ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 18 № 2 (2026). С. 23-35.

УДК 517.958

ЗАДАЧА О МАЛЫХ ДВИЖЕНИЯХ МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

О.А. ГРИБКОВА, Д.А. ЗАКОРА, А.Е. МАМОНТОВ, Д.А. ПРОКУДИН

Аннотация. В работе изучается задача о малых движениях и нормальных колебаниях гомогенной смеси нескольких вязких несжимаемых жидкостей. Рассматриваемая модель представляет собой некоторое обобщение известной системы уравнений Навье — Стокса динамики однокомпонентной несжимаемой вязкой среды и включает в себя уравнения несжимаемости и импульсов. Доказана корректная разрешимость соответствующей начально–краевой задачи. В терминах оператора Стокса построен спектр и система собственных элементов в задаче о нормальных колебаниях.

Ключевые слова: смесь жидкостей, вязкая несжимаемая жидкость, задача Коши, дискретный спектр, ортонормированный базис.

Mathematics Subject Classification: 76T30, 76M22

1. Введение

Приведём постановку нелинейной задачи, описывающей баротропное движение многокомпонентной вязкой сжимаемой жидкости. В работе изучается линеаризованная относительно состояния покоя система уравнений в случае несжимаемых компонент смеси.

Пусть ограниченная область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с липшицевой границей $\partial\Omega$ заполнена гомогенной смесью нескольких вязких сжимаемых жидкостей. Введём систему координат $Ox_1x_2x_3$ так, что ось Ox_3 направлена против действия силы тяжести $-g\mathbf{e}_3$, $g > 0$, а начало координат находится внутри области Ω. Обозначим через $\mathbf{n}$ единичный вектор, нормальный к границе $\partial\Omega$ и направленный вне области Ω. Баротропное движение смеси $n \geqslant 2$ вязких сжимаемых жидкостей описывается следующей системой уравнений:

$$
\begin{aligned}
&R_i\frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t} + R_i(\mathbf{u}_i\cdot\nabla)\mathbf{u}_i = \operatorname{div}\,\mathbf{T}_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\mathbf{u}_j-\mathbf{u}_i) + R_i\mathbf{F}_i,\\
&\frac{\partial R_i}{\partial t} + \operatorname{div}(R_i\mathbf{u}_i) = 0, \qquad (t,x)\in[0,+\infty)\times\Omega, \qquad i=1,\ldots,n,
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

где $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_i(t,x) = \big(u_{i1}(t,x); u_{i2}(t,x); u_{i3}(t,x)\big)^{\mathsf{T}}$ $(x = (x_1; x_2; x_3) \in \Omega)$ — поле скоростей i-й компоненты смеси (символом T обозначена операция транспонирования), $R_i = R_i(t,x)$ — плотность, $a_{ij} = a_{ji} \geqslant 0$ — коэффициенты, отвечающие за интенсивность обмена импульсом между составляющими смеси, $\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i(t,x)$ — известные поля внешних массовых сил.

O.A. Gribkova, D.A. Zakora, A.E. Mamontov, D.A. Prokudin, Problem on small motions of multicomponent viscous incompressible fluid.

Работа поддержана Министерством науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение № 075-02-2026-1313.

Поступила 2 декабря 2024 г.

Тензоры напряжений $\mathbf{T}_i$ и тензоры вязких напряжений $\mathbf{S}_i$ определяются равенствами[1]:

$$\mathbf{T}_i := -P_i\mathbf{I}_3 + \mathbf{S}_i, \qquad \mathbf{S}_i := \sum_{j=1}^{n}\big(\lambda_{ij}\operatorname{tr} e(\mathbf{u})\mathbf{I}_3 + 2\mu_{ij}e(\mathbf{u})\big),$$

где $P_i = P_i(t,x)$ — давление в i-й компоненте смеси, $\mathbf{I}_3$ — единичная матрица в $\mathbb{R}^3$, μ_{ij}, λ_{ij} — компоненты матриц вязкостей $\mathbf{M} := \{\mu_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$, $\mathbf{\Lambda} := \{\lambda_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$. Матрицы вязкостей подчинены следующим условиям:

$$\mathbf{M} > 0, \qquad 2\mathbf{M} + 3\mathbf{\Lambda} > 0.$$

Давление и плотность в каждой компоненте смеси обычно связаны некоторым уравнением состояния, а система (1.1) рассматривается с классическими граничными условиями прилипания, либо с условиями непротекания и нулевыми касательными напряжениями.

Система уравнений (1.1) — один из многих вариантов описания движения многокомпонентных жидкостных смесей и моделирует движения гомогенной смеси вязких сжимаемых жидкостей, многоскоростная модель (подробности см. в [9], [17], [15], [6]). В частности, это означает, что в каждой точке пространства присутствуют все компоненты смеси, которые находятся в одной фазе, но имеют каждая свою локальную скорость движения; взаимодействие между компонентами осуществляется через обмен импульсом и вязкое трение. При этом учёт межкомпонентного вязкого трения посредством рассмотрения недиагональных матриц вязкостей $\mathbf{M}$ и $\mathbf{\Lambda}$ во многом определяет специфику исследуемой модели динамики смесей. Если матрицы вязкостей диагональны и в (1.1) все $a_{ij} = 0$, то мы будем иметь дело с n независимыми системами уравнений Навье — Стокса для каждой компоненты.

Математическое исследование многоскоростных моделей движения многокомпонентных сред с недиагональными матрицами вязкостей началось относительно недавно. Одной из первых работ, в которой были получены результаты о разрешимости в многомерном случае, является работа J. Frehse, S. Goj и J. Málek [10]. В упомянутой работе доказана разрешимость задачи Коши для системы без конвективных членов в случае общей зависимости давлений от плотностей компонент. В [11] этими же авторами получен результат о единственности слабых решений задачи Коши при дополнительных предположениях, что массовые силы и члены, учитывающие обмен импульсом между различными компонентами равны нулю. В работе J. Frehse и W. Weigant [12] доказано существование и единственность классического решения краевой задачи для квазистационарной системы без конвективных слагаемых со специальными граничными условиями. Результаты о существовании решений с учетом конвективных слагаемых получены А.Е. Мамонтовым и Д.А. Прокудиным для многоскоростной модели в [6], [7]. Спектральный анализ некоторых линейных моделей сжимаемых вязких многокомпонентных сред проведен в [18], [2].

Цель данной работы — исследование задачи о малых движениях и нормальных колебаниях линеаризованной относительно состояния покоя системы (1.1) в случае несжимаемых компонент смеси. Основные результаты изложены в теореме 2.1.

2. Постановка задачи и основные результаты

Будем считать, что компоненты смеси — несжимаемые однородные жидкости с плотностями $R_i(t,x) = \rho_i > 0$. Рассматривая состояние покоя $\mathbf{u}_i = \mathbf{0}$, $\mathbf{F}_i = -g\mathbf{e}_3$ $(i = 1,\dots,n)$ системы (1.1), найдём стационарные давления в компонентах смеси $P_{i0}(x_3) = -\rho_i g x_3 + p_{i0}$,

[1] Для векторного поля $\mathbf{u} = (u_1; u_2; u_3)^{\intercal}$ определим набор коэффициентов $e_{lk}(\mathbf{u}) := \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_l}{\partial x_k} + \dfrac{\partial u_k}{\partial x_l}\right)$ $(l,k = 1,2,3)$ тензора скоростей деформаций $e(\mathbf{u})$. Через $\operatorname{tr} e(\mathbf{u}) := \sum_{s=1}^{3} e_{ss}(\mathbf{u}) \equiv \operatorname{div}\mathbf{u}$ обозначим след матрицы $e(\mathbf{u})$.

где p_{i0} — давления в начале координат. Будем считать, что $P_i(t,x) = P_{i0}(x_3) + p_i(t,x)$, $\mathbf{F}_i(t,x) = -g\mathbf{e}_3 + \mathbf{f}_i(t,x)$, где p_i — так называемое динамическое давление, $\mathbf{f}_i$ — малое поле внешних массовых сил, наложенное на гравитационное поле. Предполагая, что $\mathbf{u}_i$, p_i, $\mathbf{f}_i$ — малые одного порядка малости, придём к линеаризованной системе. Эта система, граничные условия прилипания и начальные условия имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_i}\nabla p_i + \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\rho_i}\mu_{ij}\Delta\mathbf{u}_j + \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\rho_i}a_{ij}(\mathbf{u}_j-\mathbf{u}_i) + \mathbf{f}_i, \quad (t,x)\in[0,+\infty)\times\Omega,\\
&\operatorname{div}\mathbf{u}_i = 0, \quad (t,x)\in[0,+\infty)\times\Omega, \qquad \mathbf{u}_i = \mathbf{0}, \quad (t,x)\in[0,+\infty)\times\partial\Omega,\\
&\mathbf{u}_i(0,x) = \mathbf{u}_i^0(x), \quad i=1,\ldots,n.
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Здесь μ_{ij} — коэффициенты вязкостей, $a_{ij} = a_{ji} \geqslant 0$ — коэффициенты, отвечающие за интенсивность обмена импульсами между компонентами. Матрица $\mathbf{M} := \{\mu_{ij}\}_{i,j=1}^n$, называемая матрицей вязкостей, является симметричной и положительной: $\mathbf{M} > 0$.

