ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 18 № 2 (2026). С. 114-120.

УДК 519.2, 531.19

КРУПНОЗЕРНИСТЫЕ СОСТОЯНИЯ НА УЛЬТРАПРОИЗВЕДЕНИИ ВЕРОЯТНОСТНЫХ АЛГЕБР

С.Г. ХАЛИУЛЛИН

Аннотация. Вероятностная алгебра, являющаяся некоторым аналогом вероятностного пространства, призвана описывать некоторую физическую систему. Если у нас есть априорное распределение, заданное точным состоянием на этой алгебре, и мы можем определить поведение системы в терминах этого состояния, то мы также можем сделать некоторый прогноз поведения системы. На практике же невозможно измерить все наблюдаемые величины на исходной алгебре, поэтому мы проводим лишь частичное измерение, то есть, мы измеряем наблюдаемые величины на некоторой подалгебре. Это измерение определяет уже другое состояние на этой подалгебре. Если полученное состояние продолжается на исходную алгебру и при этом не привносит дополнительной информации о поведении системы, то мы называем полученное состояние на исходной алгебре крупнозернистым.

В работе обсуждаются вопросы существования крупнозернистых состояний, называемых в работе $(\mathcal{B},\omega)$–крупнозернистостью некоторого состояния, а также рассмотрены ультрапроизведения последовательностей вероятностных алгебр и состояний. В работе показано, что относительно введённого определения ультрапроизведение последовательностей вероятностных алгебр являются вероятностными алгебрами, обсуждаются вопросы существования в них условных математических ожиданий, крупнозернистых состояний и информации.

Ключевые слова: вероятностная алгебра, эквивалентные состояния, крупнозернистые состояния, информация, ультрапроизведения.

Mathematics Subject Classification: 81Qxx, 46M07

1. Введение

Работа продолжает цикл исследований ультрапроизведений различных квантовых структур (см. [1], [2], [6]–[9]). Интерес автора представляет изучение соотношений состояний, таких, как абсолютная непрерывность и сингулярность состояний. При этом, определения абсолютной непрерывности состояния относительно другого состояния для различных структур могут различаться. Связано это с тем, что иногда приходится рассматривать лишь точные состояния, которые при традиционном определении тривиальным образом взаимно абсолютно непрерывны относительно других точных состояний.

Также интересно изучать связанные с понятием абсолютной непрерывности вопросы существования производных Радона — Никодима, условного математического ожидания, крупнозернистых состояний и информации на вероятностных алгебрах. Понятие вероятностной алгебры восходит к работам Дэя и Сигала ([4], [12]).

Для сохранения полезных свойств «сомножителей» ультрапризведения от структуры к структуре корректируется и само определение ультрапроизведения. Рассмотрение здесь

S.G. Haliullin, Coarse–graining states on ultraproducts of probability algebras.

Поступила 18 февраля 2025 г.

ультрафильтров только в множестве натуральных чисел обусловлено вопросами эквивалентности состояний и взаимной контигуальности последовательностей состояний. Понятие контигуальности впервые было введено Л. Ле Камом ([10]) в статистической задаче различения близких гипотез при увеличении объёма выборки.

2. Эквивалентность и ортогональность состояний на вероятностных алгебрах

Определение 2.1 ([5]). *Пусть задана *–алгебра $\mathcal{A}$ над полем комплексных чисел с инволюцией * и единицей. Линейный функционал $\omega : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ называется состоянием, если*

i) *ω является положительным: $\omega(x^*x) \geqslant 0$ для всех $x \in \mathcal{A}$;*

ii) *ω нормирован: $\omega(\mathbf{1}) = 1$.*

Состояние ω является точным, если $\omega(x^*x) = 0$ подразумевает, что $x = \mathbf{0}$. Пусть далее $\omega : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ — точное состояние на $\mathcal{A}$. Тогда тройка $(\mathcal{A},\, ^*,\, \omega)$ называется вероятностной алгеброй.

