные.

Лемма 3.2. (i) *Для любых* $\beta, \gamma \in \mathbb{N}_0^N$, $\gamma \leqslant \beta$,

$$\sum_{\gamma \leqslant \nu \leqslant \beta} s(\beta, \nu) S(\nu, \gamma) = \sum_{\gamma \leqslant \nu \leqslant \beta} S(\beta, \nu) s(\nu, \gamma) = \delta_{\gamma,\beta}$$

($\delta_{\gamma,\beta}$ — символ Кронекера).

(ii) $S(\beta, \gamma) \leqslant C_\beta^\gamma \gamma^{\beta-\gamma}$, $\quad \beta, \gamma \in \mathbb{N}_0^N$, $\quad \gamma \leqslant \beta$.

(iii) $|s(\beta, \gamma)| \leqslant C_\beta^\gamma \dfrac{\beta!}{\gamma!}$, $\quad \beta, \gamma \in \mathbb{N}_0^N$, $\quad \gamma \leqslant \beta$.

(iv) *Для любых* $t \in \mathbb{C}^N$, $\gamma \in \mathbb{N}_0^N$ *справедливо равенство*

$$\sum_{\beta \geqslant \gamma} S(\beta, \gamma) \frac{t^\beta}{\beta!} = \frac{(e^{t_1} - 1)^{\gamma_1} \cdots (e^{t_N} - 1)^{\gamma_N}}{\gamma!}.$$

Доказательство. Равенства в (i) следуют из таких равенств при $N = 1$ [17, гл. 2, § 7, (39)].

(ii): По [21, с. 292, задача 7] выполняются неравенства

$$S(\beta, \gamma) \leqslant C_{\beta-\mathbf{1}}^{\gamma-\mathbf{1}} \gamma^{\beta-\gamma}, \quad \beta, \gamma \in \mathbb{N}^N, \gamma \leqslant \beta.$$

Это влечет неравенства в (ii) для всех $\beta, \gamma \in \mathbb{N}_0^N$, $\gamma \leqslant \beta$.

(iii): Пусть $n \in \mathbb{N}$. Так как

$$z(z+1)\cdots(z+n-1) = \sum_{k=1}^{n} |s(n,k)| z^k, \quad z \in \mathbb{C},$$

имеем

$$|s(n,k)| \leqslant C_{n-1}^{k-1} \frac{(n-1)!}{(k-1)!} \leqslant C_n^k \frac{n!}{k!}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

(Данная оценка может быть получена и из равенства

$$\sum_{j=k}^{n} |s(n,j)| S(j,k) = C_{n-1}^{k-1} \frac{n!}{k!}$$

[17, гл. 2, задача 16 (d)] и того, что $S(k,k) = 1$.) Из последних неравенств вытекает оценка в (iii) для любых $\beta, \gamma \in \mathbb{N}_0^N$, $\gamma \leqslant \beta$.

(iv): При $N = 1$ это соотношение приведено, например, в [17, гл. 2, задача 14]. (Отметим, что неравенства в (ii) обеспечивают абсолютную сходимость ряда в (iv) для любого $t \in \mathbb{C}^N$.)

□

Лемма 3.3. (i) *Если* $a \in \mathrm{Exp}(\mathbb{C}^N)$, *то* $\widehat{a} \in \mathrm{Exp}(\mathbb{C}^N)$.

(ii) *Если*

$$\limsup_{|\beta| \to \infty} (\beta! |a_\beta|)^{\frac{1}{|\beta|}} < 1,$$

то $\widetilde{a} \in \mathrm{Exp}(\mathbb{C}^N)$ *и* $a = \widehat{\widetilde{a}}$.

(iii) *Если*

$$\limsup_{|\beta| \to \infty} (\beta! |a_\beta|)^{\frac{1}{|\beta|}} < \log 2,$$

то

$$\limsup_{|\beta| \to \infty} (\beta! |\widehat{a}_\beta|)^{\frac{1}{|\beta|}} < 1$$

и $a = \widehat{\widetilde{a}} = \widetilde{\widehat{a}}$.

(iv) *Если* $a \in \operatorname{Exp}(\{0\})$, *то* $\widetilde{a}, \widehat{a} \in \operatorname{Exp}(\{0\})$ *и* $a = \widehat{\widetilde{a}} = \widetilde{\widehat{a}}$.

Доказательство. (i): Пусть

$$a \in \operatorname{Exp}(\mathbb{C}^N), \qquad a(t) = \sum_{\beta \in \mathbb{N}_0^N} a_\beta t^\beta, \qquad \sigma := \limsup_{|\beta| \to \infty} (\beta! |a_\beta|)^{\frac{1}{|\beta|}} < +\infty.$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Найдется $A > 0$ такое, что

$$|a_\beta| \leqslant A \frac{(\sigma + \varepsilon)^{|\beta|}}{\beta!}, \qquad \beta \in \mathbb{N}_0^N.$$

По лемме 3.2 для $\gamma \in \mathbb{N}_0^N$

$$\sum_{\beta \geqslant \gamma} S(\beta, \gamma) |a_\beta| \leqslant A \sum_{\beta \geqslant \gamma} S(\beta, \gamma) \frac{(\sigma + \varepsilon)^{|\beta|}}{\beta!} = A \frac{(e^{\sigma + \varepsilon} - 1)^{|\gamma|}}{\gamma!}.$$