Начально–краевая задача (2.1) с использованием метода ортогонального проектирования трактуется в виде задачи Коши в гильбертовом пространстве[1] $\mathcal{H} := \oplus_{i=1}^n \mathbf{J}_0(\Omega)$:

$$\frac{d\xi}{dt} = -\mathcal{R}^{-1}(\mathcal{M}\mathcal{A}+\mathcal{B})\xi + \mathcal{F}(t), \quad \xi(0) = \xi^0, \tag{2.2}$$

где

$$\xi := (\mathbf{u}_1;\ldots;\mathbf{u}_n)^\intercal, \quad \xi^0 := \big(\mathbf{u}_1^0;\ldots;\mathbf{u}_n^0\big)^\intercal, \quad \mathcal{F}(t) := \big(P_0\mathbf{f}_1(t);\ldots;P_0\mathbf{f}_n(t)\big)^\intercal,$$

$$\mathcal{R} := \{\delta_{ij}\rho_j I\}_{i,j=1}^n, \quad \mathcal{M} := \{\mu_{ij} I\}_{i,j=1}^n, \quad \mathcal{A} := \{\delta_{ij} A\}_{i,j=1}^n, \quad \mathcal{D}(\mathcal{A}) := \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{D}(A),$$

$$\mathcal{B} := \begin{pmatrix}
\sum\limits_{j=1}^n a_{1j}I - a_{11}I & -a_{12}I & \ldots & -a_{1n}I\\
-a_{21}I & \sum\limits_{j=1}^n a_{2j}I - a_{22}I & \ldots & -a_{2n}I\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
-a_{n1}I & -a_{n2}I & \ldots & \sum\limits_{j=1}^n a_{nj}I - a_{nn}I
\end{pmatrix}.$$

Здесь $\intercal$ — операция транспонирования, δ_{ij} — символ Кронекера, I — единичный оператор в $\mathbf{J}_0(\Omega)$, P_0 — ортопроектор пространства $\mathbf{L}_2(\Omega)$ на $\mathbf{J}_0(\Omega)$, A — оператор Стокса.

Определение 2.1. *Поля $\mathbf{u}_i$ и функции p_i $(i=1,\ldots,n)$ называются сильным по времени решением начально-краевой задачи* (2.1)*, если функция ξ является решением задачи Коши* (2.2)*. В свою очередь, функция ξ является решением задачи Коши* (2.2)*, если $\xi \in C^1([0,+\infty);\mathcal{H})$, $\xi(t)\in\mathcal{D}(\mathcal{A})$ при всех $t \geqslant 0$, $\mathcal{A}\xi \in C([0,+\infty);\mathcal{H})$, выполнены уравнение из* (2.2) *при всех $t \geqslant 0$ и начальное условие.*

Введём, кроме матрицы вязкостей $\mathbf{M}$, матрицу плотностей $\mathbf{R} := \{\delta_{ij}\rho_j\}_{i,j=1}^n$, связанную с оператором $\mathcal{R}$, и матрицу интенсивности обмена импульсами $\mathbf{B}$, связанную с оператором $\mathcal{B}$. И вообще, если $\mathbf{S} := \{s_{ij}\}_{i,j=1}^n$ — матрица, действующая в $\mathbb{C}^n$, то поставим ей в соответствие оператор $\mathcal{S} := \{s_{ij}I\}_{i,j=1}^n$, действующий в $\mathcal{H}$. Будем писать при этом $\mathbf{S} \leftrightarrow \mathcal{S}$.

Обозначим через $\lambda_k(A)$, $\mathbf{u}_k(A)$ собственные значения, занумерованные в порядке неубывания, и соответствующие им собственные элементы оператора Стокса A.

Основное содержание работы составляет следующая теорема.

Теорема 2.1. 1) *Пусть $\mathbf{u}_i^0 \in \mathcal{D}(A)$ $(i=1,\ldots,n)$, а поля $\mathbf{f}_i$ $(i=1,\ldots,n)$ удовлетворяют локальному условию Гёльдера. Тогда начально–краевая задача* (2.1) *имеет единственное сильное по времени решение.*

[1]Все используемые в данном разделе обозначения пространств и операторов пояснены в разделе 3.

2) *Спектр* σ *оператора* $\mathcal{R}^{-1}(\mathcal{M}\mathcal{A}+\mathcal{B})$ *расположен на положительной полуоси, дискретен и имеет следующее асимптотическое распределение:*

$$\lambda_k\big(\mathcal{R}^{-1}(\mathcal{M}\mathcal{A}+\mathcal{B})\big) = \left(\frac{|\Omega|}{3\pi^2}\operatorname{tr}\big(\mathbf{R}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{M}\mathbf{R}^{-\frac{1}{2}}\big)^{-\frac{3}{2}}\right)^{-\frac{2}{3}} k^{\frac{2}{3}}\big(1+o(1)\big), \quad k \longrightarrow \infty.$$

3) *Спектр* σ *представи́м в виде* $\sigma = \{\lambda_k^{(p)}\}_{k\in\mathbb{N},\, p=1,\ldots,n}$, *где* $\lambda_k^{(p)}$ $(p=1,\ldots,n)$ — *корни характеристических уравнений*

$$\det\big(\lambda_k(A)\mathbf{M}+\mathbf{B}-\lambda\mathbf{R}\big)=0.$$

Система собственных элементов $\{\xi_k^{(p)}\}_{k\in\mathbb{N},\, p=1,\ldots,n}$ *оператора* $\mathcal{R}^{-1}(\mathcal{M}\mathcal{A}+\mathcal{B})$ *образует ортонормированный базис пространства* $\mathcal{H}_{\mathcal{R}}$[1] *и представима в виде*

$$\left\{\xi_k^{(p)} = \begin{pmatrix}\varphi_{k,1}^{(p)}\\ \vdots \\ \varphi_{k,n}^{(p)}\end{pmatrix}\mathbf{u}_k(A) = \begin{pmatrix}\varphi_{k,1}^{(p)}\mathbf{u}_k(A)\\ \vdots \\ \varphi_{k,n}^{(p)}\mathbf{u}_k(A)\end{pmatrix}\right\}_{k\in\mathbb{N},\, p=1,\ldots,n},$$

где $\varphi_k^{(p)} := (\varphi_{k,1}^{(p)};\ldots;\varphi_{k,n}^{(p)})^{\intercal}$ $(p=1,\ldots,n)$ — *нормированные в* $\mathbb{C}^n_{\mathbf{R}}$ *к единице собственные векторы матричной спектральной задачи*

$$(\lambda_k(A)\mathbf{M}+\mathbf{B})\varphi = \lambda\mathbf{R}\varphi.$$

4) *Решение задачи Коши* (2.2) *выражается формулой*

$$\xi(t) = \mathcal{U}(t)\xi^0 + \int_0^t \mathcal{U}(t-s)\mathcal{F}(s)\,ds,$$

$$\mathcal{U}(t)\xi := \mathcal{U}(t)\begin{pmatrix}\mathbf{u}_1\\ \vdots\\ \mathbf{u}_n\end{pmatrix} = \sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{p=1}^{n} e^{-\lambda_k^{(p)}t}\sum_{l=1}^{n}\rho_l\varphi_{k,l}^{(p)}\big(\mathbf{u}_l,\mathbf{u}_k(A)\big)_{\mathbf{L}_2(\Omega)}\begin{pmatrix}\varphi_{k,1}^{(p)}\mathbf{u}_k(A)\\ \vdots\\ \varphi_{k,n}^{(p)}\mathbf{u}_k(A)\end{pmatrix}.$$

3. Корректная разрешимость начально–краевой задачи (2.1)

