УДК 517.96

НАХОЖДЕНИЕ ФОРМАЛЬНЫХ СТЕПЕННО–ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЙ РЕШЕНИЙ q–РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Н.В. ГАЯНОВ, А.В. ПАРУСНИКОВА

Аннотация. Рассматривается алгебраическое q–разностное уравнение. Предлагается достаточное условие существования формального степенно–логарифмического разложения решения такого уравнения в окрестности нуля. Приводится пример применения этого достаточного условия для построения формального разложения решения некоторого q–разностного аналога пятого уравнения Пенлеве при конкретных значениях параметров уравнения; рассматриваются два различных значения числа q, приводящие к качественно разным формальным асимптотическим разложениям решений.

Ключевые слова: асимптотические разложения, q–разностное уравнение, многоугольник Ньютона, степенно–логарифмическое разложение.

Mathematics Subject Classification: 39B32, 34E05

1. Введение

В настоящее время активно развивается теория q–разностных уравнений и систем [8], [3]. Хорошо освоены методы нахождения решений в виде формальных степенных разложений [6], имеются доказательства их сходимости [7], однако даже для линейных q–разностных уравнений могут встречаться решения, содержащие логарифмические слагаемые [5]. В предыдущей статье авторов [4] было получено достаточное условие существования решения в виде степенно–логарифмического разложения по целым неотрицательным степеням независимой переменной (в виде ряда Дюлака). Развивая эти результаты, в данной работе мы переносим методы и результаты степенной геометрии [2], [1] на случай q–разностных уравнений, формулируем достаточные условия существования формальных решений алгебраического q–разностного уравнения в виде степенно–логарифмических рядов более общего вида, чем в предыдущей работе, и представляем метод их получения. Также приведён пример применения полученной теоремы для построения формального разложения решения некоторого q–разностного аналога пятого уравнения Пенлеве при конкретных значениях параметров уравнения. Рассматриваются два различных значения числа q, приводящие к качественно разным формальным асимптотическим разложениям решения аналога пятого уравнения Пенлеве.

N.V. Gaianov, A.V. Parusnikova, Identification of formal power–logarithmic expansions for solutions to q–difference equations.

Статья подготовлена в ходе работы в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ (HSE-BR-2025-079).

Поступила 5 марта 2025 г.

2. Основные определения

В этой работе рассматривается случай $x \to 0$.

Предположим, что y — однозначная комплекснозначная функция комплексной переменной x, число $q \neq 0$. Определим *оператор q–дифференцирования* σ формулой:

$$(\sigma y)(x) = y(qx),$$

при этом функция σy называется *q–разностной производной функции y*.

Далее также предполагаем, что $q^k \neq 1\ \forall k \in \mathbb{N}$.

Алгебраическим q–разностным уравнением n-го порядка называется уравнение:

$$f(x, y, \sigma y, \dots, \sigma^n y) = 0, \tag{2.1}$$

где f — многочлен $n+2$ переменных.

Перенесем имеющиеся для дифференциальных уравнений определения степенной геометрии из работы [2] для построения аналогичной теории для q–разностных уравнений.

Обозначим $X = (x, y)$. *q–разностным мономом* $b(x, y)$ называется произведение монома $cx^{r_1}y^{r_2}$, где $c = \mathrm{const}$, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, и конечного числа q–разностных производных $\sigma^l y$, $l \in \mathbb{N}$. *q–разностной суммой* называется сумма q–разностных мономов:

$$f(X) = \sum a_i(X). \tag{2.2}$$

Каждому q–разностному моному $b(X)$ ставится в соответствие векторный показатель $Q(b)$ следующим образом:

$$Q(cx^{r_1}y^{r_2}) = (r_1, r_2); \qquad Q(\sigma^l y) = (0, 1); \qquad Q(b_1(X)b_2(X)) = Q(b_1(X)) + Q(b_2(X)).$$

Обозначим как $S(f)$ множество векторных показателей q–разностной суммы $f(X)$, а через $f_Q(X)$ — сумму всех мономов b_i, для которых $Q(b_i) = Q$. Тогда

$$f(X) = \sum_{Q \in S(f)} f_Q(X).$$

Множество $S(f)$ называется *носителем* суммы $f(X)$ и уравнения (2.1).