Значит,

$$\limsup_{|\gamma| \to \infty} (\gamma! |\widehat{a}_\gamma|)^{\frac{1}{|\gamma|}} \leqslant e^\sigma - 1, \qquad \widehat{a}_\gamma = \sum_{\beta \geqslant \gamma} S(\beta, \gamma) a_\beta,$$

и определена целая функция

$$\widehat{a}(t) = \sum_{\gamma \in \mathbb{N}_0^N} \widehat{a}_\gamma t^\gamma, \qquad t \in \mathbb{C}^N,$$

экспоненциального типа в $\mathbb{C}^N$.

(ii): Выберем $\delta < 1$, для которого

$$\limsup_{|\beta| \to \infty} (\beta! |a_\beta|)^{\frac{1}{|\beta|}} < \delta.$$

Существует постоянная $B > 0$ такая, что $|a_\beta| \leqslant B \dfrac{\delta^{|\beta|}}{\beta!}$ для любого $\beta \in \mathbb{N}_0^N$. Учитывая лемму 3.2, получим:

$$\begin{aligned} \sum_{\beta \geqslant \gamma} |s(\beta, \gamma)| |a_\beta| &\leqslant B \sum_{\beta \geqslant \gamma} C_\beta^\gamma \frac{\beta!}{\gamma!} \frac{\delta^{|\beta|}}{\beta!} = B \sum_{\beta \in \mathbb{N}_0^N} C_{\beta+\gamma}^\gamma \frac{\delta^{|\beta| + |\gamma|}}{\gamma!} \\ &\leqslant B \frac{\delta^{|\gamma|}}{\gamma!} \sum_{\beta \in \mathbb{N}_0^N} \frac{(\beta + \gamma)!}{\beta! \gamma!} \delta^{|\beta|} = B \frac{\delta^{|\gamma|}}{\gamma! (1 - \delta)^{|\gamma| + N}}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\sum_{\beta \in \mathbb{N}_0^N} |a_\beta| \sum_{0 \leqslant \gamma \leqslant \beta} |s(\beta, \gamma)| |t^\gamma| < +\infty$$

для любого $t \in \mathbb{C}^N$ и, если

$$\widetilde{a}(t) = \sum_{\gamma \in \mathbb{N}_0^N} \widetilde{a}_\gamma t^\gamma, \qquad t \in \mathbb{C}^N,$$

то

$$\limsup_{|\gamma| \to \infty} (\gamma! |\widetilde{a}_\gamma|)^{\frac{1}{|\gamma|}} \leqslant \frac{\delta}{1 - \delta}.$$

При этом

$$\widetilde{a}_\gamma = \sum_{\beta \in \mathbb{N}_0^N} s(\beta, \gamma) a_\beta, \qquad \gamma \in \mathbb{N}_0^N.$$

Таким образом, $\widetilde{a} \in \operatorname{Exp}(\mathbb{C}^N)$. По (i) определена целая функция экспоненциального типа $\widehat{\widetilde{a}}$. Для $\beta \in \mathbb{N}_0^N$, в силу леммы 3.2,

$$\sum_{\nu \geqslant \beta} S(\nu,\beta)\widetilde{a}_\nu = \sum_{\nu \geqslant \beta} S(\nu,\beta) \sum_{\gamma \geqslant \nu} s(\gamma,\nu) a_\gamma$$
$$= \sum_{\gamma \geqslant \beta} a_\gamma \sum_{\beta \leqslant \nu \leqslant \gamma} s(\gamma,\nu) S(\nu,\beta) = a_\beta.$$

Значит, $a = \widehat{\widetilde{a}}$.

Утверждение (iii) следует из (i) и (ii).

(iv): То, что $\widetilde{a}, \widehat{a} \in \operatorname{Exp}(\{0\})$, вытекает из оценок, полученных при доказательстве (i) и (ii). Равенства выполняются по (iii).

□

Интерпретируем утверждение (iii) в лемме 3.3 в терминах представимости целой функции ее рядом Ньютона. Для целой в $\mathbb{C}^N$ функции a введем числа

$$\Delta^\gamma(a) := \sum_{0 \leqslant \nu \leqslant \gamma} (-1)^{\gamma-\nu} C_\gamma^{\gamma-\nu} a(\nu), \quad \gamma \in \mathbb{N}_0^N.$$

При $N = 1$ они совпадают с конечной разностью порядка γ функции a в точке 0. Пусть

$$\limsup_{|\beta| \to \infty} (\beta! |a_\beta|)^{\frac{1}{|\beta|}} < \log 2.$$

По лемме 3.3 определена функция $\widehat{a}$. Покажем, что

$$\frac{1}{\gamma!} \Delta^\gamma(a) = \widehat{a}_\gamma, \qquad \gamma \in \mathbb{N}_0^N,$$