В этом разделе выводится задача (2.2) и доказывается утверждение 1) теоремы 2.1. Введём гильбертово пространство $\mathbf{L}_2(\Omega)$ со скалярным произведением и нормой

$$(\mathbf{u},\mathbf{v})_{\mathbf{L}_2(\Omega)} := \int_\Omega \mathbf{u}(x)\cdot\overline{\mathbf{v}(x)}\,d\Omega, \qquad \|\mathbf{u}\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega)} = \int_\Omega |\mathbf{u}(x)|^2\,d\Omega.$$

Для пространства $\mathbf{L}_2(\Omega)$ справедливо разложение Г. Вейля в ортогональную сумму соленоидальных полей с нулевой нормальной составляющей на границе и потенциальных полей (см., например, [5, гл. 2, § 1, формула (1.18)]):

$$\mathbf{L}_2(\Omega) = \mathbf{J}_0(\Omega)\oplus\mathbf{G}(\Omega),$$

где

$$\mathbf{J}_0(\Omega) := \big\{\mathbf{u}\in\mathbf{L}_2(\Omega):\ \operatorname{div}\mathbf{u}=0\ \ (x\in\Omega), \quad \mathbf{u}\cdot\mathbf{n}=0\ \ (x\in\partial\Omega)\big\},$$
$$\mathbf{G}(\Omega) := \big\{\mathbf{u}\in\mathbf{L}_2(\Omega):\ \mathbf{u}=\nabla\Psi\big\}.$$

Здесь операции дивергенции и нормальной составляющей на границе понимаются в смысле теории обобщённых функций (распределений) (см. [5, гл. 2, § 1, п. 6]).

[1] $\mathcal{H}_{\mathcal{R}}$, $\mathbb{C}^n_{\mathbf{R}}$ — энергетические пространства оператора $\mathcal{R}$ и матрицы $\mathbf{R}$ соответственно.

Будем считать далее, что поля $\mathbf{u}_i$, ∇p_i $(i = 1, \ldots, n)$ зависят от переменной t и принимают значения в $\mathbf{L}_2(\Omega)$. Тогда $\mathbf{u}_i(t) \in \mathbf{J}_0(\Omega)$ в силу уравнений неразрывности и граничных условий из (2.1), а $\nabla p_i(t) \in \mathbf{G}(\Omega)$, очевидно, при каждом $t \geqslant 0$. Введём ортопроекторы P_0 и P_G пространства $\mathbf{L}_2(\Omega)$ на подпространства $\mathbf{J}_0(\Omega)$ и $\mathbf{G}(\Omega)$ соответственно. Применяя к уравнениям импульсов из (2.1) поочерёдно ортопроекторы P_0 и P_G, получим следующие соотношения:

$$\frac{d\mathbf{u}_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\rho_i}\,\mu_{ij} P_0 \Delta \mathbf{u}_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\rho_i}\,a_{ij}(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) + P_0 \mathbf{f}_i, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{3.1}$$

$$\mathbf{0} = -\frac{1}{\rho_i}\,\nabla p_i + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\rho_i}\,\mu_{ij} P_G \Delta \mathbf{u}_j + P_G \mathbf{f}_i, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{3.2}$$

Из соотношений (3.2) по известным полям $\mathbf{u}_i$ и заданным полям $\mathbf{f}_i$ можно восстановить поля ∇p_i $(i = 1, \ldots, n)$, поэтому далее будем изучать только соотношения (3.1).

Введём оператор Стокса A — расширение по Фридрихсу оператора $-P_0\Delta$, определённого на гладких полях из $\mathbf{J}_0(\Omega)$ с условием прилипания на границе $\partial\Omega$ области Ω (см., например, [5, гл. 2, § 2, п. 6]). Оператор A самосопряжённый и положительно определённый, его спектр дискретен и имеет следующее асимптотическое распределение (см. [16]):

$$\lambda_k(A) = \left(\frac{|\Omega|}{3\pi^2}\right)^{-\frac{2}{3}} k^{\frac{2}{3}}\bigl(1 + o(1)\bigr), \quad k \to \infty. \tag{3.3}$$

С использованием оператора Стокса уравнения (3.1) вместе с начальными условиями из (2.1) перепишем в виде начальной задачи для системы операторных уравнений в $\mathbf{J}_0(\Omega)$:

$$\frac{d\mathbf{u}_i}{dt} = -\frac{1}{\rho_i}\left(\sum_{j=1}^{n} \mu_{ij} A \mathbf{u}_j + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i)\right) + P_0 \mathbf{f}_i, \qquad \mathbf{u}_i(0) = \mathbf{u}_i^0, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{3.4}$$

Систему операторных уравнений и начальных условий (3.4) теперь можно переписать в виде задачи Коши (2.2).

Дальнейшее доказательство изложим в виде нескольких лемм.

Лемма 3.1. *Пусть* $\det \mathbf{S} \neq 0$ *и* $\mathbf{S} \leftrightarrow \mathcal{S}$. *Тогда операторы* $\mathcal{S}\mathcal{A}$, $\mathcal{A}\mathcal{S}$ *замкнуты на* $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ *и* $\mathcal{S}\mathcal{A}\xi = \mathcal{A}\mathcal{S}\xi$ *для любых* $\xi \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$.

Доказательство. 1) Покажем, что оператор $\mathcal{S}\mathcal{A}$ замкнут на $\mathcal{D}(\mathcal{A})$. Оператор $\mathcal{A}$, в силу своей диагональной структуры, замкнут на своей естественной области определения $\mathcal{D}(\mathcal{A})$. Очевидно, что оператор $\mathcal{S}$ ограничен[1], то есть $\mathcal{S} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, поскольку все коэффициенты операторной матрицы $\mathcal{S}$ пропорциональны единичным операторам I. Из $\det \mathbf{S} \neq 0$ следует, что существует $\mathcal{S}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Отсюда следует (см., например, [3, гл. III, § 5, п. 5.2, задача 5.7]), что оператор $\mathcal{S}\mathcal{A}$ замкнут на $\mathcal{D}(\mathcal{A})$. Действительно, пусть $\xi_n \to \xi$ $(\xi_n \in \mathcal{D}(\mathcal{S}\mathcal{A}) = \mathcal{D}(\mathcal{A}))$, $\mathcal{S}\mathcal{A}\xi_n \to \zeta$. Последнее соотношение можно переписать в эквивалентной форме $\mathcal{A}\xi_n \to \mathcal{S}^{-1}\zeta$. Отсюда и из замкнутости оператора $\mathcal{A}$ следует, что $\xi \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ и $\mathcal{A}\xi = \mathcal{S}^{-1}\zeta$ или, что то же, $\mathcal{S}\mathcal{A}\xi = \zeta$.

2) Покажем, что оператор $\mathcal{A}\mathcal{S}$ замкнут на $\mathcal{D}(\mathcal{A})$. Оператор $\mathcal{A}\mathcal{S}$ определён на естественной области определения $\mathcal{D}(\mathcal{A}\mathcal{S}) := \{\xi \in \mathcal{H} : \ \mathcal{S}\xi \in \mathcal{D}(\mathcal{A})\}$ и замкнут на ней. Действительно, пусть $\xi_n \to \xi$ $(\xi_n \in \mathcal{D}(\mathcal{A}\mathcal{S}))$, $\mathcal{A}\mathcal{S}\xi_n \to \zeta$. Учитывая ограниченность оператора $\mathcal{S}$, из этих условий следует формулировка: $\mathcal{S}\xi_n \to \mathcal{S}\xi$ $(\mathcal{S}\xi_n \in \mathcal{D}(\mathcal{A}))$, $\mathcal{A}(\mathcal{S}\xi_n) \to \zeta$. Отсюда и из замкнутости оператора $\mathcal{A}$ следует, что $\mathcal{S}\xi \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ (или $\xi \in \mathcal{D}(\mathcal{A}\mathcal{S})$) и $\mathcal{A}\mathcal{S}\xi = \zeta$.

Покажем, что $\mathcal{D}(\mathcal{A}\mathcal{S}) = \mathcal{D}(\mathcal{A})$. Пусть $\xi \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$. Учитывая структуру оператора $\mathcal{S}$ и то, что область определения $\mathcal{D}(A)$ оператора Стокса A линейное множество, получим, что

[1] Через $\mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ обозначена алгебра линейных ограниченных из $\mathcal{H}_1$ в $\mathcal{H}_2$ операторов, определённых на всём пространстве $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{L}(\mathcal{H}) := \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$.

$\mathcal{S}\xi \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, а значит, $\mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{D}(\mathcal{AS})$. Пусть теперь $\xi \in \mathcal{D}(\mathcal{AS})$, то есть $\mathcal{S}\xi =: \zeta \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$. Тогда рассуждая как и выше, получим, что $\xi = \mathcal{S}^{-1}\zeta \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, а значит, $\mathcal{D}(\mathcal{AS}) \subset \mathcal{D}(\mathcal{A})$.