Пусть $(\mathcal{A},\, ^*,\, \omega)$ — вероятностная алгебра. Введём на $\mathcal{A}$ скалярное произведение, полагая

$$\langle x, y\rangle = \omega(y^*x).$$

Обозначим через H гильбертово пространство, являющееся пополнением алгебры $\mathcal{A}$ относительно этого скалярного произведения. Продолжение состояния ω с алгебры $\mathcal{A}$ на H будем обозначать той же буквой ω.

Определение 2.2 ([11]). *Представление π алгебры $\mathcal{E}$ в гильбертовом пространстве $\tilde{H}$ есть отображение из $\mathcal{E}$ в множество линейных операторов, определённых в общей плотной области $D(\pi)$ (плотна в $\tilde{H}$), удовлетворяющее условиям:*

1. *$\pi(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$;*
2. *$\pi(ax + y)z = a\pi(x)z + \pi(y)z \quad x, y \in \mathcal{E}, z \in D(\pi), a \in \mathbb{C}$;*
3. *$\pi(x)D(\pi) \subset D(\pi)$ для всех $x \in \mathcal{E}$ и $\pi(x)\pi(y)z = \pi(xy)z, \quad x, y \in \mathcal{E}, \quad z \in D(\pi)$;*
4. *$\pi(x^*) \subset \pi(x)^*$ для всех $x \in \mathcal{A}$.*

Определение 2.3 ([11]). *Представление π *–алгебры $\mathcal{E}$ в гильбертовом пространстве H называется эрмитовым или *–представлением, если $(y, \pi(x)z) = (\pi(x^*)y, z)$ для всех $y, z \in D(\pi)$ и $x \in \mathcal{E}$.*

Заметим, что представление π является эрмитовым тогда и только тогда, когда для каждого эрмитова $x \in \mathcal{E}$, то есть $x = x^*$, оператор $\pi(x)$ является эрмитовым.

Пусть теперь$(\mathcal{A},\, ^*,\, \omega)$ — вероятностная алгебра. Для $x \in \mathcal{A}$ определим оператор $\pi(x) : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ формулой

$$\pi(x)y = xy. \tag{2.1}$$

Тогда оператор π является эрмитовым *–представлением вероятностной алгебры $\mathcal{A}$ в плотной инвариантной области $D(\pi) = \mathcal{A} \subseteq H$.

Сопряжённое представление π^* определим следующим образом:

$$D(\pi^*) = \{\cap D(\pi(x)^*) : x \in \mathcal{A}\}, \qquad \pi^*(x) = [\pi(x^*)]^* | D(\pi^*).$$

Всюду далее будем рассматривать представления вида 2.1.

Обозначим множество всех линейных отображений $C : \mathcal{A} \to H$ через $L(\mathcal{A})$.

Определение 2.4 ([5]). *Множество*

$$\pi(\mathcal{A})^c = \{C \in L(\mathcal{A}) : \langle C\pi(x)y, z\rangle = \langle Cy, \pi(x^*)z\rangle, \quad x, y, z \in \mathcal{A}\}$$

называется слабым неограниченным коммутантом оператора π.

Можно показать, что если $C \in \pi(\mathcal{A})^c$, то $C : \mathcal{A} \to D(\pi^*)$ и

$$C\pi(x) = \pi^*(x)C$$

для всех $x \in \mathcal{A}$.