Заметим, что носитель алгебраического q–разностного уравнения (2.1) лежит в $\mathbb{Z}^2_+$.

Многоугольником Ньютона уравнения (2.1) (а также q–разностной суммы (2.2)) называется выпуклая оболочка множества $S(f)$, которая обозначается $\Gamma(f)$. Граница $\partial\Gamma(f)$ многоугольника $\Gamma(f)$ состоит из вершин $\Gamma_j^{(0)}$ и рёбер $\Gamma_j^{(1)}$ — (обобщённых) граней $\Gamma_j^{(d)}$, где верхний индекс d указывает размерность грани. Каждой обобщённой грани соответствует граничное подмножество

$$S_j^{(d)} = S(f) \cap \Gamma_j^{(d)},$$

укороченная сумма, определяемая как

$$\hat{f}_j^{(d)}(X) = \sum_{Q \in S_j^{(d)}} f_Q(X)$$

и *укороченное уравнение*

$$f_j^{(d)}(X) = 0. \tag{2.3}$$

3. Связь решений исходного и укороченного уравнений

Если для уравнения (2.1) существует решение вида

$$y = cx^r + O(x^{r+\varepsilon}), \quad r \in \mathbb{R}, \quad x \to 0, \quad \varepsilon > 0, \quad c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \tag{3.1}$$

то его *укороченным решением* называется

$$y = cx^r, \tag{3.2}$$

а *нормальным конусом решения* (3.1) называется луч $\lambda(-1,-r)$, где $\lambda > 0$.

Нормальным конусом грани $\Gamma_j^{(d)}$ называется множество

$$U_j^{(d)} = \left\{ P : \langle P, Q\rangle = \langle P, Q'\rangle,\ Q, Q' \in S_j^{(d)},\ \langle P, Q\rangle > \langle P, Q''\rangle,\ Q'' \in S(f) \setminus S_j^{(d)} \right\},$$

где $\langle P, Q\rangle := p_1q_1 + p_2q_2$ — скалярное произведение векторов $P = (p_1, p_2)$, $Q = (q_1, q_2)$.

Теорема 3.1. *Если уравнение* (2.1) *имеет решение* (3.1) *и нормальный конус* U *решения* (3.1) *таков, что* $U \subset U_j^{(d)}$, *то укороченное решение* (3.2) *является решением соответствующего укороченного уравнения* (2.3).

Доказательство. Подставим решение (3.1) в уравнение (2.1):

$$f(X) = \sum_{Q\in S(f)} f_Q(x, cx^r + O(x^{r+\varepsilon})) = \sum_{Q\in S_j^{(d)}} f_Q(x, cx^r) + O(x^{r'}) + O(x^{r''}) = 0,$$

где

$$r' = \min_{Q\in S_j^{(d)}} \langle Q, (1, r+\varepsilon)\rangle, \qquad r'' = \min_{Q\in S(f)\setminus S_j^{(d)}} \langle Q, (1, r)\rangle.$$

Но поскольку $U \subset U_j^{(d)}$, находим $r'' > \langle Q, (1, r)\rangle$ для всех $Q \in S_j^{(d)}$. Получаем, что

$$f(X) = \sum_{Q\in S_j^{(d)}} f_Q(x, cx^r)(1 + o(1)), \quad x \to 0,$$

и для выполнения равенства требуется

$$\sum_{Q\in S_j^{(d)}} f_Q(x, cx^r) = 0,$$

что и представляет собой укороченное уравнение (2.3). □

4. Решение укороченных уравнений

Рассмотрим укороченное уравнение $\hat{f}^{(0)} = 0$, соответствующее вершине $\Gamma^{(0)} = (q_1, q_2)$ многоугольника Ньютона. При подстановке в него $y = cx^r$ и сокращении степеней x и c получаем уравнение

$$c^{-q_2} x^{-q_1 - q_2 r} \hat{f}^{(0)}(x, cx^r) = \chi(r) = 0,$$

которое зависит только от r и, вообще говоря, от q. Многочлен $\chi(r)$ называется *характеристическим многочленом q–разностной суммы* $\hat{f}^{(0)}(X)$. Из его корней необходимо отобрать те, для которых вектор $(-1, -r)$ лежит в нормальном конусе $U^{(0)}$.