3) Равенство $\mathcal{SA}\xi = \mathcal{AS}\xi$ для любых $\xi \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ проверяется непосредственно. □

Лемма 3.2. *Оператор $\mathcal{B}$ ограничен и неотрицателен в $\mathcal{H}$.*

Доказательство. 1) Покажем, что оператор $\mathcal{B}$ ограничен. Для любых $\xi \in \mathcal{H}$ имеем

$$\|\mathcal{B}\xi\|^2_{\mathcal{H}} = \sum_{i=1}^n \Big\| -\sum_{j=1}^n a_{ij}(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i)\Big\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega)} \leqslant \sum_{i=1}^n \Big(\sum_{j=1}^n a_{ij}\|\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)}\Big)^2$$
$$\leqslant n\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2\|\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega)} \leqslant 2n \max_{i,j=1,\ldots,n}\{a_{ij}^2\}\sum_{i,j=1}^n \big(\|\mathbf{u}_j\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega)} + \|\mathbf{u}_i\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega)}\big)$$
$$= 4n^2 \max_{i,j=1,\ldots,n}\{a_{ij}^2\}\sum_{j=1}^n \|\mathbf{u}_j\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega)} = 4n^2 \max_{i,j=1,\ldots,n}\{a_{ij}^2\}\|\xi\|^2_{\mathcal{H}},$$

то есть $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ и $\|\mathcal{B}\| \leqslant 2n \max\limits_{i,j=1,\ldots,n}\{|a_{ij}|\}$.

2) Далее, напомним, что $a_{ij} = a_{ji} \geqslant 0$ $(i,j = 1,\ldots,n)$. Для любого $\xi \in \mathcal{H}$ имеем

$$(\mathcal{B}\xi,\xi)_{\mathcal{H}} = -\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i)_{\mathbf{L}_2(\Omega)} = -\sum_{i>j} a_{ij}(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i)_{\mathbf{L}_2(\Omega)} - \sum_{i<j} a_{ij}(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i)_{\mathbf{L}_2(\Omega)}$$
$$= -\sum_{i>j} a_{ij}(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i)_{\mathbf{L}_2(\Omega)} - \sum_{j<i} a_{ji}(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_j)_{\mathbf{L}_2(\Omega)} = \sum_{i>j} a_{ij}\|\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega)} \geqslant 0,$$

то есть оператор $\mathcal{B}$ самосопряжён (см., например, [13, гл. 2, § 12, теорема 12.3]) и неотрицателен в $\mathcal{H}$. □

Лемма 3.3. *Оператор $\mathcal{R}^{-1}(\mathcal{MA}+\mathcal{B})$ самосопряжён и положительно определён в энергетическом пространстве $\mathcal{H}_{\mathcal{R}}$ оператора $\mathcal{R}$.*

Доказательство. 1) Покажем, что оператор $\mathcal{MA}$ самосопряжён в $\mathcal{H}$. Действительно, из $\mathcal{M} = \mathcal{M}^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ следует (см. [3, гл. III, § 5, задача 5.26]), что $(\mathcal{MA})^* = \mathcal{A}^*\mathcal{M}^* = \mathcal{AM}$ на $\mathcal{D}((\mathcal{MA})^*) = \mathcal{D}(\mathcal{AM})$. Из $\det \mathbf{M} \neq 0$ и леммы 3.1 следует, что $\mathcal{AM} = \mathcal{MA}$ на $\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \mathcal{D}(\mathcal{MA}) = \mathcal{D}(\mathcal{AM})$.

Далее, оператор $\mathcal{MA}+\mathcal{B}$ самосопряжён в $\mathcal{H}$, поскольку $\mathcal{B}$ самосопряжён и ограничен (см. [3, гл. V, § 4, теорема 4.3]). Отсюда следует, что оператор $\mathcal{R}^{-1}(\mathcal{MA}+\mathcal{B})$ самосопряжён в энергетическом пространстве $\mathcal{H}_{\mathcal{R}}$ оператора $\mathcal{R}$. Действительно, учитывая $\mathcal{R} = \mathcal{R}^*, \mathcal{R}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, имеем для любых $\xi, \zeta \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) = \mathcal{D}(\mathcal{R}^{-1}(\mathcal{MA}+\mathcal{B}))$:

$$\big(\mathcal{R}^{-1}(\mathcal{MA}+\mathcal{B})\xi,\zeta\big)_{\mathcal{H}_{\mathcal{R}}} = \big((\mathcal{MA}+\mathcal{B})\xi,\zeta\big)_{\mathcal{H}} = \big(\xi,(\mathcal{MA}+\mathcal{B})\zeta\big)_{\mathcal{H}}$$
$$= \big(\mathcal{R}\xi,\mathcal{R}^{-1}(\mathcal{MA}+\mathcal{B})\zeta\big)_{\mathcal{H}} = \big(\xi,\mathcal{R}^{-1}(\mathcal{MA}+\mathcal{B})\zeta\big)_{\mathcal{H}_{\mathcal{R}}}.$$

2) Покажем, что оператор $\mathcal{R}^{-1}(\mathcal{MA}+\mathcal{B})$ положительно определён в $\mathcal{H}_{\mathcal{R}}$.

Обозначим через $\lambda_j(\mathbf{M})$, $\varphi_j(\mathbf{M})$ $(j = 1,\ldots,n)$ собственные значения и соответствующие им собственные векторы матрицы $\mathbf{M}$. Координаты собственных векторов можно считать действительными, а сама система $\{\varphi_j(\mathbf{M})\}_{j=1}^n$ есть ортонормированный базис в $\mathbb{C}^n$, так как матрица вязкостей $\mathbf{M}$ положительна по условию. Обозначим через $\mathbf{M}_\varphi = \mathbf{M}_\varphi(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$ матрицу, столбцами которой являются собственные векторы матрицы $\mathbf{M}$. Тогда имеют место равенства $\mathbf{M}_\varphi^\intercal = \mathbf{M}_\varphi^*$, $\mathbf{M}_\varphi^*\mathbf{M}_\varphi = \mathbf{M}_\varphi\mathbf{M}_\varphi^* = \mathbf{I}_n$, где $\mathbf{I}_n$ — единичная матрица в $\mathbb{C}^n$, $\mathbf{M}_\varphi^*\mathbf{M}\mathbf{M}_\varphi = \{\delta_{ij}\lambda_j(\mathbf{M})\}_{i,j=1}^n$. Положим $\mathbf{M}_\varphi \leftrightarrow \mathcal{M}_\varphi$. Тогда $\mathcal{M}_\varphi^*\mathcal{M}_\varphi = \mathcal{M}_\varphi\mathcal{M}_\varphi^* = \mathcal{I}$, где $\mathcal{I}$ — единичный оператор в $\mathcal{H}$, $\mathcal{M}_\varphi^*\mathcal{M}\mathcal{M}_\varphi = \{\delta_{ij}\lambda_j(\mathbf{M})I\}_{i,j=1}^n$.

Для любого $\xi \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) = \mathcal{D}(\mathcal{R}^{-1}(\mathcal{M}\mathcal{A}+\mathcal{B}))$ с учётом лемм 3.1, 3.2 теперь имеем

$$\begin{aligned}
\big(\mathcal{R}^{-1}(\mathcal{M}\mathcal{A}+\mathcal{B})\xi,\xi\big)_{\mathcal{H}_{\mathcal{R}}} &= \big((\mathcal{M}\mathcal{A}+\mathcal{B})\xi,\xi\big)_{\mathcal{H}} \geqslant (\mathcal{M}\mathcal{A}\xi,\xi)_{\mathcal{H}} \\
&= (\mathcal{M}\mathcal{A}\mathcal{M}_\varphi\mathcal{M}_\varphi^*\xi, \mathcal{M}_\varphi\mathcal{M}_\varphi^*\xi)_{\mathcal{H}} \\
&= \big((\mathcal{M}_\varphi^*\mathcal{M}\mathcal{M}_\varphi)\mathcal{A}\mathcal{M}_\varphi^*\xi, \mathcal{M}_\varphi^*\xi\big)_{\mathcal{H}} \\
&= \big(\{\delta_{ij}\lambda_j(\mathbf{M})A\}_{i,j=1}^n\mathcal{M}_\varphi^*\xi, \mathcal{M}_\varphi^*\xi\big)_{\mathcal{H}} \\
&\geqslant \lambda_1(A)\min_{j=1,\ldots,n}\lambda_j(\mathbf{M})(\mathcal{M}_\varphi^*\xi,\mathcal{M}_\varphi^*\xi)_{\mathcal{H}} \\
&= \lambda_1(A)\min_{j=1,\ldots,n}\lambda_j(\mathbf{M})(\xi,\xi)_{\mathcal{H}} \\
&\geqslant \lambda_1(A)\min_{j=1,\ldots,n}\lambda_j(\mathbf{M})\min_{j=1,\ldots,n}\rho_j^{-1}(\mathcal{R}\xi,\xi)_{\mathcal{H}} \\
&= \lambda_1(A)\min_{j=1,\ldots,n}\lambda_j(\mathbf{M})\min_{j=1,\ldots,n}\rho_j^{-1}(\xi,\xi)_{\mathcal{H}_{\mathcal{R}}},
\end{aligned}$$