Пример 2.1. *Пусть* $(H, \mathcal{M}, \tau)$ *регулярное вероятностное калибровочное пространство, то есть,* H *— комплексное гильбертово пространство,* $\mathcal{M}$ *— алгебра фон Неймана на* H *и* τ *— точное нормальное следовое состояние на* $\mathcal{M}$ *(подробнее см. [12]). Возьмём в алгебре* $\mathcal{M}$ *такой набор* (P_α) *взаимно ортогональных проекторов, что* $\sum_\alpha P_\alpha = \mathbf{1}$. *Рассмотрим множество* $\mathcal{A}$ *простых операторов на* H, *другими словами, конечных сумм* $T = \sum \lambda_i P_i$, *где* $\lambda_i \in \mathbb{C}$, $P_i \in (P_\alpha)$. *Зададим точное состояние* ω *на* $\mathcal{A}$, *полагая*

$$\omega(T) = \sum \lambda_i \tau(P_i).$$

Тогда тройка $(\mathcal{A}, {}^*, \omega)$ *является вероятностной алгеброй.*

Определение 2.5. *Пусть* $(\mathcal{A}, {}^*, \omega)$ *— вероятностная алгебра.*

1) *Состояние* ν *называется абсолютно непрерывным относительно состояния* ω *(обозначается* $\nu \ll \omega$*), если из того, что* $\omega(x_k^* x_k) \to 0$ *следует, что* $\nu(yx_k) \to 0$, $(k \to \infty)$ *для каждого* $y \in \mathcal{A}$. *Взаимно абсолютно непрерывные состояния называются эквивалентными;*
2) *Состояния* ω *и* ν *называются ортогональными, если существует такая последовательность* $(x_k) \in \mathcal{A}$, *что* $\omega(x_k^* x_k) \to 0$ *и* $\nu(1 - yx_k) \to 0$, $(k \to \infty)$ *для каждого* $y \in \mathcal{A}$.

Известно ([5]), что на вероятностных алгебрах верен аналог теоремы Радона — Никодима: состояние ν абсолютно непрерывно относительно состояния ω тогда и только тогда, если существует такой неотрицательный элемент $C =: \dfrac{d\nu}{d\omega} \in \pi(\mathcal{A})^c$, что $\omega(C\mathbf{1}) = 1$ и $\nu(x) = \omega(Cx)$ для всех $x \in \mathcal{A}$. Если при этом состояние ν точное, то $C > 0$.

Определим понятие контигуальности для последовательностей состояний, заданных на вероятностных алгебрах.

Определение 2.6. *Пусть* $(\mathcal{A}_n, {}^*, \omega_n)_{n \geqslant 1}$ *— последовательность вероятностных алгебр.*

1) *Последовательность состояний* (ν_n), *заданная на последовательности алгебр* $(\mathcal{A}_n, {}^*, \omega_n)_{n \geqslant 1}$ *называется контигуальной относительно последовательности* (ω_n), *если*

$$\lim_{n\to\infty} \omega_n(x_n^* x_n) = 0 \quad \text{влечёт} \quad \lim_{n\to\infty} \nu_n(y_n x_n) = 0 \text{ для каждого } y_n \in \mathcal{A}_n.$$

   Если при этом последовательность (ω_n) *контигуальна по отношению к последовательности* (ν_n), *то эти последовательности называются взаимно контигуальными или, просто, контигуальными;*
2) *Последовательности состояний* (ω_n) *и* (ν_n) *называются вполне асимптотически разделимыми, если существует подпоследовательность* $(n') \subseteq (n)$ *и* $(x_{n'}) \in \mathcal{A}_{n'}$ *такие, что*

$$\lim_{n'\to\infty} \omega_{n'}(x_{n'}^* x_{n'}) = 0, \qquad \lim_{n'\to\infty} \nu_{n'}(\mathbf{1} - y_{n'} x_{n'}) = 0 \text{ для каждого } y_{n'} \in \mathcal{A}_{n'}.$$

Ясно, что контигуальность последовательностей состояний является обобщением понятия эквивалентности состояний, а полная асимптотическая разделимость обобщает понятие ортогональности состояний.