Рассмотрим укороченное уравнение, соответствующее ребру $\Gamma^{(1)}$, лежащему на прямой $q_1 + rq_2 + c = 0$. Для того чтобы решение $y = cx^r$ было решением укороченного уравнения $\hat{f}^{(1)}(x, y) = 0$, необходимо, чтобы $(-1, -r) \in U^{(1)}$, что однозначно определяет значение r. Значение c_r находится из *определяющего уравнения*:

$$x^c \hat{f}_j^{(1)}(x, c_r x^r) = 0.$$

Итак, каждое укороченное уравнение имеет одно или несколько подходящих решений с $U \subset U^{(d)}$.

5. Критические числа укороченного решения

Если найдено укороченное решение (3.2), то замена $y = cx^r + z$ приводит уравнение (2.1) к виду

$$\tilde{f}(x, z) = f(x, cx^r + z) = 0. \tag{5.1}$$

Во многих случаях уравнение (5.1), возможно, после сокращения на некоторую степень x, имеет вид:

$$\tilde{f}(x, z) := \mathcal{L}(\sigma)z + h(x, z) = 0, \tag{5.2}$$

где $\mathcal{L}(\sigma)$ — линейный q–разностный оператор с постоянными коэффициентами, т. е.

$$\mathcal{L}(\sigma) = a_m\sigma^m + \ldots + a_1\sigma + a_0, \tag{5.3}$$

точка $Q(\mathcal{L}(\sigma)z) = (0, 1)$ присутствует в носителе уравнения (5.2) и является вершиной многоугольника $\Gamma(\tilde{f})$, а носитель $S(h)$ не содержит точки $(0, 1)$.

Определим *характеристический многочлен* q–разностной суммы $\mathcal{L}(\sigma)z$ по формуле

$$\nu(k) = x^{-k}\mathcal{L}(\sigma)[x^k].$$

Если $\nu(k) \not\equiv 0$, то корни $k_1, \ldots, k_s$ многочлена $\nu(k)$ называются *собственными числами* укороченного решения (3.2). Вещественные собственные числа $k \in \{k_1, \ldots, k_s\}$, для которых $k > r$, называются *критическими числами*.

Введём дополнительные обозначения. Сдвинем носитель $S(\tilde{f})$ на $(0, -1)$ и будем обозначать новое множество $S'(\tilde{f}) = S(\tilde{f}) - (0, 1)$. Пусть задано такое число r, что для каждой точки $Q' \in S'(\tilde{f})$ скалярное произведение $\langle R, Q'\rangle \geqslant 0$, где $R = (1, r)$. Обозначим через $S'_+(\tilde{f})$ множество конечных сумм точек $Q' \in S'(\tilde{f})$ и векторов $(k_1, -1), \ldots, (k_s, -1)$, где $k_1, \ldots, k_s$ – критические числа укороченного решения $y = cx^r$. Пусть $K(k_1, \ldots, k_s)$ – множество таких $q_1 \in \mathbb{R}$, что $(q_1, -1) \in S'_+(\tilde{f})$.

6. Степенно–логарифмические разложения решений

Как показано в статье [4], не для каждого алгебраического q–разностного уравнения все решения являются степенными, т.е. элементами пространства

$$\mathbb{C}[[x]] = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, c_k = \mathrm{const} \in \mathbb{C} \right\}.$$

В работе [4] мы ограничивались формальными решениями в виде рядов

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k(\log_q x)x^k,$$

где p_k — многочлены с комплексными коэффициентами.

В данной работе рассматриваем формальные ряды несколько более общего вида (6.1) — *степенно–логарифмические асимптотические разложения решений.*

Далее приведено доказательство аналогичного имеющемуся в [2] для дифференциального уравнения достаточного условия существования формального степенно–логарифмического асимптотического разложения решения q–разностного алгебраического уравнения.