где $\widehat{a}_\gamma$ — тейлоровские коэффициенты $\widehat{a}$. Для доказательства этого воспользуемся «прямыми» равенствами для $S(\beta,\gamma)$, $0 \leqslant \gamma \leqslant \beta$:

$$S(\beta,\gamma) = \frac{1}{\gamma!} \sum_{0 \leqslant \nu \leqslant \gamma} (-1)^{\gamma-\nu} C_\gamma^{\gamma-\nu} \nu^\beta$$

(они вытекают из соответствующих соотношений при $N = 1$ [17, гл. 2, § 7, равенство (38)]). Для $\gamma \in \mathbb{N}_0^N$

$$\frac{\Delta^\gamma(a)}{\gamma!} = \frac{1}{\gamma!} \sum_{0 \leqslant \nu \leqslant \gamma} (-1)^{\gamma-\nu} C_\gamma^{\gamma-\nu} \sum_{\beta \in \mathbb{N}_0^N} a_\beta \nu^\beta$$
$$= \sum_{\beta \in \mathbb{N}_0^N} a_\beta \frac{1}{\gamma!} \sum_{0 \leqslant \nu \leqslant \gamma} (-1)^{\gamma-\nu} C_\gamma^{\gamma-\nu} \nu^\beta = \sum_{\beta \geqslant \gamma} a_\beta S(\beta,\gamma).$$

Последнее равенство выполняется, поскольку

$$\sum_{0 \leqslant \nu \leqslant \gamma} (-1)^{\gamma-\nu} C_\gamma^{\gamma-\nu} \nu^\beta = 0,$$

если $\gamma \nleqslant \beta$. Это следует, например, из того, что $g^{(m)}(0) = 0$ для $m, n \in \mathbb{N}_0$, $m < n$, функции

$$g(z) = (e^z - 1)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^{n-k} e^{kz}, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Таким образом, равенство $a = \widehat{\widetilde{a}}$ в лемме 3.3 (iii) означает, что всякая целая функция a, для которой

$$\limsup_{|\beta| \to \infty} (\beta! |a_\beta|)^{\frac{1}{|\beta|}} < \log 2,$$

разложима в свой ряд Ньютона. При $N = 1$ это известно (см., например, [14, теорема 5.11]). В [14] доказательство проводится с помощью интегральных представлений, связанных с функцией, ассоциированной по Борелю с a.

Замечание 3.1. (i) *В утверждении (i) леммы 3.3 в условии*

$$\limsup_{|\beta|\to\infty}(\beta!|a_\beta|)^{\frac{1}{|\beta|}} < 1$$

число 1 нельзя заменить на большее. Действительно, при $a_\beta := \dfrac{1}{\beta!}$, $\beta \in \mathbb{N}_0^N$ *(и тогда* $a(t) = e^{\langle 1,t\rangle}$*), при* $t_j = -1$, $1 \leqslant j \leqslant N$, *ряд в определении функции* $\widetilde{a}(t)$ *не является сходящимся для любой перестановки индексов из* $\mathbb{N}_0^N$.

В условии

$$\limsup_{|\beta|\to\infty}(\beta!|a_\beta|)^{\frac{1}{|\beta|}} < \log 2$$

утверждения (iii) леммы 3.3 число $\log 2$ *также нельзя заменить на большее. Например, если* $a(t) = 2^{\langle \mathbf{1},t\rangle}$, *то*

$$\limsup_{|\beta|\to\infty}(\beta!|a_\beta|)^{\frac{1}{|\beta|}} = \log 2, \qquad \widehat{a}(t) = e^{\langle \mathbf{1},t\rangle},$$

и функция $\widetilde{\widehat{a}}$ *не определена.*

(ii) *Величину*

$$\sigma = \limsup_{|\beta|\to\infty}(\beta!|a_\beta|)^{\frac{1}{|\beta|}}$$

можно охарактеризовать в терминах, связанных с множеством

$$L_1 := \left\{ x \in [0, +\infty)^N : \sum_{j=1}^N x_j \leqslant 1 \right\}.$$

Для $a \in \mathrm{Exp}(\mathbb{C}^N)$ *число* σ *совпадает с* L_1*–типом функции* a *(см.* [18, глава 3, § 1]*).*

Следующее утверждение вытекает из разрешимости интерполяционной задачи более общего вида (см., например, [20, теорема 1]; при $N = 1$ ее разрешимость доказана в [13, теорема 2]). Приведем независимое простое доказательство, использующее специфику множества узлов в данной ситуации. Оно проводится методом, примененным при доказательстве его одномерного аналога в [2, теорема 1.2.1].

Лемма 3.4. *Для любой последовательности* $g_\beta \in \mathbb{C}$, $\beta \in \mathbb{N}_0^N$, *для которой*

$$\limsup_{|\beta|\to\infty}(|g_\beta|)^{\frac{1}{|\beta|}} < +\infty,$$

существует функция $f \in \mathrm{Exp}(\mathbb{C}^N)$ *такая, что* $f(\beta) = g_\beta$ *для каждого* $\beta \in \mathbb{N}_0^N$.