а значит, оператор $\mathcal{R}^{-1}(\mathcal{M}\mathcal{A}+\mathcal{B})$ положительно определён в $\mathcal{H}_{\mathcal{R}}$. □

Лемма 3.4. *Пусть* $\mathbf{u}_i^0 \in \mathcal{D}(A)$ $(i=1,\ldots,n)$*, а поля* $\mathbf{f}_i$ $(i=1,\ldots,n)$ *удовлетворяют локальному условию Гёльдера. Тогда начально-краевая задача* (2.1) *имеет единственное сильное по времени решение.*

Доказательство. По лемме 3.3 оператор $-\mathcal{R}^{-1}(\mathcal{M}\mathcal{A}+\mathcal{B})$ самосопряжён и отрицательно определён в $\mathcal{H}_{\mathcal{R}}$, а значит, является генератором голоморфной сжимающей полугруппы (см., например, [3, гл. IX, § 6, теорема 1.24]). Теперь чтобы применить теорему Крэнделла — Пази (см. [14] или [1, гл. II, § 1, теорема 1.4]) к задаче Коши (2.2), нужно показать, что $\xi^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, а функция $\mathcal{F}$ удовлетворяет локальному условию Гёльдера.

1) Из условий на начальные данные следует, что $\xi^0 := \big(\mathbf{u}_1^0;\ldots;\mathbf{u}_n^0\big)^\intercal \in \oplus_{l=1}^n\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(\mathcal{A})$.

2) Проверим, что функция $\mathcal{F} := \big(P_0\mathbf{f}_1;\ldots;P_0\mathbf{f}_n\big)^\intercal$ локально гёльдерова со значениями в пространстве $\mathcal{H}_{\mathcal{R}}$. По условию поля $\mathbf{f}_i$ $(i=1,\ldots,n)$ удовлетворяют локальному условию Гёльдера, то есть для любого $T\in[0,+\infty)$ найдутся такие числа $K_i = K_i(T) > 0$, $k_i = k_i(T) \in (0,1]$, что

$$\|\mathbf{f}_i(t)-\mathbf{f}_i(s)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)} \leqslant K_i|t-s|^{k_i} \quad \text{при} \quad 0\leqslant s,t\leqslant T.$$

Далее имеем

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{F}(t)-\mathcal{F}(s)\|_{\mathcal{H}_{\mathcal{R}}} &\leqslant \max_{j=1,\ldots,n}\rho_j^{\frac12}\|\mathcal{F}(t)-\mathcal{F}(s)\|_{\mathcal{H}} = \max_{j=1,\ldots,n}\rho_j^{\frac12}\sqrt{\sum_{i=1}^n\|P_0\mathbf{f}_i(t)-P_0\mathbf{f}_i(s)\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega)}} \\
&\leqslant \max_{j=1,\ldots,n}\rho_j^{\frac12}\|P_0\|\sqrt{\sum_{i=1}^n\|\mathbf{f}_i(t)-\mathbf{f}_i(s)\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega)}} \leqslant \max_{j=1,\ldots,n}\rho_j^{\frac12}\sqrt{\sum_{i=1}^n K_i^2|t-s|^{2k_i}} \\
&= \max_{j=1,\ldots,n}\rho_j^{\frac12}\sqrt{\sum_{i=1}^n K_i^2|t-s|^{2(k_i-\min\limits_{j=1,\ldots,n}k_j)}}\cdot|t-s|^{\min\limits_{j=1,\ldots,n}k_j} \\
&\leqslant \max_{j=1,\ldots,n}\rho_j^{\frac12}\sqrt{\sum_{i=1}^n K_i^2T^{2(k_i-\min\limits_{j=1,\ldots,n}k_j)}}\cdot|t-s|^{\min\limits_{j=1,\ldots,n}k_j} \qquad \forall\, 0\leqslant s,t\leqslant T.
\end{aligned}$$

По теореме Крэнделла — Пази задача Коши (2.2) имеет единственное решение в смысле определения 2.1, а значит, начально–краевая задача (2.1) имеет единственное сильное по времени решение (см. определение 2.1). □

4. Спектральные свойства оператора $\mathcal{R}^{-1}(\mathcal{M}\mathcal{A}+\mathcal{B})$

В этом разделе доказываются утверждения 2), 3), 4) теоремы 2.1.
С целью полноты изложения докажем следующее вспомогательное предложение.

Предложение 4.1. *Пусть оператор T самосопряжён, положительно определён в H и обладает дискретным спектром. Пусть функция распределения его собственных значений $\mathcal{N}(r,T) := \sum\limits_{\lambda_k(T)\leqslant r} 1$ имеет степенное асимптотическое распределение:*

$$\mathcal{N}(r,T) = ar^{\alpha}\big(1+o(1)\big), \quad r\to+\infty. \tag{4.1}$$

Тогда для собственных значений оператора T имеет место асимптотическая формула

$$\lambda_k(T) = a^{-\frac{1}{\alpha}}k^{\frac{1}{\alpha}}\big(1+o(1)\big), \quad k\to\infty. \tag{4.2}$$

Верно и обратное.

Доказательство. 1) Пусть главный член функции распределения собственных значений $\mathcal{N}(r,T)$ оператора T имеет степенное асимптотическое поведение. Покажем, что при операциях с этим главным членом можно считать, что все собственные значения оператора T простые. Действительно, перенумеруем собственные значения оператора T в порядке неубывания следующим образом $\{\lambda_{l,1}(T) = \ldots = \lambda_{l,n_l}(T)\}_{l\in\mathbb{N}}$, где $n_l\in\mathbb{N}$ — кратность собственного значения. Обозначим через $\{u_{l,s}(T)\}_{l\in\mathbb{N},\, s=1,\ldots,n_l}$ систему соответствующих собственных элементов — ортонормированный базис в гильбертовом пространстве H.

Определим оператор

$$Su := \sum_{l\in\mathbb{N}}\sum_{s=1}^{n_l}\frac{(s-1)\min\{1,\lambda_{l+1,1}(T)-\lambda_{l,1}(T)\}}{n_l}\big(u,u_{l,s}(T)\big)_H u_{l,s}(T), \quad u\in H.$$

Оператор S ограничен ($S\in\mathcal{L}(H)$), как следует из оценок

$$\begin{aligned}\|Su\|_H^2 &= \sum_{l\in\mathbb{N}}\sum_{s=1}^{n_l}\frac{(s-1)^2\min^2\{1,\lambda_{l+1,1}(T)-\lambda_{l,1}(T)\}}{n_l^2}\,|\big(u,u_{l,s}(T)\big)_H|^2\\ &\leqslant \sum_{l\in\mathbb{N}}\sum_{s=1}^{n_l}|\big(u,u_{l,s}(T)\big)_H|^2 = \|u\|_H^2 \qquad \forall\, u\in H.\end{aligned}$$

Несложно видеть, что все собственные значения оператора $T+S$ простые. Покажем, что главные члены функций распределения $\mathcal{N}(r,T)$ и $\mathcal{N}(r,T+S)$ совпадают. Действительно, собственные значения операторов T и $T+S$ совпадают с характеристическими числами операторных пучков $l_0(\lambda) := I-\lambda T^{-1}$ и $l(\lambda) := I-\lambda T^{-1}+T^{-1}S$ соответственно. Искомое утверждение теперь следует из включения[1] $T^{-1}S\in\mathfrak{S}_\infty(H)$ и теоремы М.В. Келдыша [4] о сравнении спектров операторных пучков (см. также теорему А.С. Маркуса — В.И. Мацаева [8]).