Пусть далее $(\mathcal{A}, {}^*, \omega)$ — вероятностная алгебра и $\mathcal{B}$ — *–подалгебра алгебры $\mathcal{A}$. В этом случае $\mathcal{B}$ является подпространством H и её замыкание $\bar{\mathcal{B}}$ есть (замкнутое) подпространство H. Обозначим через $\pi|\mathcal{B}$ *–представление *–подалгебры $\mathcal{B}$.

Определение 2.7 ([5]). *Для $x \in \mathcal{A}$ условным математическим ожиданием элемента x относительно *–подалгебры $\mathcal{B}$ называется элемент $\mathbb{E}(x|\mathcal{B})$, если*

$$\mathbb{E}(x|\mathcal{B}) \in D[(\pi|\mathcal{B})^*] \subseteq \bar{\mathcal{B}}, \quad \omega(yx) = \omega[(\pi|\mathcal{B})^*(y)\mathbb{E}(x|\mathcal{B})]$$

для всех $y \in \mathcal{B}$.

Существование условного математического ожидания следует из следующего факта (например, [5]). Пусть для всех $x \in \mathcal{A}$ определено состояние $\omega_x : \mathcal{B} \to \mathbf{C}$ следующим образом: обозначим $\omega_x(y) = \omega(\pi(x)y) = \omega(xy)$, которое оказывается абсолютно непрерывным относительно состояния $\omega|\mathcal{B}$. Назовём это преобразованием состояния ω относительно представления π. Тогда $\mathbb{E}(x|\mathcal{B}) = (d\omega_{x^*}/d(\omega|\mathcal{B}))\mathbf{1}$.

Легко видеть, что при $y = \mathbf{1}$ выполняется равенство

$$\omega(x) = \omega(\mathbb{E}(x|\mathcal{B})).$$

Также известно и другое свойство условных математических ожиданий:

$$\mathbb{E}(x|\mathcal{B}) = P_{\mathcal{B}}(x),$$

где $P_{\mathcal{B}} : H \to \bar{\mathcal{B}}$ — проекция.

Определение 2.8 ([5]). *Пусть $(\mathcal{A}, {}^*, \omega)$ — вероятностная алгебра, а $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ — *–подалгебра. Пусть ν — состояние на $\mathcal{B}$ такое, что $\nu \ll \omega|\mathcal{B}$. $(\mathcal{B}, \omega)$–крупнозернистостью ν_c состояния ν на алгебре $\mathcal{A}$ называется состояние, удовлетворяющее условиям:*

1) $\nu_c|\mathcal{B} = \nu$;
2) $\nu_c \ll \omega$;
3) $\nu_c(x) = \nu_c[\mathbb{E}(x|\mathcal{B})]$ *для всех* $x \in \mathcal{A}$.

Рассмотрим ещё одно необходимое в дальнейшем понятие.

Определение 2.9 ([5]). *Говорят, что *–подалгебра $\mathcal{B}$ сохраняет положительность, если для любого $x \in \mathcal{A}$ существует последовательность (y_k), $y_k \in \mathcal{B}$, такая, что*

$$y_k^* y_k \to P_{\mathcal{B}}(x^* x) \quad (k \to \infty),$$

где сходимость рассматривается как сходимость по норме на *–подалгебре $\mathcal{B}$.

Приведём некоторые известные результаты о существовании и свойствах $(\mathcal{B}, \omega)$-крупнозернистости.

Теорема 2.1 ([3]). *Пусть $(\mathcal{A}, {}^*, \omega)$ — вероятностная алгебра, а $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ — *–подалгебра. Предположим, что *–подалгебра $\mathcal{B}$ сохраняет положительность, и ν — такое состояние на $\mathcal{B}$, что $\nu \ll \omega|\mathcal{B}$. Тогда $(\mathcal{B}, \omega)$–крупнозернистость состояния ν существует.*