Доказательство. Функция $g(t) = \sum\limits_{\beta\in\mathbb{N}_0^N} g_\beta t^\beta$ голоморфна на замкнутом полидиске

$$\{t \in \mathbb{C}^N \mid |t_j| \leqslant \varepsilon, 1 \leqslant j \leqslant N\}$$

для некоторого $\varepsilon > 0$. По интегральной формуле Коши

$$g_\beta = \frac{1}{(2\pi i)^N} \int\limits_{|t_1|=\varepsilon} \cdots \int\limits_{|t_N|=\varepsilon} \frac{g(t)}{t^{\beta+\mathbf{1}}} dt_N \cdots dt_1, \quad \beta \in \mathbb{N}_0^N.$$

Сделаем замену $\tau_j = \log t_j$, $1 \leqslant j \leqslant N$ ($\log z$ обозначает какую–либо непрерывную однозначную ветвь логарифма). Получим:

$$g_\beta = \frac{1}{(2\pi i)^N} \int\limits_{\Gamma_1} \cdots \int\limits_{\Gamma_N} g\left(e^{\tau_1}, \ldots, e^{\tau_N}\right) e^{-\langle \beta, \tau\rangle} d\tau_N \cdots d\tau_1,$$

где Γ_j — вертикальный отрезок в $\mathbb{C}$. Функция

$$f(z) := \frac{1}{(2\pi i)^N} \int\limits_{\Gamma_1} \cdots \int\limits_{\Gamma_N} g\left(e^{\tau_1}, \ldots, e^{\tau_N}\right) e^{-\langle z, \tau\rangle} d\tau_N \cdots d\tau_1$$

является целой функцией экспоненциального типа в $\mathbb{C}^N$ и $f(\beta) = g_\beta$ для всех $\beta \in \mathbb{N}_0^N$.

$\square$

Теорема 3.1. (i) *Для любой функции $a \in \operatorname{Exp}(\{0\})$, всякого непустого открытого множества Ω в $\mathbb{C}^N$ в $H(\Omega)$ выполняются равенства $\mathcal{E}_a = \mathcal{E}_{\theta,\widetilde{a}}$ и $\mathcal{E}_{\theta,a} = \mathcal{E}_{\widehat{a}}$.*

(ii) *Для каждой функции $a \in \operatorname{Exp}(\mathbb{C}^N)$ в $H(\mathbb{C}^N)$ справедливо равенство $\mathcal{E}_{\theta,a} = \mathcal{E}_{\widehat{a}}$.*

(iii) *Для каждой функции $a \in \operatorname{Exp}(\mathbb{C}^N)$ существует $c \in \operatorname{Exp}(\mathbb{C}^N)$, для которого $\mathcal{E}_a = \mathcal{E}_{\theta,c}$ в $H(\mathbb{C}^N)$.*

(iv) *Если*

$$\limsup_{|\beta|\to\infty} (\beta! |a_\beta|)^{\frac{1}{|\beta|}} < 1,$$

то $\mathcal{E}_a = \mathcal{E}_{\theta,\widetilde{a}}$ в $H(\mathbb{C}^N)$.

(v) *Если*

$$\limsup_{|\beta|\to\infty} (\beta! |a_\beta|)^{\frac{1}{|\beta|}} < 1,$$

то $\mathcal{E}_a = \mathcal{E}_{\theta,\widetilde{a}}$ в $H((\mathbb{C}^*)^N)$. Если

$$\limsup_{|\beta|\to\infty} (\beta! |a_\beta|)^{\frac{1}{|\beta|}} < \log 2,$$

то $\mathcal{E}_{\theta,a} = \mathcal{E}_{\widehat{a}}$ в $H((\mathbb{C}^*)^N)$.

Доказательство. (i): В силу (доказательства) леммы 3.3 и теорем 2.1 и 2.3 для любых $f \in H(\Omega)$, $t \in \Omega$

$$\sum_{\gamma\in\mathbb{N}_0^N} |\theta^\gamma(f)(t)| \sum_{\beta\geqslant\gamma} |s(\beta,\gamma)||a_\beta| < +\infty, \tag{3.2}$$

$$\sum_{\gamma\in\mathbb{N}_0^N} |t^\gamma||f^{(\gamma)}(t)| \sum_{\gamma\geqslant\gamma} S(\beta,\gamma)|a_\beta| < +\infty. \tag{3.3}$$

Вследствие (3.2) и леммы 3.1 для всех $f \in H(\Omega)$, $t \in \Omega$

$$\mathcal{E}_{\theta,\widetilde{a}}(f)(t) = \sum_{\gamma\in\mathbb{N}_0^N} \theta^\gamma(f)(t) \sum_{\beta\geqslant\gamma} s(\beta,\gamma) a_\beta = \sum_{\beta\in\mathbb{N}_0^N} a_\beta \sum_{0\leqslant\gamma\leqslant\beta} s(\beta,\gamma)\theta^\gamma(f)(t) = \mathcal{E}_a(f)(t).$$

По (3.3) и лемме 3.1 для любых $f \in H(\Omega)$, $t \in \Omega$

$$\mathcal{E}_{\widehat{a}}(f)(t) = \sum_{\gamma\in\mathbb{N}_0^N} t^\gamma f^{(\gamma)}(t) \sum_{\beta\geqslant\gamma} S(\beta,\gamma) a_\beta = \sum_{\beta\in\mathbb{N}_0^N} a_\beta \sum_{0\leqslant\gamma\leqslant\beta} S(\beta,\gamma)\theta^\gamma(f)(t) = \mathcal{E}_{\theta,a}(f)(t).$$

(ii): В этом случае для всех $f \in H(\mathbb{C}^N)$, $t \in \mathbb{C}^N$ справедливо соотношение (3.3), а значит, $\mathcal{E}_{\widehat{a}}(f)(t) = \mathcal{E}_{\theta,a}(f)(t)$.