2) Пусть функция распределения собственных значений оператора T имеет степенное асимптотическое распределение (4.1). В силу доказанного выше можно считать, что все собственные значения оператора T простые. Из (4.1) имеем

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{\mathcal{N}(r,T)}{ar^{\alpha}} = 1.$$

[1]Через $\mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)$ обозначено множество вполне непрерывных (компактных) операторов из $\mathcal{L}(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)$, $\mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}) := \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H},\mathcal{H})$.

Воспользуемся определением предела функции по Гейне, выбрав в качестве последовательности точек $\{r_k = \lambda_k(T)\}_{k\in\mathbb{N}}$. Тогда $\mathcal{N}(\lambda_k(T), T) = k$ и последнее соотношение, учитывая $\lambda_k(T) \to +\infty$ при $k \to \infty$, можно переписать в следующих эквивалентных формах:

$$\lim_{\lambda_k(T)\to+\infty} \frac{k}{a\big(\lambda_k(T)\big)^{\alpha}} = 1 \quad \leftrightarrow \quad \lim_{k\to\infty} \frac{a\big(\lambda_k(T)\big)^{\alpha}}{k} = 1.$$

Из последнего соотношения следует (4.2), а все вычисления можно обратить. □

Лемма 4.1. *Спектр σ оператора $\mathcal{R}^{-1}(\mathcal{M}\mathcal{A}+\mathcal{B})$ расположен на положительной полуоси, дискретен и имеет следующее асимптотическое распределение:*

$$\lambda_k\big(\mathcal{R}^{-1}(\mathcal{M}\mathcal{A}+\mathcal{B})\big) = \left(\frac{|\Omega|}{3\pi^2}\,\mathrm{tr}\,\big(\mathbf{R}^{-\frac12}\mathbf{M}\mathbf{R}^{-\frac12}\big)^{-\frac32}\right)^{-\frac23} k^{\frac23}\big(1+o(1)\big), \quad k\to\infty. \tag{4.3}$$

Доказательство. 1) В силу компактности оператора, обратного к оператору Стокса, имеем $\mathcal{A}^{-1} = \{\delta_{ij}A^{-1}\}_{i,j=1}^{n} \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H})$. С учётом леммы 3.1 найдём, что

$$\big(\mathcal{R}^{-1}(\mathcal{M}\mathcal{A}+\mathcal{B})\big)^{-1} = \mathcal{A}^{-\frac12}(\mathcal{M}+\mathcal{A}^{-\frac12}\mathcal{B}\mathcal{A}^{-\frac12})^{-1}\mathcal{A}^{-\frac12}\mathcal{R} \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}),$$

а значит, спектр оператора $\mathcal{R}^{-1}(\mathcal{M}\mathcal{A}+\mathcal{B})$ дискретен (и расположен на положительной полуоси по лемме 3.3).

2) Осуществим в спектральной задаче

$$\mathcal{R}^{-1}(\mathcal{M}\mathcal{A}+\mathcal{B})\xi = \lambda\xi$$

замену искомого элемента $\mathcal{R}^{\frac12}\xi =: \zeta$, получим спектральную задачу

$$\mathcal{R}^{-\frac12}(\mathcal{M}\mathcal{A}+\mathcal{B})\mathcal{R}^{-\frac12}\zeta = \lambda\zeta.$$

Спектр этой задачи совпадает с характеристическими числами операторного пучка

$$\mathcal{L}(\lambda) := \mathcal{I} - \lambda\mathcal{R}^{\frac12}(\mathcal{M}\mathcal{A})^{-1}\mathcal{R}^{\frac12} + \big(\mathcal{R}^{\frac12}(\mathcal{M}\mathcal{A})^{-1}\mathcal{R}^{\frac12}\big)\mathcal{R}^{-\frac12}\mathcal{B}\mathcal{R}^{-\frac12}.$$

В силу упомянутой теоремы М.В. Келдыша (см. [4], [8]), главный член функции распределения характеристических чисел операторного пучка $\mathcal{L}(\lambda)$ совпадает с главным членом функции распределения характеристических чисел укороченного операторного пучка $\mathcal{L}_0(\lambda) := \mathcal{I} - \lambda\mathcal{R}^{\frac12}(\mathcal{M}\mathcal{A})^{-1}\mathcal{R}^{\frac12}$, если эта функция распределения для $\mathcal{L}_0(\lambda)$ имеет, например, степенной характер. Задача о спектре оператор–функции $\mathcal{L}_0(\lambda)$ эквивалентна спектральной задаче

$$(\mathcal{R}^{-\frac12}\mathcal{M}\mathcal{R}^{-\frac12})\mathcal{A}\zeta = \lambda\zeta.$$

Таким образом, если главный член функции распределения $\mathcal{N}(r, (\mathcal{R}^{-\frac12}\mathcal{M}\mathcal{R}^{-\frac12})\mathcal{A})$ имеет степенной характер, то такой же главный член будет и у функции распределения $\mathcal{N}(r, \mathcal{R}^{-1}(\mathcal{M}\mathcal{A}+\mathcal{B}))$.

3) Положим $\mathbf{P} := \mathbf{R}^{-\frac12}\mathbf{M}\mathbf{R}^{-\frac12}$ и обозначим, как и в лемме 3.3, через $\lambda_j(\mathbf{P})$, $\varphi_j(\mathbf{P})$ $(j=1,\dots,n)$ собственные значения и соответствующие им собственные векторы матрицы $\mathbf{P}$. Координаты собственных векторов можно считать действительными, а сама система $\{\varphi_j(\mathbf{P})\}_{j=1}^n$ есть ортонормированный базис в $\mathbb{C}^n$. Обозначим через $\mathbf{P}_\varphi = \mathbf{P}_\varphi(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ матрицу, столбцами которой являются собственные векторы матрицы $\mathbf{P}$. Тогда имеют место равенства $\mathbf{P}_\varphi^\intercal = \mathbf{P}_\varphi^*$, $\mathbf{P}_\varphi^*\mathbf{P}_\varphi = \mathbf{P}_\varphi\mathbf{P}_\varphi^* = \mathbf{I}_n$, где $\mathbf{I}_n$ — единичная матрица в $\mathbb{C}^n$, $\mathbf{P}_\varphi^*\mathbf{P}\mathbf{P}_\varphi = \{\delta_{ij}\lambda_j(\mathbf{P})\}_{i,j=1}^n$. Положим $\mathbf{P}_\varphi \leftrightarrow \mathcal{P}_\varphi$. Тогда $\mathcal{P}_\varphi^*\mathcal{P}_\varphi = \mathcal{P}_\varphi\mathcal{P}_\varphi^* = \mathcal{I}$, где $\mathcal{I}$ — единичный оператор в $\mathcal{H}$, $\mathcal{P}_\varphi^*(\mathcal{R}^{-\frac12}\mathcal{M}\mathcal{R}^{-\frac12})\mathcal{P}_\varphi = \{\delta_{ij}\lambda_j(\mathbf{P})I\}_{i,j=1}^n$.

Осуществим в задаче

$$(\mathcal{R}^{-\frac12}\mathcal{M}\mathcal{R}^{-\frac12})\mathcal{A}\zeta = \lambda\zeta$$

замену искомого элемента $\mathcal{P}_\varphi^*\zeta =: \eta$, с учётом леммы 3.1 получим следующую расщепляющуюся спектральную задачу:

$$\mathcal{P}_\varphi^*(\mathcal{R}^{-\frac12}\mathcal{M}\mathcal{R}^{-\frac12})\mathcal{P}_\varphi\mathcal{A}\eta \equiv \{\delta_{ij}\lambda_j(\mathbf{P})A\}_{i,j=1}^n\eta = \lambda\eta, \quad \eta \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) = \bigoplus_{l=1}^n \mathcal{D}(A).$$

С учётом предложения 4.1 и (3.3) отсюда следует, что

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(r,(\mathcal{R}^{-\frac12}\mathcal{M}\mathcal{R}^{-\frac12})\mathcal{A}) &= \sum_{j=1}^n \mathcal{N}(r,\lambda_j(\mathbf{P})A) = \sum_{j=1}^n \frac{|\Omega|\lambda_j^{-\frac32}(\mathbf{P})}{3\pi^2}\, r^{\frac32}\big(1+o(1)\big)\\ &= \frac{|\Omega|}{3\pi^2}\sum_{j=1}^n \lambda_j^{-\frac32}(\mathbf{R}^{-\frac12}\mathbf{M}\mathbf{R}^{-\frac12})\, r^{\frac32}\big(1+o(1)\big)\\ &= \frac{|\Omega|}{3\pi^2}\,\mathrm{tr}\,\big(\mathbf{R}^{-\frac12}\mathbf{M}\mathbf{R}^{-\frac12}\big)^{-\frac32} r^{\frac32}\big(1+o(1)\big), \quad r\to+\infty.\end{aligned}$$