Теорема 6.1. *Рассмотрим уравнение* (2.1) *и его укороченное решение* (3.2). *Пусть, сделав замену $y = cx^r + z$ и преобразовав, получили уравнение* (5.2) *и пусть для носителя уравнения* (5.2) *выполнены следующие условия:*

(1) *точка $(0, 1)$ является вершиной $\Gamma(\tilde{f})$;*

(2) *в уравнении* $\tilde{f}(x,z)=0$ *вершине* $(0,1)$ *соответствует слагаемое* $\mathcal{L}(\sigma)z$ *и только оно, где* $\mathcal{L}(\sigma)$ *— линейный* q*–разностный оператор, определяемый формулой* (5.3) *(*$\mathcal{L}(\sigma)$ *— многочлен от* σ*, его коэффициенты являются постоянными).*

Тогда уравнение (5.2) *имеет формальное решение вида*

$$z=\sum_k \beta_k(\log_q x)x^k, \quad k\in K(k_1,\dots,k_s), \quad k>r, \tag{6.1}$$

где β_k *— многочлены от переменной* $\log_q x$*, а* $k_1,\dots,k_s$ *— критические числа укороченного решения* (3.2)*.*

Доказательство. Представим уравнение (5.2) в виде

$$\mathcal{L}(\sigma)z=-h(x,z).$$

Подставим формальное решение (6.1) в уравнение (5.2). После подстановки в левой части содержатся слагаемые со степенями x^k, где $k\in K(k_1,\dots,k_s)$, $k>r$. В правой части будут слагаемые со степенями вида $x^{\langle Q,(1,k)\rangle}$, где $Q=(q_1,q_2)\in S(\tilde{f})$.

Но число $\langle Q,(1,k)\rangle\in K(k_1,\dots,k_s)$, поскольку $\langle Q,(1,k)\rangle=q_1+kq_2$. В множестве $K(k_1,\dots,k_s)$ содержится абсцисса вершины $Q'+q_2(k,-1)=(q_1,q_2-1)+q_2(k,-1)=(q_1+kq_2,-1)$ (тут мы пользуемся тем, что $q_2\in\mathbb{Z}_+$, т.е. точку $(k,-1)$ складываем с собой конечное число раз).

Следовательно, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x^k, получаем семейство разностных уравнений на β_k, при этом здесь и далее $t=\log_q x$:

$$\mathcal{L}(q^kT)\beta_k(t)+\theta_k(t)=0, \tag{6.2}$$

где θ_k — многочлен от функций β_ℓ, где $\ell\in K(k_1,\dots,k_s)$, а также $\ell<k$; оператор сдвига T определяется по формуле $(Tf)(t)=f(t+1)$. □

Замечание 6.1. *В теореме 6.1 получены уравнения* (6.2)*, аналогичные имеющимся в* [4] *уравнениям, но теперь индексы* k *не только целые неотрицательные.*

Говорят, что для критического числа k *выполнено условие совместности*, если в уравнении (6.2) функция $\theta_k(t)\equiv 0$.

Замечание 6.2. *В условиях теоремы 6.1, пусть для всех критических чисел* k *выполнено условие совместности, а также все критические числа* k *являются некратными. Тогда формальное решение* (6.1) *уравнения* (5.1) *не содержит логарифмов.*

Доказательство. Функции β_k получаются как решения разностных уравнений (6.2).

Если k является некратным критическим, и для него выполнено условие совместности, то уравнение на β_k имеет вид

$$\mathcal{L}(q^kT)\beta_k(t)=0,$$

тогда решение $\beta_k(t)=C_k$, $C_k\in\mathbb{C}$, — произвольная константа.

Пусть k не является критическим. Функция $\theta_k(t)=A_k$ в уравнении (6.2) — постоянна, уравнение на β_k имеет вид

$$\mathcal{L}(q^kT)\beta_k(t)=-A_k=\mathrm{const},$$

тогда его решение $\beta_k(t)=-A_k/\mathcal{L}(q^k)$ — однозначно определенная постоянная. □

7. Степени логарифмов в разложении

Посмотрим, как растут степени логарифмов в разложении (6.1).

Обозначим через $\mu(j)$ кратность q^j как корня $\mathcal{L}(s)$.

Теорема 7.1. *Пусть выполнены условия теоремы 6.1. Тогда для степеней многочленов β_k в решении (6.1) выполняются оценки*

$$\deg \beta_k \leqslant C(k-r) \sum_{r<j\leqslant k} \mu(j) \tag{7.1}$$

при $C = 1 + \max\limits_{\ell \in K(k_1,\dots,k_s)\cap\{\ell>r\}} \frac{1}{\ell - r}$.