(iii): Выполняются равенства

$$\mathcal{E}_a(f_\beta) = \lambda_\beta f_\beta, \qquad \lambda_\beta = \beta! \sum_{0\leqslant\gamma\leqslant\beta} \frac{a_\gamma}{(\beta-\gamma)!}, \qquad \beta \in \mathbb{N}_0^N.$$

Оценим $|\lambda_\beta|$ сверху. Поскольку

$$|\lambda_\beta| \leqslant \beta! \sum_{0\leqslant\gamma\leqslant\beta} \frac{|a_\gamma|}{(\beta-\gamma)!}$$

и существуют $C, \sigma > 0$ такие, что $|a_\nu| \leqslant C\dfrac{\sigma^{|\nu|}}{\nu!}$ для всех $\nu \in \mathbb{N}_0^N$, тогда

$$|\lambda_\beta| \leqslant C \sum_{0\leqslant\gamma\leqslant\beta} \frac{\beta!\sigma^{|\gamma|}}{\gamma!(\beta-\gamma)!} = C(1+\sigma)^{|\beta|}, \quad \beta \in \mathbb{N}_0^N.$$

По лемме 3.4 найдется функция $c \in \operatorname{Exp}(\mathbb{C}^N)$, для которой $c(\beta) = \lambda_\beta$ при всех $\beta \in \mathbb{N}_0^N$. Так как $\mathcal{E}_{\theta,c}(f_\beta) = c(\beta)f_\beta = \mathcal{E}_a(f_\beta)$ для каждого $\beta \in \mathbb{N}_0^N$, множество всех многочленов плотно в $H(\mathbb{C}^N)$ и операторы $\mathcal{E}_{\theta,c}$ и $\mathcal{E}_a$ линейны и непрерывны в $H(\mathbb{C}^N)$, то $\mathcal{E}_{\theta,c} = \mathcal{E}_a$ на всем пространстве $H(\mathbb{C}^N)$.

(iv): По (ii) и по лемме 3.3 $\mathcal{E}_{\theta,\widetilde{a}} = \mathcal{E}_{\widehat{\widetilde{a}}} = \mathcal{E}_a$ в $H(\mathbb{C}^N)$.

(v): Если $\limsup\limits_{|\beta|\to\infty}(\beta!|a_\beta|)^{\frac{1}{|\beta|}} < 1$, то по теореме 2.4 и доказательству леммы 3.3 (ii) для любых $f \in H((\mathbb{C}^*)^N)$, $t \in (\mathbb{C}^*)^N$ справедливо соотношение (3.2). Поэтому $\mathcal{E}_a = \mathcal{E}_{\theta,\widetilde{a}}$ в $H((\mathbb{C}^*)^N)$.

Если

$$\limsup_{|\beta|\to\infty}(\beta!|a_\beta|)^{\frac{1}{|\beta|}} < \log 2,$$

то по теореме 2.4 и доказательству леммы 3.3 (i) для всех $f \in H((\mathbb{C}^*)^N)$, $t \in (\mathbb{C}^*)^N$ выполнено (3.3). Поэтому $\mathcal{E}_{\theta,a} = \mathcal{E}_{\widehat{a}}$ в $H((\mathbb{C}^*)^N)$.

□

4. Многомерный вариант теоремы Вигерта — Ло

Приведем один результат, который можно считать многомерной версией теоремы Вигерта — Ло [2, теорема 1.3.2] и доказательство которого использует лемму 3.3. Для обоснования такой терминологии отметим факт для функций одной переменной t, по сути, содержащийся в [11, п. 2]. Функция $f(t)$ голоморфна в окрестности точки 0 и голоморфно продолжается в $\overline{\mathbb{C}}\backslash\{1\}$ тогда и только тогда, когда функция $\dfrac{1}{t}f\left(\dfrac{1}{t}\right)$ голоморфна в окрестности бесконечности и голоморфно продолжается в $\overline{\mathbb{C}}\backslash\{1\}$. Значит, если