Теорема 2.2 ([5]). *Пусть $(\mathcal{A}, {}^*, \omega)$ — вероятностная алгебра, а $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ — *–подалгебра. Если $(\mathcal{B}, \omega)$-крупнозернистость ν_c состояния ν существует и единственна, то ν_c является абсолютно непрерывным расширением состояния ν на алгебру $\mathcal{A}$, и $(d\nu_c/d\omega)|\mathcal{B} = d\nu/d(\omega|\mathcal{B})$.*

Определение 2.10. *Пусть $(\mathcal{A}, {}^*, \omega)$ — вероятностная алгебра, а ν — состояние на $\mathcal{A}$. Информация о состоянии ν относительно состояния ω представляет собой отображение $\nu \to I_\omega(\nu)$, удовлетворяющее:*

1) $I_\omega(\nu) \geqslant 0, I_\omega(\omega) = 1$;

2) *для состояний* $\nu_1 \ll \omega, \nu_2 \ll \omega$, *таких, что* $\langle (d\nu_1/d\omega)\mathbf{1}, (d\nu_2/d\omega)\mathbf{1}\rangle = 0$,

$$I_\omega(\nu_1 + \nu_2) = I_\omega(\nu_1) + I_\omega(\nu_2).$$

Известно (см. [5, теорема 4]), что информация $I_\omega(\nu)$ существует, единственна, при этом

$$I_\omega(\nu) = \|(d\nu/d\omega)\mathbf{1}\|^2,$$

и если $(\mathcal{B},\omega)$–крупнозернистость состояния ν существует, то она является единственным непрерывным продолжением ν на алгебру $\mathcal{A}$ с минимальной информацией относительно состояния ω.

3. Ультрапроизведение вероятностных алгебр

Пусть $(\mathcal{A}_n, {}^*, \omega_n)_{n\geqslant 1}$ — последовательность вероятностных алгебр, $\mathscr{U}$ — нетривиальный ультрафильтр на множестве $\mathbb{N}$. Рассмотрим ультрапроизведение $((\mathcal{A}_n)_{\mathscr{U}}, {}^*, \omega_{\mathscr{U}})$ этой последовательности (см. определение [9]).

Теорема 3.1 ([9])**.** *Ультрапроизведение последовательности вероятностных алгебр есть вероятностная алгебра.*

Естественным образом на вероятностной алгебре $((\mathcal{A}_n)_{\mathscr{U}}, {}^*, \omega_{\mathscr{U}})$ вводится *–представление $\pi_{\mathscr{U}}$ и его сопряжённое $\pi^*_{\mathscr{U}}$:

$$\pi_{\mathscr{U}}(x)y = (\pi_n(x_n)y_n)_{\mathscr{U}} = (x_n)_{\mathscr{U}}(y_n)_{\mathscr{U}}, \quad x = (x_n)_{\mathscr{U}}, \quad y = (y_n)_{\mathscr{U}}.$$

Теорема 3.2. *Пусть* $(\mathcal{A}_n, {}^*, \omega_n)_{n\geqslant 1}$ — *последовательность вероятностных алгебр.*

1) *Если последовательности состояний* (ω_n) *и* (ν_n) *взаимно контигуальны, то состояния* $\omega_{\mathscr{U}}$ *и* $\nu_{\mathscr{U}}$ *эквивалентны на ультрапроизведении* $(\mathcal{A}_n)_{\mathscr{U}}$ *для каждого нетривиального ультрафильтра* $\mathscr{U}$ *на* $\mathbb{N}$.
2) *Если последовательности состояний* (ω_n) *и* (ν_n) *вполне асимптотически разделимы, то состояния* $\omega_{\mathscr{U}}$ *и* $\nu_{\mathscr{U}}$ *ортогональны на ультрапроизведении* $(\mathcal{A}_n)_{\mathscr{U}}$ *для некоторого нетривиального ультрафильтра* $\mathscr{U}$ *на* $\mathbb{N}$.

Доказательство. Часть 1) теоремы доказана в работе [6]. Докажем вторую часть.