Доказательство. Отдельно отметим, что здесь считаем степень нулевого многочлена равной нулю.

Докажем по индукции. Рассмотрим $k^{(0)} = \min\left(K(k_1,\dots,k_s) \cap \{k>r\}\right)$ — минимальную степень в разложении (6.1). Тогда $\deg \beta_{k^{(0)}} \leqslant \mu(k^{(0)})$, и, поскольку $C > \frac{1}{k^{(0)}-r}$, неравенство (7.1) выполнено.

Предположим, что неравенство (7.1) верно для всех β_j при $j<k$. Для β_k имеем уравнение (6.2), в котором θ_k — линейная комбинация мономов вида

$$\beta_{i_{0,0}}^{\alpha_{0,0}}(t)\dots\beta_{i_{0,N_0}}^{\alpha_{0,N_0}}(t)\,\beta_{i_{1,0}}^{\alpha_{1,0}}(t+1)\dots\beta_{i_{1,N_1}}^{\alpha_{1,N_1}}(t+1)\dots\beta_{i_{n,0}}^{\alpha_{n,0}}(t+n)\dots\beta_{i_{n,N_n}}^{\alpha_{n,N_n}}(t+n), \tag{7.2}$$

где $\alpha_{0,0}i_{0,0} + \ldots + \alpha_{n,N_n}i_{n,N_n} \leqslant k$. Из последнего неравенства также следует, что

$$\alpha_{0,0}(i_{0,0}-r) + \ldots + \alpha_{n,N_n}(i_{n,N_n}-r) \leqslant k-r.$$

Степень каждого монома (7.2) по предположению индукции не превышает

$$\begin{aligned}
&\alpha_{0,0}\deg\beta_{i_{0,0}} + \ldots + \alpha_{n,N_n}\deg\beta_{i_{n,N_n}}\\
&\qquad\leqslant C\left(\alpha_{0,0}(i_{0,0}-r)\sum_{r<j\leqslant i_{0,0}}\mu(j) + \ldots + \alpha_{n,N_n}(i_{n,N_n}-r)\sum_{r<j\leqslant i_{n,Nn}}\mu(j)\right)\\
&\qquad\leqslant C(k-r)\sum_{r<j<k}\mu(j).
\end{aligned}$$

Тогда

$$\deg\beta_k \leqslant \deg\theta_k + \mu(k) \leqslant C(k-r)\sum_{r<j<k}\mu(j) + \mu(k) \leqslant C(k-r)\sum_{r<j\leqslant k}\mu(j).$$

Последнее неравенство верно в силу того, что $C(k-r)>1$. □

8. Пример степенно–логарифмического разложения

Рассмотрим пятое уравнение Пенлеве:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{1}{2y} + \frac{1}{y-1}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{1}{x}\frac{dy}{dt} + \frac{(y-1)^2}{x^2}\left(a_1 y + \frac{a_2}{y}\right) + a_3\frac{y}{x} + a_4\frac{y(y+1)}{y-1},$$

где a_1, a_2, a_3, a_4 — комплексные параметры. Положив $a_1 = a_2 = 0$, a_3, $a_4 \neq 0$ и перейдя к оператору $\delta = x\frac{d}{dx}$, получим уравнение

$$\frac{\delta^2 y - \delta y}{x^2} = \left(\frac{1}{2y} + \frac{1}{y-1}\right)\frac{(\delta y)^2}{x^2} - \frac{1}{x^2}\delta y + a_3\frac{y}{x} + a_4\frac{y(y+1)}{y-1}.$$

Формально заменим в этом уравнении оператор δ на σ и получим некоторое q–разностное уравнение

$$\frac{\sigma^2 y - \sigma y}{x^2} = \left(\frac{1}{2y} + \frac{1}{y-1}\right)\frac{(\sigma y)^2}{x^2} - \frac{1}{x^2}\sigma y + a_3\frac{y}{x} + a_4\frac{y(y+1)}{y-1}.$$

Упростим его, домножив на $x^2 y(y-1)$, получим уравнение

$$-a_3xy^3 + a_3xy^2 - a_4x^2y^3 - a_4x^2y^2 + y^2\sigma^2 y - \frac{3(\sigma y)^2 y}{2} - y\sigma^2 y + \frac{(\sigma y)^2}{2} = 0. \tag{8.1}$$

Многоугольник Ньютона Г уравнения (8.1) изображен на Рис. 1.