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!}t^n$$

является ненулевой целой функцией экспоненциального типа в $\mathbb{C}$, то функция

$$g_0(t) = \sum_{n=0}^{\infty} g^{(n)}(0)t^n$$

целая от $\dfrac{1}{1-t}$ в том и только в том случае, когда сопряженная диаграмма g совпадает с $\{1\}$. Поэтому теорему Вигерта — Ло можно переформулировать так: сопряженная диаграмма целой функции g экспоненциального типа совпадает с $\{1\}$ тогда и только тогда, когда существует целая функция a экспоненциального типа 0, для которой $a(n) = g^{(n)}(0)$ для всех $n \in \mathbb{N}_0$. Вследствие этого теорему ниже можно считать многомерным аналогом теоремы Вигерта — Ло. Будем использовать сведения об аналитических функционалах из [19, гл. 4, § 4.5]. Ниже $H(\mathbb{C}^N)'$ — топологическое сопряженное к $H(\mathbb{C}^N)$ пространство; $\mathcal{F} : H(\mathbb{C}^N)' \to \mathrm{Exp}(\mathbb{C}^N)$ — преобразование Лапласа:

$$\mathcal{F}(\varphi)(t) := \varphi_z(e^{\langle z,t\rangle}), \quad \varphi \in H(\mathbb{C}^N)', \quad t \in \mathbb{C}^N.$$

Теорема 4.1. *Для всякого ненулевого функционала $\varphi \in H(\mathbb{C}^N)'$ следующие условия равносильны:*

(i) *Определяющее компактное множество φ совпадает с $\{\mathbf{1}\}$.*

(ii) *Существует функция $a \in \mathrm{Exp}(\{0\})$ такая, что $a(\beta) = (\mathcal{F}(\varphi))^{(\beta)}(0)$ для любого $\beta \in \mathbb{N}_0^N$.*

Доказательство. (i)⇒(ii): Введем функцию $a(t) = \mathcal{F}(\varphi)(t)e^{-\langle 1,t\rangle}$, $t \in \mathbb{C}^N$. Так как $a \in \mathrm{Exp}(\{0\})$, то по лемме 3.3 определена функция $\widetilde{a} \in \mathrm{Exp}(\{0\})$, причем

$$\widetilde{a}(\beta) = \beta! \sum_{0\leqslant\gamma\leqslant\beta} \frac{a_\gamma}{(\beta-\gamma)!}$$

для всех $\beta \in \mathbb{N}_0^N$. Поскольку $\mathcal{F}(\varphi)(t) = a(t)e^{\langle 1,t\rangle}$, $t \in \mathbb{C}^N$, получим $(\mathcal{F}(\varphi))^{(\beta)}(0) = \widetilde{a}(\beta)$, $\beta \in \mathbb{N}_0^N$.

(ii)⇒(i): Пусть $a = \mathcal{F}(\psi)$ для функционала $\psi \in H(\mathbb{C}^N)'$, определяющее компактное множество которого совпадает с $\{0\}$. Для любого $t \in \mathbb{C}^N$

$$\mathcal{F}(\varphi)(t) = \sum_{\beta\in\mathbb{N}_0^N} \frac{(\mathcal{F}(\varphi))^{(\beta)}(0)}{\beta!}t^\beta = \sum_{\beta\in\mathbb{N}_0^N} \frac{a(\beta)}{\beta!}t^\beta = \sum_{\beta\in\mathbb{N}_0^N} \frac{\psi_u(e^{\langle\beta,u\rangle})}{\beta!}t^\beta$$

$$= \psi_u\left(\sum_{\beta\in\mathbb{N}_0^N} \frac{e^{\langle\beta,u\rangle}}{\beta!}t^\beta\right) = \psi_u\left(\sum_{\beta\in\mathbb{N}_0^N} \frac{(e^{u_1})^{\beta_1}\cdots(e^{u_N})^{\beta_N}t^\beta}{\beta!}\right) = \psi_u\left(e^{e^{u_1}t_1+\cdots e^{u_N}t_N}\right).$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$, выберем $\delta > 0$ такое, что $|e^w - 1| < \varepsilon$ для всех $w \in \mathbb{C}^N$, удовлетворяющих неравенству $|w| < \delta$. Поскольку определяющее компактное множество ψ совпадает с $\{0\}$, найдется $C > 0$, для которого для каждого $t \in \mathbb{C}^N$

$$\begin{aligned}
|\mathcal{F}(\psi)(t)| &\leqslant C \sup_{|u_j|\leqslant\delta, 1\leqslant j\leqslant N} \left|e^{e^{u_1}t_1+\cdots+e^{u_N}t_N}\right| \\
&\leqslant C \sup_{|u_j|\leqslant\delta, 1\leqslant j\leqslant N} e^{\mathrm{Re}(e^{u_1}t_1+\cdots e^{u_N}t_N)} \\
&= C\left(\sup_{|u_j|\leqslant\delta, 1\leqslant j\leqslant N} e^{\mathrm{Re}((e^{u_1}-1)t_1)+\cdots+\mathrm{Re}((e^{u_N}-1)t_N)}\right)e^{\mathrm{Re}\,t_1+\cdots+\mathrm{Re}\,t_N} \\
&\leqslant Ce^{\varepsilon|t_1|+\cdots+\varepsilon|t_N|}e^{\mathrm{Re}\langle 1,t\rangle}.
\end{aligned}$$

Так как $\mathrm{Re}\,t_1 + \cdots + \mathrm{Re}\,t_N = \mathrm{Re}\langle 1,t\rangle$, последнее влечет, что определяющее компактное множество φ совпадает с $\{\mathbf{1}\}$.