Отсюда, из предложения 4.1 и предыдущих рассуждений следует (4.3). □

Лемма 4.2. *Спектр σ представи́м в виде $\sigma = \{\lambda_k^{(p)}\}_{k\in\mathbb{N},\,p=1,\ldots,n}$, где $\lambda_k^{(p)}$ $(p=1,\ldots,n)$ — корни характеристических уравнений*

$$\det\big(\lambda_k(A)\mathbf{M}+\mathbf{B}-\lambda\mathbf{R}\big)=0.$$

Система собственных элементов $\{\xi_k^{(p)}\}_{k\in\mathbb{N},\,p=1,\ldots,n}$ оператора $\mathcal{R}^{-1}(\mathcal{M}\mathcal{A}+\mathcal{B})$ образует ортонормированный базис пространства $\mathcal{H}_\mathcal{R}$ и представима в виде

$$\left\{\xi_k^{(p)} = \begin{pmatrix}\varphi_{k,1}^{(p)}\\ \vdots\\ \varphi_{k,n}^{(p)}\end{pmatrix}\mathbf{u}_k(A) = \begin{pmatrix}\varphi_{k,1}^{(p)}\mathbf{u}_k(A)\\ \vdots\\ \varphi_{k,n}^{(p)}\mathbf{u}_k(A)\end{pmatrix}\right\}_{k\in\mathbb{N},\,p=1,\ldots,n},$$

где $\varphi_k^{(p)} := (\varphi_{k,1}^{(p)};\ldots;\varphi_{k,n}^{(p)})^\intercal$ $(p=1,\ldots,n)$ — нормированные в $\mathbb{C}^n_\mathbf{R}$ к единице собственные элементы матричной спектральной задачи

$$(\lambda_k(A)\mathbf{M}+\mathbf{B})\varphi = \lambda\mathbf{R}\varphi.$$

Доказательство. 1) Будем разыскивать собственные элементы спектральной задачи

$$(\mathcal{M}\mathcal{A}+\mathcal{B})\xi = \lambda\mathcal{R}\xi$$

в виде $\xi := \varphi\mathbf{u}_k(A)$ $(k\in\mathbb{N})$, где $\varphi := (\varphi_1;\ldots;\varphi_n)^\intercal \in \mathbb{C}^n$. Тогда учитывая, что $\mathcal{A}\xi = \lambda_k(A)\xi$, получим соотношение

$$(\mathcal{M}\mathcal{A}+\mathcal{B}-\lambda\mathcal{R})\xi = (\lambda_k(A)\mathcal{M}+\mathcal{B}-\lambda\mathcal{R})\xi = (\lambda_k(A)\mathbf{M}+\mathbf{B}-\lambda\mathbf{R})\varphi\mathbf{u}_k(A) = 0.$$

Отсюда найдём, поскольку $\mathbf{u}_k(A)$ собственный элемент оператора Стокса, а значит, нетривиальный, что вектор φ должен быть собственным вектором матричной спектральной задачи

$$(\lambda_k(A)\mathbf{M}+\mathbf{B}-\lambda\mathbf{R})\varphi = 0.$$

Итак, пусть $\lambda_k^{(p)}$, $\varphi_k^{(p)} := (\varphi_{k,1}^{(p)};\ldots;\varphi_{k,n}^{(p)})^\intercal$ $(p=1,\ldots,n)$ — собственные значения и отвечающие им собственные векторы матричной спектральной задачи

$$(\lambda_k(A)\mathbf{M}+\mathbf{B}-\lambda\mathbf{R})\varphi = 0$$

при каждом $k\in\mathbb{N}$. Можно считать, что система $\{\varphi_k^{(p)}\}_{p=1}^n$ есть ортонормированный базис в $\mathbb{C}^n_\mathbf{R}$ при каждом $k\in\mathbb{N}$. Тогда $\lambda_k^{(p)}$, $\xi_k^{(p)} := \varphi_k^{(p)}\mathbf{u}_k(A)$ $(k\in\mathbb{N},\ p=1,\ldots,n)$ — собственные значения и отвечающие им собственные элементы оператора $\mathcal{R}^{-1}(\mathcal{M}\mathcal{A}+\mathcal{B})$. При этом система $\{\xi_k^{(p)}\}_{k\in\mathbb{N},\,p=1,\ldots,n}$ является ортонормированной в $\mathcal{H}_\mathcal{R}$.

2) Покажем, что система $\{\xi_k^{(p)}\}_{k\in\mathbb{N},\, p=1,\dots,n}$ полна в $\mathcal{H}_{\mathcal{R}}$. Отсюда будет следовать, поскольку система собственных элементов оператора $\mathcal{R}^{-1}(\mathcal{M}\mathcal{A}+\mathcal{B})$ является ортонормированной, что собственных элементов, отличных от найденных, у оператора $\mathcal{R}^{-1}(\mathcal{M}\mathcal{A}+\mathcal{B})$ нет. При этом корни характеристических уравнений

$$\det\big(\lambda_k(A)\mathbf{M}+\mathbf{B}-\lambda\mathbf{R}\big)=0$$

исчерпают все собственные значения оператора $\mathcal{R}^{-1}(\mathcal{M}\mathcal{A}+\mathcal{B})$.

Допустим, что система $\{\xi_k^{(p)}\}_{k\in\mathbb{N},\, p=1,\dots,n}$ не является полной в $\mathcal{H}_{\mathcal{R}}$. Тогда существует элемент $\zeta=(\mathbf{v}_1;\dots;\mathbf{v}_n)^\intercal\in\mathcal{H}$, $\zeta\neq 0$, ортогональный всем элементам этой системы, то есть

$$(\xi_k^{(p)},\zeta)_{\mathcal{H}_{\mathcal{R}}}=\left(\mathcal{R}\begin{pmatrix}\varphi_{k,1}^{(p)}\mathbf{u}_k(A)\\ \vdots\\ \varphi_{k,n}^{(p)}\mathbf{u}_k(A)\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\mathbf{v}_1\\ \vdots\\ \mathbf{v}_n\end{pmatrix}\right)_{\mathcal{H}}=\left(\begin{pmatrix}\rho_1\varphi_{k,1}^{(p)}\mathbf{u}_k(A)\\ \vdots\\ \rho_n\varphi_{k,n}^{(p)}\mathbf{u}_k(A)\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\mathbf{v}_1\\ \vdots\\ \mathbf{v}_n\end{pmatrix}\right)_{\mathcal{H}}$$
$$=\sum_{j=1}^{n}\rho_j\varphi_{k,j}^{(p)}(\mathbf{u}_k(A),\mathbf{v}_j)_{\mathbf{L}_2(\Omega)}=0\qquad\forall\,k\in\mathbb{N},\quad p=1,\dots,n.$$

Итак, при фиксированном $k\in\mathbb{N}$ имеем n соотношений

$$\sum_{j=1}^{n}\rho_j\varphi_{k,j}^{(p)}(\mathbf{u}_k(A),\mathbf{v}_j)_{\mathbf{L}_2(\Omega)}=0,\qquad p=1,\dots,n.$$

Эти соотношения и тот факт, что $\{\varphi_k^{(p)}=(\varphi_{k,1}^{(p)};\dots;\varphi_{k,n}^{(p)})^\intercal\}_{p=1}^n$ есть линейно независимая система, поскольку является ортонормированным базисом в $\mathbb{C}^n_{\mathbf{R}}$, можно переписать в следующей форме:

$$\begin{pmatrix}\varphi_{k,1}^{(1)}&\dots&\varphi_{k,n}^{(1)}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ \varphi_{k,1}^{(n)}&\dots&\varphi_{k,n}^{(n)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\rho_1(\mathbf{u}_k(A),\mathbf{v}_1)_{\mathbf{L}_2(\Omega)}\\ \vdots\\ \rho_n(\mathbf{u}_k(A),\mathbf{v}_n)_{\mathbf{L}_2(\Omega)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix},\qquad\det\begin{pmatrix}\varphi_{k,1}^{(1)}&\dots&\varphi_{k,n}^{(1)}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ \varphi_{k,1}^{(n)}&\dots&\varphi_{k,n}^{(n)}\end{pmatrix}\neq 0.$$