Предположим противное, то есть, состояния $\omega_{\mathscr{U}}$ и $\nu_{\mathscr{U}}$ на ультрапроизведении $(\mathcal{A}_n)_{\mathscr{U}}$ являются неортогональными. Это означает, что для каждого ультрафильтра $\mathscr{U}$, для любой последовательности $(x_k) \in (\mathcal{A}_n)_{\mathscr{U}}$ существует такой элемент $y \in (\mathcal{A}_n)_{\mathscr{U}}$, что

$$\lim_{k\to\infty} \omega_{\mathscr{U}}(x_k^* x_k) = 0, \qquad \lim_{k\to\infty} \nu_{\mathscr{U}}(\mathbf{1} - yx_k) > \delta \text{ для некоторого } \delta > 0.$$

Отсюда следует, что существует такое k_0, что для всех $k > k_0$

$$\omega_{\mathscr{U}}(x_k^* x_k) < \varepsilon, \qquad \nu_{\mathscr{U}}(\mathbf{1} - yx_k) > \delta.$$

Значит, для всех $k > k_0$ существует $U_k \in \mathscr{U}$, и для всех $n(k) \in U_k$

$$\omega_{n(k)}(x^*_{n(k)} x_{n(k)}) < \varepsilon, \qquad \nu_{n(k)}(\mathbf{1} - y_{n(k)} x_{n(k)}) > \delta.$$

Последнее противоречит с тем, что последовательности состояний (ω_n) и (ν_n) вполне асимптотически разделимы. □

Приведём условия существования в ультрапроизведении вероятностных алгебр условного математического ожидания и связанной с ним информации.

Теорема 3.3. *Пусть* $(\mathcal{A}_n, {}^*, \omega_n)_{n\geqslant 1}$ — *последовательность вероятностных алгебр,* $\mathcal{B}_n$ — **–подалгебра алгебры* $\mathcal{A}_n$, $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{U}$ — *ультрафильтр в множестве* $\mathbb{N}$. *Предположим, что*

1) *для каждого* n *существует условное математическое ожидание* $\mathbb{E}(x_n|\mathcal{B}_n)$;

2) *последовательность состояний* $((\omega_n)_{x_n^*})$, *определённых на последовательности* **–подалгебр* $(\mathcal{B}_n)$ *является контигуальной по отношению к последовательности* $(\omega_n|\mathcal{B}_n)$, *где* $(\omega_n)_{x_n}(y_n) = \omega_n(x_n y_n)$, $y_n \in \mathcal{B}_n$;
3) *последовательность состояний* (ν_n) *контигуальна относительно последовательности* (ω_n).

Тогда на ультрапроизведении $((\mathcal{A}_n)_{\mathscr{U}}, {}^*, \omega_{\mathscr{U}})$ *существует условное математическое ожидание относительно подалгебры* $(\mathcal{B}_n)_{\mathscr{U}}$ *и*

$$\mathbb{E}((x_n)_{\mathscr{U}}|(\mathcal{B}_n)_{\mathscr{U}}) = (\mathbb{E}(x_n|\mathcal{B}_n))_{\mathscr{U}},$$

а также существует информация о состоянии $\nu_{\mathscr{U}}$ *относительно состояния* $\omega_{\mathscr{U}}$ *и*

$$I_{\omega_{\mathscr{U}}}(\nu_{\mathscr{U}}) = \lim_{\mathscr{U}} \|(d\nu_n/d\omega_n)\mathbf{1_n}\|^2.$$

Доказательство. Доказательство теоремы сразу следует из определения ультрапроизведения и теоремы 3.2. Действительно, условие 2) теоремы гарантирует, что состояние $((\omega_n)_{x_n^*})_{\mathscr{U}}$ абсолютно непрерывно относительно состояния $(\omega_n|\mathcal{B}_n)_{\mathscr{U}}$, и, следовательно, существует производная Радона — Никодима

$$d(\omega_{x_n^*})_{\mathscr{U}}/d(\omega_n|\mathcal{B}_n)_{\mathscr{U}} = \lim_{\mathscr{U}} d(\omega_{x_n^*})/d(\omega_n|\mathcal{B}_n)$$

и $[d(\omega_{x_n^*})_{\mathscr{U}}/d(\omega_n|\mathcal{B}_n)_{\mathscr{U}}]\mathbf{1} = \mathbb{E}((x_n)_{\mathscr{U}}|(\mathcal{B}_n))_{\mathscr{U}}$.