□

5. Любой адамаровский оператор в пространстве всех целых функций является оператором Эйлера

Ниже $\mathcal{L}_h(H(\mathbb{C}^N))$ — пространство всех операторов адамаровского типа (адамаровских) в $H(\mathbb{C}^N)$, т.е. таких линейных непрерывных в $H(\mathbb{C}^N)$ операторов A, для которых каждый моном f_α, $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$, является собственным вектором A. По [8, теорема 2] отображение $\varphi \mapsto A_\varphi$, где

$$A_\varphi(f)(t) := \varphi_z(f(tz)), \qquad t \in \mathbb{C}^N,$$

биективно из $H(\mathbb{C}^N)'$ в $\mathcal{L}_h(H(\mathbb{C}^N))$. Пусть $\mathcal{L}_\mathcal{E}(H(\mathbb{C}^N))$ — множество всех операторов $\mathcal{E}_a$, $a \in \operatorname{Exp}(\mathbb{C}^N)$. Каждый оператор $\mathcal{E}_a$ адамаровский; он совпадает с A_{φ_a}, где

$$\varphi_a = \sum_{\beta \in \mathbb{N}_0^N} a_\beta \delta_{1,\beta}, \qquad \delta_{1,\beta}(f) = f^{(\beta)}(\mathbf{1}).$$

Покажем, что и всякий адамаровский оператор в $H(\mathbb{C}^N)$ является оператором Эйлера вида (1.1), а значит, и (1.2).

Теорема 5.1. *Выполняется равенство* $\mathcal{L}_h(H(\mathbb{C}^N)) = \mathcal{L}_\mathcal{E}(H(\mathbb{C}^N))$.

Доказательство. Для любых $\varphi \in H(\mathbb{C}^N)'$, $f \in H(\mathbb{C}^N)$

$$\varphi(f) = \varphi_z\left(\sum_{\beta \in \mathbb{N}_0^N} \frac{f^{(\beta)}(\mathbf{1})}{\beta!}(z-\mathbf{1})^\beta\right) = \sum_{\beta \in \mathbb{N}_0^N} f^{(\beta)}(\mathbf{1})\frac{1}{\beta!}\varphi_z((z-\mathbf{1})^\beta).$$

Существуют $C, R > 0$ такие, что для любого $\beta \in \mathbb{N}_0^N$

$$|\varphi_z((z-\mathbf{1})^\beta)| \leqslant C \sup_{|z_j - 1| \leqslant R, 1 \leqslant j \leqslant N} |(z-\mathbf{1})^\beta| = CR^{|\beta|}.$$

Значит, если $c_\beta := \varphi_z((z-\mathbf{1})^\beta)$, то

$$\limsup_{|\beta| \to \infty} |c_\beta|^{\frac{1}{|\beta|}} \leqslant R$$

и

$$c(t) = \sum_{\beta \in \mathbb{N}_0^N} \frac{c_\beta}{\beta!} t^\beta, \qquad t \in \mathbb{C}^N,$$

— целая функция экспоненциального типа в $\mathbb{C}^N$. Следовательно, $\varphi = \varphi_c$ и $A_\varphi = \mathcal{E}_c$. Итак, $\mathcal{L}_h(H(\mathbb{C}^N)) = \mathcal{L}_\mathcal{E}(H(\mathbb{C}^N))$.

$\square$

Замечание 5.1. *Пусть*

$$\Omega := \left\{z \in \mathbb{C}^N : \sum_{j=1}^N |z_j|^2 < R^2\right\}, \qquad R \in (0, +\infty), \qquad \lambda \in \mathbb{C}^N,$$
$$|\lambda_j| \leqslant 1, \qquad 1 \leqslant j \leqslant N, \qquad \lambda \neq \mathbf{1}.$$