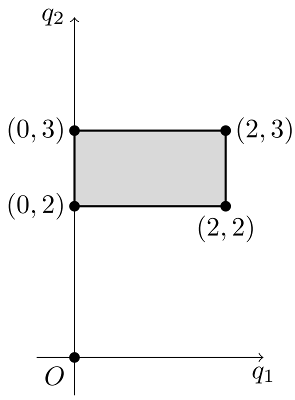

Рис. 1. Многоугольник Ньютона уравнения (8.1).

Нас интересует левое вертикальное ребро многоугольника Г. Ему соответствует определяющее уравнение

$$\frac{c^2}{2} - \frac{3c^3}{2} - c^2 + c^3 = 0,$$

единственное ненулевое решение которого есть $c = -1$. Произведем замену $y = z - 1$ в уравнении (8.1) и перейдем к уравнению

$$\begin{aligned} -a_3xz^3 + 4a_3xz^2 - 5a_3xz + 2a_3x - a_4x^2z^3 + 2a_4x^2z^2 - a_4x^2z + z^2\sigma^2 z - z^2 \\ - \frac{3}{2}(\sigma z)^2 z + 3z\sigma z - 3z\sigma^2 z + \frac{3z}{2} + 2(\sigma z)^2 - 4\sigma z + 2\sigma^2 z = 0, \end{aligned} \tag{8.2}$$

многоугольник Ньютона которого изображен на Рис. 2.

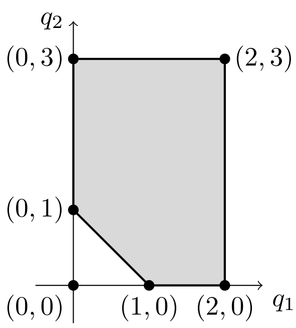

Рис. 2. Многоугольник Ньютона уравнения (8.2).

Линейная часть уравнения (8.2) имеет вид $\mathcal{L}(\sigma)z = 2\sigma^2 z - 4\sigma z + \dfrac{3z}{2}$, откуда характеристическое уравнение

$$\nu(k) = 2q^{2k} - 4q^k + \frac{3}{2} = 0,$$

корни k которого определяются из уравнения $q^k = \frac{1}{2}$ или $q^k = \frac{3}{2}$.

Продолжим укороченное решение $y = -1$ до формального разложения решения уравнения (8.1).

Рассмотрим несколько значений параметра q.

Случай 1. Пусть сначала $q = \frac{1}{2}$, тогда собственные числа $k_1 = 1, k_2 = 1 - \log_2 3$. Только k_1 является критическим числом ($k_2 < 0$).

Поскольку координаты всех точек носителя уравнения (8.2) целые неотрицательные, критическое число натуральное, а в носителе нет точки $(0,0)$, тогда и множество $K(k_1) \subset \mathbb{N}$. С другой стороны, в множестве $S'_+(\tilde{f})$ есть точки $(0,1)$ и $(1,-1)$, их конечные суммы покрывают все числа вида $(n,-1), n \in \mathbb{N}$, значит, $K(k_1) = \mathbb{N}$. Итак, уравнение (8.2) имеет степенно–логарифмическое решение с носителем, лежащим в $\mathbb{N}$.

Перейдём к нахождению решения. Второе слагаемое в разложении удовлетворяет уравнению

$$2\sigma^2 z - 4\sigma z + \frac{3}{2} z + 2a_3 x = 0.$$

Подставляя в уравнение выше решение в виде $z = \beta_1(\log_q x)x$, $\beta_1 \in \mathbb{C}[\log_q x]$, переходя к переменной $t = \log_q x$, получаем разностное уравнение на β_1:

$$\frac{1}{2}\beta_1(t+2) - 2\beta_1(t+1) + \frac{3}{2}\beta_1(t) + 2a_3 = 0,$$

все решения которого в виде многочлена записываются в виде $\beta_1(t) = 2a_3 t + C$, $C \in \mathbb{C}$.