Точно также из условия 3) выводятся существование информации и необходимое равенство. □

Введём следующее необходимое определение.

Определение 3.1. *Пусть* $(\mathcal{A}_n, {}^*, \omega_n)_{n\geqslant 1}$ — *последовательность вероятностных алгебр,*

$$\mathcal{A} = \{(x_n),\ x_n \in \mathcal{A}_n : \sup_n \|x_n\|_n < \infty\}.$$

Скажем, что последовательность $(x^{(k)})_{k\geqslant 1} = (x_n^{(k)})_{k\geqslant 1} \in \mathcal{A}$ *равномерно сходится к элементу* $x = (x_n) \in \mathcal{A}$ *при* $k \to \infty$, *если для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое* k_0, *что для всех* $k > k_0$ *и всех* $n \in \mathbb{N}$

$$\|x_n^{(k)} - x_n\|_n < \varepsilon.$$

Теорема 3.4. *Пусть* $(\mathcal{A}_n, {}^*, \omega_n)_{n\geqslant 1}$ — *последовательность вероятностных алгебр,* $\mathcal{B}_n \subseteq \mathcal{A}_n$ — **–подалгебры* $(n \in \mathbb{N})$, $(\mathcal{B}_n)_{\mathscr{U}}$ — *ультрапроизведение последовательности* $(\mathcal{B}_n)$.

Если **–подалгебра* $\mathcal{B}_n$ *сохраняет положительность,* $n \in \mathbb{N}$, *и для любого* $x_n \in \mathcal{A}_n$ *существует последовательность* (y_n^k), $y_n^k \in \mathcal{B}_n$, *такая, что* $y_n^{k*} y_n^k \to P_{\mathcal{B}_n}(x_n^* x_n)$ *равномерно при* $k \to \infty$, *то* **–подалгебра* $(\mathcal{B}_n)_{\mathscr{U}}$ *сохраняет положительность.*

Доказательство. Возьмём произвольную последовательность $x^k \in (\mathcal{A}_n)_{\mathscr{U}}$, $x^k = (x_n^k)_{\mathscr{U}}$. Из условия теоремы следует, что для каждого n существует такая последовательность (y_n^k), что $\lim_{k\to\infty} \|y_n^{k*} y_n^k - P_{\mathcal{B}_n}(x_n^{k*} x_n^k)\| = 0$. Пусть $y_k = (y_n^k)_{\mathscr{U}}$, $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_n)_{\mathscr{U}}$. Тогда

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} \|y^{k*} y^k - P_{\mathcal{B}}(x^{k*} x^k)\| &= \lim_{k\to\infty} \lim_{\mathscr{U}} \|y_n^{k*} y_n^k - P_{\mathcal{B}_n}(x_n^{k*} x_n^k)\| \\ &= \lim_{\mathscr{U}} \lim_{k\to\infty} \|y_n^{k*} y_n^k - P_{\mathcal{B}_n}(x_n^{k*} x_n^k)\| = 0.\end{aligned}$$

Перестановку пределов в двойном пределе обеспечивает условие равномерной сходимости соответствующей последовательности. □