Отсюда следует, что $(\mathbf{u}_k(A),\mathbf{v}_j)_{\mathbf{L}_2(\Omega)}=0$ при всех $k\in\mathbb{N}$, $j=1,\dots,n$. Следовательно, $\mathbf{v}_j=0$, $j=1,\dots,n$, поскольку $\{\mathbf{u}_k(A)\}_{k\in\mathbb{N}}$ есть ортонормированный базис в $\mathbf{J}_0(\Omega)$ — система собственных элементов оператора Стокса. Таким образом, $\zeta=0$. Полученное противоречие завершает доказательство леммы. □

Лемма 4.3. *Решение задачи Коши* (2.2) *выражается формулой*

$$\xi(t)=\mathcal{U}(t)\xi^0+\int_0^t\mathcal{U}(t-s)\mathcal{F}(s)\,ds,\tag{4.4}$$

$$\mathcal{U}(t)\xi:=\mathcal{U}(t)\begin{pmatrix}\mathbf{u}_1\\ \vdots\\ \mathbf{u}_n\end{pmatrix}=\sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{p=1}^{n}e^{-\lambda_k^{(p)}t}\sum_{l=1}^{n}\rho_l\varphi_{k,l}^{(p)}\big(\mathbf{u}_l,\mathbf{u}_k(A)\big)_{\mathbf{L}_2(\Omega)}\begin{pmatrix}\varphi_{k,1}^{(p)}\mathbf{u}_k(A)\\ \vdots\\ \varphi_{k,n}^{(p)}\mathbf{u}_k(A)\end{pmatrix}.\tag{4.5}$$

Доказательство. Если $\mathcal{U}(t)$ голоморфная полугруппа с генератором $-\mathcal{R}^{-1}(\mathcal{M}\mathcal{A}+\mathcal{B})$, то формула (4.4) выражает решение задачи Коши (2.2) по теореме Крэнделла — Пази.

Формула (4.5) следует из представления полугруппы $\mathcal{U}(t)$ через спектральное семейство, порождённое генератором $-\mathcal{R}^{-1}(\mathcal{M}\mathcal{A}+\mathcal{B})$. С учётом леммы 4.2 имеем

$$\begin{aligned}\mathcal{U}(t)\xi &= \sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{p=1}^{n} e^{-\lambda_k^{(p)}t}(\xi,\xi_k^{(p)})_{\mathcal{H}_\mathcal{R}}\xi_k^{(p)} \\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{p=1}^{n} e^{-\lambda_k^{(p)}t}\left(\begin{pmatrix}\rho_1\mathbf{u}_1\\ \vdots\\ \rho_n\mathbf{u}_n\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\varphi_{k,1}^{(p)}\mathbf{u}_k(A)\\ \vdots\\ \varphi_{k,n}^{(p)}\mathbf{u}_k(A)\end{pmatrix}\right)_{\mathcal{H}} \begin{pmatrix}\varphi_{k,1}^{(p)}\mathbf{u}_k(A)\\ \vdots\\ \varphi_{k,n}^{(p)}\mathbf{u}_k(A)\end{pmatrix} \\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{p=1}^{n} e^{-\lambda_k^{(p)}t}\sum_{l=1}^{n}\rho_l\varphi_{k,l}^{(p)}\big(\mathbf{u}_l,\mathbf{u}_k(A)\big)_{\mathbf{L}_2(\Omega)}\begin{pmatrix}\varphi_{k,1}^{(p)}\mathbf{u}_k(A)\\ \vdots\\ \varphi_{k,n}^{(p)}\mathbf{u}_k(A)\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Лемма доказана. □

5. Заключение

Для начально–краевой задачи о малых движениях многокомпонентной вязкой несжимаемой жидкости проведено исследование однозначной разрешимости, а также спектральных свойств. В исследуемых уравнениях, являющихся некоторыми обобщениями известной системы уравнений Навье — Стокса, присутствуют старшие производные (производные второго порядка) от полей скоростей всех компонент, поскольку, в отличие от уравнений Навье — Стокса, в которых коэффициент вязкости является скаляром, в многокомпонентном случае, ввиду составной структуры тензоров вязких напряжений, коэффициенты вязкостей образуют матрицу вязкостей, элементы которой отвечают за вязкое трение. За вязкое трение внутри каждой компоненты отвечают диагональные элементы, а за трение между компонентами — недиагональные. Это не позволяет автоматически распространить известные результаты для уравнений Навье — Стокса на многокомпонентный случай. В случае диагональной матрицы вязкостей уравнения будут связаны возможно лишь только через младшие члены. В работе рассматривается более сложный случай недиагональной матрицы вязкостей. Доказывается существование и единственность сильного по времени решения начально–краевой задачи без каких-либо упрощающих предположений о структуре матрицы вязкостей, кроме стандартных физических требований симметричности и положительной определенности. Доказывается дискретность спектра в задаче о нормальных колебаниях исследуемой системы, асимптотическая формула для собственных значений. Спектр и система собственных элементов задачи о нормальных колебаниях выражаются в терминах оператора Стокса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дж. Голдстейн. *Полугруппы линейных операторов и их приложения.* Киев: "Выща школа". 1989.
2. Д.А. Закора. *Задача о малых движениях смеси вязких сжимаемых жидкостей* // Сиб. электрон. матем. изв. **20**:2, 1552–1589 (2023).
3. Т. Като. *Теория возмущений линейных операторов.* М.: Мир. 1972.
4. М.В. Келдыш. *О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений* // Докл. Акад. наук СССР **77**:1, 11–14 (1951).
5. Н.Д. Копачевский, С.Г. Крейн, Нго Зуй Кан. *Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи.* М.: Наука. 1989.

6. А.Е. Мамонтов, Д.А. Прокудин. *Разрешимость нестационарных уравнений многокомпонентных вязких сжимаемых жидкостей* // Изв. росс. акад. наук Сер. мат. **82**:1, 151–197 (2018).
7. А.Е. Мамонтов, Д.А. Прокудин. *Разрешимость начально–краевой задачи для уравнений политропного движения смесей вязких сжимаемых жидкостей* // Сиб. электрон. матем. изв. **13**, 541–583 (2016).
8. А.С. Маркус, В.И. Мацаев. *Теорема о сравнении спектров и спектральная асимптотика для пучка М.В. Келдыша* // Мат. сб. **123(65)**:3, 391–406 (1984).
9. Р.И. Нигматулин. *Динамика многофазных сред, Часть I.* М.: Наука. 1987.
10. J. Frehse, S. Goj, J. Málek. *On a Stokes–like system for mixtures of fluids* // SIAM J. Math. Anal. **36**:4, 1259–1281 (2005).
11. J. Frehse, S. Goj, J. Málek. *A uniqueness result for a model for mixtures in the absence of external forces and interaction momentum* // Appl. Math., Praha **50**:6, 527–541 (2005).
12. J. Frehse, W. Weigant. *On quasi–stationary models of mixtures of compressible fluids* // Appl. Math., Praha **53**:4, 319–345 (2008).
13. I. Gohberg, S. Goldberg. *Basic Operator Theory.* Birkhäuser, Boston (1981).
14. M.G. Crandall, A. Pazy. *On the differentiability of weak solutions of a differential equation in Banach space* // J. Math. Mech. **18**:10, 1007–1016 (1969).
15. A.E. Mamontov, D.A. Prokudin. *Viscous compressible multi–fluids: modeling and multi–D existence* // Methods Appl. Anal. **20**:2, 179–196 (2013).
16. G. Metivier. *Valeurs propres d'opérateurs définis par le restriction de systèmes variationalles à des sous–espaces* // J. Math. Pures Appl., IX. Sér. **57**:2, 133–156 (1978).
17. K.L. Rajagopal, L. Tao. *Mechanics of Mixtures.* World Scientific, Singapore (1995).
18. D.A. Zakora. *Spectral properties of the operator in the problem of oscillations in a mixture of viscous compressible fluids* // Differ. Equ. **59**:4, 473–490 (2023).

Грибкова Ольга Алексеевна,
Крымский федеральный университет им. В.И. Вернадского,
просп. Академика Вернадского, 4,
295007, г. Симферополь, Россия
E-mail: olya_gribkova133132@mail.ru

Закора Дмитрий Александрович,
Крымский федеральный университет им. В.И. Вернадского,
просп. Академика Вернадского, 4,
295007, г. Симферополь, Россия
E-mail: dmitry.zkr@gmail.com

Мамонтов Александр Евгеньевич,
Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН,
просп. Академика Лаврентьева, 15,
630090, г. Новосибирск, Россия
E-mail: aem@hydro.nsc.ru

Прокудин Дмитрий Алексеевич,
Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН,
просп. Академика Лаврентьева, 15,
630090, г. Новосибирск, Россия
E-mail: prokudin@hydro.nsc.ru