Итого, получаем начальный отрезок формального разложения решения уравнения (8.1) при $q = \frac{1}{2}$:

$$y(x) = -1 + (C - 2a_3 \log_2 x)\, x + \ldots, \quad C \in \mathbb{C}.$$

Случай 2. Пусть теперь $q = \frac{1}{4}$, тогда собственные числа: $k_1 = \frac{1}{2}$, $k_2 = -\log_4\left(\frac{3}{2}\right)$, только k_1 критическое.

Поскольку координаты всех точек носителя уравнения (8.2) целые неотрицательные, критическое число положительное полуцелое, а в носителе нет точки $(0,0)$, тогда и множество $K(k_1) \subset \mathbb{N}/2$. С другой стороны, в множестве $S'_+(\tilde{f})$ есть точки $(0,1)$ и $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$, их конечные суммы покрывают все числа вида $\left(\frac{n}{2}, -1\right), n \in \mathbb{N}$, значит, $K(k_1) = \mathbb{N}/2$.

Найдем первый член разложения решения. Уравнение на $\beta_{\frac{1}{2}}(t)$ имеет вид

$$\frac{1}{2}\beta_{\frac{1}{2}}(t+2) - 2\beta_{\frac{1}{2}}(t+1) + \frac{3}{2}\beta_{\frac{1}{2}}(t) = 0.$$

Для этого уравнения выполнено условие совместности. Все полиномиальные решения такого разностного уравнения являются константами: $\beta_{\frac{1}{2}}(t) = C, C \in \mathbb{C}$ – произвольная постоянная. Найдем следующий член разложения: разностное уравнение на β_1 имеет вид

$$\frac{1}{8}\beta_1(t+2) - \beta_1(t+1) + \frac{3}{2}\beta_1(t) = -2a_3 - \frac{C^2}{4}.$$

Единственным полиномиальным решением данного разностного уравнения является $\beta_1(t) = -\frac{2}{5}(8a_3 + C^2)$.

Получаем следующий начальный отрезок разложения решения уравнения (8.1):

$$y(x) = -1 + C\sqrt{x} + -\frac{2}{5}(8a_3 + C^2)x + \ldots.$$

Итак, мы проиллюстрировали то, что в зависимости от значения параметра q уравнения степенное укороченное решение алгебраического q–разностного уравнения (8.1) может быть продолжено как степенно–логарифмическое разложение вида (6.1) при $q = \frac{1}{2}$ или степенное разложение — разложение в формальный ряд Пюизо — при $q = \frac{1}{4}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А.Д. Брюно. *Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях.* М.: Наука. 1998.
2. А.Д. Брюно. *Асимптотики и разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения* // Успехи мат. наук **59**:3, 31–80 (2004).
3. И.В. Вьюгин, Р.И. Левин. *О проблеме Римана — Гильберта для разностных и q–разностных систем* // Тр. Матем. инст. им. В.А. Стеклова **297**, 326–326 (2017).
4. Н.В. Гаянов, А.В. Парусникова. *О содержащих логарифмы формальных решениях q–разностных уравнений* // Сиб. мат. ж. **65**:5, 863–875 (2024).
5. C.R. Adams. *On the linear ordinary q–difference equation* // Ann. Math. (2) **30**:1, 195–205 (1928).
6. J. Cano, P. Fortuny Ayuso. *Power series solutions of non–linear q–difference equations and the Newton — Puiseux polygon* // Qual. Theory Dyn. Syst. **21**:4, 123, (2022).
7. R. Gontsov, I. Goryuchkina, A. Lastra. *On the convergence of generalized power series solutions of q–difference equations* // Aequationes Math. **96**:3, 579–597 (2022).
8. N. Joshi, P. Roffelsen. *On the crystal limit of the q–difference sixth Painlevé equation* // J. Nonlinear Sci. **35**:1, 31 (2025).

Никита Владимирович Гаянов,
Национальный исследовательский университет,
«Высшая школа экономики»
б-р Покровский, 11,
101000, Москва, Россия
E-mail: gajanovnv@gmail.com

Анастасия Владимировна Парусникова,
Национальный исследовательский университет,
«Высшая школа экономики»
ул. Таллинская, 34,
123458, Москва, Россия
E-mail: parus-a@mail.ru