Теорема 3.5. 1) *Пусть* $(\mathcal{A}_n, {}^*, \omega_n)_{n\geqslant 1}$ — *последовательность вероятностных алгебр,* $\mathcal{B}_n \subseteq \mathcal{A}_n$ — **–подалгебры* ($n \in \mathbb{N}$), ν_n — *состояние на* $\mathcal{B}_n$, *такое, что* $\nu_n \ll \omega_n|\mathcal{B}_n$ *и последовательность* (ν_n) *контигуальна относительно* $(\omega_n|\mathcal{B}_n)$, $\mathscr{U}$ — *нетривиальным ультрафильтр на множестве* $\mathbb{N}$. *Если существует* $(\mathcal{B}_n, \omega_n)$*–крупнозернистость* ν_{nc} *состояния* ν_n *на алгебре* $\mathcal{A}_n$ *и* **–подалгебра* $(\mathcal{B}_n)_{\mathscr{U}}$ *сохраняет положительность, то состояние* $\nu_{\mathscr{U}c}$ *на алгебре* $(\mathcal{A}_n)_{\mathscr{U}}$ *является крупнозернистостью состояния* $\nu_{\mathscr{U}}$, *где*

$$\nu_{\mathscr{U}c}(\cdot) = \lim_{\mathscr{U}} \nu_{nc}(\cdot);$$

2) *Если при этом* (ν_{nc}) *контигуальна относительно* (ω_n), *то состояние* $\nu_{\mathscr{U}c}$ *является единственным абсолютно непрерывным продолжением состояния* $\nu_{\mathscr{U}}$ *на алгебру* $(\mathcal{A}_n)_{\mathscr{U}}$ *с минимальной информацией относительно* $\omega_{\mathscr{U}}$.

Доказательство. 1). Существование крупнозернистости на ультрапроизведении следует из теоремы 2.2 и предыдущей теоремы 3.4. 2). Следует из теоремы 3.3. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. С.Г. Халиуллин. *Ультрапроизведения квантово-механических систем* // Уфимск. мат. ж. **14**:2, 94–100 (2022).
2. С.Г. Халиуллин. *Крайние точки вполне выпуклой структуры состояний* // Уфимск. мат. ж. **16**:3, 111–117 (2024).
3. S.J. Bhatt. *Sufficiency and strong commutants in quantum probability theory* // Proc. Proc. Indian Acad. Sci., Math. Sci. **95**:2, 97–107 (1986).
4. H.A. Dye. *The Radon — Nikodym theorem for finite rings of operators* // Trans. Amer. Math. Soc. **72**, 243–280 (1952).
5. S. Gudder, R. Hudson. *A noncommutative probability theory* // Trans. Arner. Math. Soc. **245**, 1–41 (1978).
6. S. Haliullin. *Contiguity and entire separability of states on von Neumann algebras* // Int. J. Theor. Phys. **56**:12, 3889–3894 (2017).
7. S. Haliullin. *Representations of von Neumann algebras and ultraproducts* // Int. J. Theor. Phys. **59**:4, 1010–1016 (2020).
8. S.G. Haliullin. *Ultraproducts for state–spaces of algebra and Radon measures* // Lobachevskii J. Math. **41**:4, 655–660 (2020).
9. S.G. Haliullin. *Probability algebras and ultraproducts* // Lobachevskii J. Math. **45**:1, 412–415 (2024).
10. L. Le Cam. *Locally asymptotically normal families of distributions. Certain approximations to families of distributions and their use in the theory of estimation and testing hypotheses* // Univ. Cflifornia Publ. Statist. **3**, 37–98 (1960).
11. R.T. Powers. *Self–adjoint algebras of unbounded operators* // Comm. Math. Phys. **21**:2, 85–124 (1971).
12. I.E. Segal. *A non-commutative extension of abstract integration* // Ann. Math. (2) **57**:2, 401–457 (1953).

Самигулла Гарифуллович Халиуллин,
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского КФУ,
ул. Кремлевская, 18,
420008, г. Казань, Россия
E-mail: `Samig.Haliullin@kpfu.ru`