Оператор растяжения $M_\lambda(f)(t) = f(\lambda_1 t_1, \dots, \lambda_N t_N)$ *является адамаровским в* $H(\Omega)$, *но не является оператором Эйлера вида* (1.1) *и* (1.2) *для* $a \in \operatorname{Exp}(\{0\})$. *Действительно, предположим, что найдется функция* $a \in \operatorname{Exp}(\{0\})$, *для которой* $M_\lambda = \mathcal{E}_a$ *в* $H(\Omega)$. *Тогда для* $f(t) = e^{\langle \mathbf{1}, t\rangle}$ *для всех* $t \in \mathbb{C}^N$ *выполняются равенства* $a(t)f(t) = \mathcal{E}_a(f)(t) = f(\lambda t)$, *а значит,* $a(t) = e^{\langle \lambda - \mathbf{1}), t\rangle}$. *Получено противоречие, поскольку функция* $e^{\langle \lambda - \mathbf{1}, t\rangle}$ *не принадлежит* $\operatorname{Exp}(\{0\})$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Г.Г. Брайчев, В.В. Моржаков. *О применимости операторов бесконечного порядка в частных производных* // Мат. заметки **24**:6, 771—777 (1978).
2. Л. Бибербах. *Аналитическое продолжение.* М.: Наука. 1967.
3. Б.А. Вострецов. *О существовании граничных значений и об интегральном предмтавлении функций, аналитических в единичном круге* // Докл. акад. наук СССР **65**:1, 7–8 (1949).
4. А.О. Гельфонд. *Исчисление конечных разностей.* М.: ГИФМЛ. 1959.
5. А.А. Гольдберг. *Элементарные замечания о формулах для определения порядка и типа целых функций многих переменных* // Докл. акад. наук Арм. ССР **29**, 145–152 (1959).
6. С.В. Знаменский. *О разрешимости дифференциальных уравнений бесконечного порядка в пространствах голоморфных функций, теореме Леонтьева и формуле Вострецова* // Сиб. мат. ж. **18**:6, 1307–1320 (1977).
7. И.И. Ибрагимов, М.В. Келдыш. *Об интерполяции целых функций* // Мат. сб. **20(62)**:2, 283–291 (1947).
8. О.А. Иванова, С.Н. Мелихов. *Операторы почти адамаровского типа и оператор Харди — Литтлвуда в пространстве целых функций многих комплексных переменных* // Мат. заметки **110**:1, 52—64 (2021).
9. Ю.Ф. Коробейник. *О применимости дифференциальных операторов бесконечного порядка* // Сиб. мат. ж. **10**:3, 549–564 (1969).
10. Ю.Ф. Коробейник. *Операторы сдвига на числовых семействах.* Ростов–на–Дону: изд–во РГУ 1983.
11. Ю.Ф. Коробейник, Ю.М. Донсков. *Аналитические решения уравнения Эйлера бесконечного порядка* // Изв. высш. учебн. завед., Мат. **1969**:11, 44–52 (1969),
12. К. Лейхтвейс. *Выпуклые множества.* М.: Наука. 1985.
13. А.Ф. Леонтьев. *К вопросу об интерполировании в классе целых функций конечного порядка* Мат. сб. **83**:1, 81–96 (1957).
14. А.Ф. Леонтьев. *Целые функции. Ряды экспонент.* М.: Наука. 1983.
15. С.С. Линчук. *Диагональные операторы в пространствах аналитических функций и их приложения* // В: «Актуальные вопросы теории функций», Ростов-на-Дону: изд–во РГУ 118—121 (1987).
16. А. Пич. *Ядерные локально выпуклые пространства.* М.: Мир. 1967.
17. Дж. Риордан. *Введение в комбинаторный анализ.* М.: изд–во ИЛ. 1963.
18. Л.И. Ронкин. *Введение в теорию целых функций многих переменных.* М.: Наука. 1971.
19. Л. Хермандер. *Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных.* М.: Мир. 1968.
20. C.A. Berenstein, B.A. Taylor. *On the geometry of interpolating varieties* // in “Séminaire Pierre Lelong — Henri Skoda (Analyse) Années 1980/81”, P. Lelong, H. Scoda (eds.), Springer–Verlag, Berlin, 1–25 (1982).
21. L. Comtet. *Advances Combinatories.The Art of Finite and Infinite Expansions.* D. Reider Pub. Co., Dordrecht (1974).
22. H.T. Davis. *The Euler differential equation of infinite order* // Amer. Math. Monthly **32**:5, 223–233 (1925).
23. P. Domański, M. Langenbruch. *Representation of multipliers on spaces of real analytic functions* // Analysis, München **32**:2, 137–162 (2012).
24. P. Domański, M. Langenbruch. *Hadamard multipliers on spaces of real analytic functions* // Adv. Math. **240**, 575–612 (2013).
25. P. Domański, M. Langenbruch. *Interpolation of holomorphic functions and surjectivity of Taylor coefficient multipliers* // Adv. Math. **293**, 782–855 (2016).
26. P. Domański, M. Langenbruch. *Euler type partial differential operators on real analytic functions* // J. Math. Anal. Appl. **443**:2, 652–674 (2016).
27. P. Domański, M. Langenbruch, D. Vogt. *Hadamard type operators on spaces of real analytic functions in several variables* // J. Funct. Anal. **269**:12, 3868–3913 (2015).

28. E. Hille. *Analytic Function Theory. Vol. II.* Chelsea Publishing Company, London (1973).
29. R. Ishimura. *Existence locale de solutions holomorphes pour les équations differetielles d'ordre infini* // Ann. Inst. Fourier **35**:3, 49–57 (1985).
30. R. Ishimura. *Sur les équations différentielles d'ordre infini d'Euler* // Mem. Fac. Sci., Kyushu Univ., Ser. A **44**:1, 1–10 (1990).
31. M. Trybula. *Hadamard multipliers on spaces of holomorphic functions* // Int. Equ. Oper. Theory **88**:2, 249–268 (2017).

Ольга Александровна Иванова,
Южный федеральный университет,
Институт математики, механики
и компьютерных наук им. И.И. Воровича
ул. Мильчакова, 8а,
344090, г. Ростов-на-Дону, Россия
E-mail: ivolga@sfedu.ru

Сергей Николаевич Мелихов,
Южный федеральный университет,
Институт математики, механики
и компьютерных наук им. И.И. Воровича
ул. Мильчакова, 8а,
344090, г. Ростов-на-Дону, Россия,
Южный математический институт ВНЦ РАН,
ул. Ватутина, 53,
362025, г. Владикавказ, Россия
E-mail: snmelihov@yandex.ru, snmelihov@sfedu.ru