ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 18 № 2 (2026). С. 104-113.

УДК 517.53+517.537.72

# О МЕТОДЕ ДИСКРЕТИЗАЦИИ ТРЕХМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ПОЛУДИСКРЕТНОЙ ЦЕПОЧКИ ТОДЫ

**А.Р. ХАКИМОВА**

**Аннотация.** Статья посвящена развитию метода классификации трехмерных интегрируемых дискретных цепочек, основанный на использовании интегрируемых по Дарбу конечно–полевых редукций уравнений с одной непрерывной и двумя дискретными независимыми переменными. В качестве иллюстративного примера рассмотрена полудискретная цепочка Тоды. В рамках настоящего исследования получена решеточная цепочка Тоды.

**Ключевые слова:** трехмерные уравнения, характеристические интегралы, интегрируемость в смысле Дарбу, конечно–полевые редукции, полудискретная цепочка Тоды.

**Mathematics Subject Classification:** 35Q51, 39A14

## 1. Введение

В работе обсуждается метод классификации дискретных уравнений с тремя независимыми переменными типа цепочки Хироты — Мивы

$$u^{j+1}_{n,m+1} = h(u^j_{n,m+1}, u^{j+1}_{n,m}, u^j_{n+1,m+1}, u^j_{n,m}, u^{j+1}_{n-1,m}), \tag{1.1}$$

где функция $u = u^j_{n,m}$ зависит от трех дискретных переменных $n$, $j$ и $m$. Подход основан на дискретизации трехмерных уравнений типа полудискретной цепочки Тоды

$$u^{j+1}_{n,x} = g(u^j_{n,x}, u^{j+1}_n, u^j_{n+1}, u^j_n, u^{j+1}_{n-1}), \tag{1.2}$$

где функция $u = u^j_n(x)$ зависит от непрерывной переменной $x$ и дискретных переменных $n$ и $j$. Другими словами, для получения списка интегрируемых уравнений вида (1.1), необходимо исследовать список всех известных уравнений вида (1.2), который включает в себя следующие цепочки

$(L_1)$ $u^{j+1}_{n,x} = u^j_{n,x} + e^{u^j_n - u^{j+1}_{n-1}} - e^{u^j_{n+1} - u^{j+1}_n}$;

$(L_2)$ $u^{j+1}_{n,x} = u^j_{n,x} - e^{u^{j+1}_{n-1} - u^j_n} + e^{u^{j+1}_n - u^j_{n+1}} - e^{u^{j+1}_{n-1} - u^{j+1}_n} + e^{u^j_n - u^j_{n+1}}$;

$(L_3)$ $u^{j+1}_{n,x} = u^j_{n,x} \dfrac{(u^{j+1}_n)^2}{u^j_{n+1} u^{j+1}_{n-1}}$;

$(L_4)$ $u^{j+1}_{n,x} = u^j_{n,x} \dfrac{u^j_{n+1} - u^{j+1}_n}{u^j_n - u^{j+1}_{n-1}}$;

---

A.R. Khakimova, On method of discretization of three–dimensional equations of the semi–discrete Toda type chain.



Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 25-21-00050, https://rscf.ru/project/25-21-00050/.

*Поступила 19 января 2026 г.*

$(L_5)$ $u^{j+1}_{n,x} = u^j_{n,x}\dfrac{u^{j+1}_n\left(u^{j+1}_n - u^j_{n+1}\right)}{u^j_{n+1}\left(u^{j+1}_{n-1} - u^j_n\right)};$

$(L_6)$ $u^{j+1}_{n,x} = u^j_{n,x}\dfrac{\left(u^{j+1}_n - u^{j+1}_{n-1}\right)\left(u^{j+1}_n - u^j_{n+1}\right)}{\left(u^j_{n+1} - u^j_n\right)\left(u^{j+1}_{n-1} - u^j_n\right)};$

$(L_7)$ $u^{j+1}_{n,x} = u^j_{n,x} + e^{u^{j+1}_{n-1} - u^{j+1}_n - u^j_n + u^j_{n+1}};$

$(L_8)$ $u^{j+1}_{n,x} = u^j_{n,x} + e^{u^j_{n+1}} + e^{u^{j+1}_{n-1}} - e^{u^{j+1}_n} - e^{u^j_n};$

$(L_9)$ $u^{j+1}_{n,x} = u^j_{n,x} + \left(u^{j+1}_n - u^j_n\right)\left(u^{j+1}_n + u^j_n - u^{j+1}_{n-1} - u^j_{n+1}\right).$

Интегрируемые цепочки $(L_1)$–$(L_9)$ были найдены в рамках различных исследований в следующих работах. Уравнения $(L_1)$ и $(L_8)$ были получены как итерации преобразования Беклунда для нелинейных дифференциально–разностных моделей в статье Е. Дейта, М. Джимбы и Т. Мивы [9]. Уравнение $(L_7)$ было найдено как уравнение для инвариантов Лапласа линейных дифференциально–разностных уравнений с переменными коэффициентами в работе С.Я. Старцева и В.Э. Адлера [1]. Цепочки $(L_2)$–$(L_6)$ были получены в результате решения задачи классификации интегрируемых уравнений вида (1.2), при некотором дополнительном предположении, методом дисперсионных деформаций в статье Е.В. Ферапонтова, В.С. Новикова и И. Рустемоглу [10]. Уравнение $(L_9)$ было выведено при исследовании свойств тангенциального отображения В.Э. Адлером в работе [8].

**Замечание 1.1.** *В недавних работах [13], [7], написанных совместно с И.Т. Хабибуллиным, мы получили полный список уравнений $(L_1)$–$(L_9)$ путем дискретизации всех известных трехмерных уравнений типа двумеризованной цепочки Тоды*

$$u_{n,xy} = f(u_{n,x}, u_{n,y}, u_{n+1}, u_n, u_{n-1}), \tag{1.3}$$

*который состоит из шести следующих уравнений*

$(E_1)$ $u_{n,xy} = e^{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}},$

$(E_2)$ $u_{n,xy} = e^{u_{n+1}} - 2e^{u_n} + e^{u_{n-1}},$

$(E_3)$ $u_{n,xy} = e^{u_{n+1} - u_n} - e^{u_n - u_{n-1}},$

$(E_4)$ $u_{n,xy} = (u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1})\, u_{n,x},$

$(E_5)$ $u_{n,xy} = (e^{u_{n+1} - u_n} - e^{u_n - u_{n-1}})\, u_{n,x},$

$(E_6)$ $u_{n,xy} = \alpha_n u_{n,x} u_{n,y}, \quad \alpha_n = \frac{1}{u_n - u_{n-1}} - \frac{1}{u_{n+1} - u_n}.$

*Уравнения $(E_1)$–$(E_3)$ известны из работ классиков (см., например, обзор [2]), $(E_4)$, $(E_5)$ получены в рамках классификации уравнений вида (1.3) в работе [15], цепочка $(E_6)$ найдена независимо в [15] и [5]. Более того, в работах [4], [14], [6] методом интегрируемых по Дарбу редукций, была решена задача полного описания интегрируемых случаев уравнения (1.3) с линейной зависимостью от производных $u_{n,x}$, $u_{n,y}$. Насколько нам известно, в литературе нет примеров интегрируемых уравнений вида (1.3), которые не были бы линейными по производным. Поэтому вполне вероятно, что список $(E_1)$–$(E_6)$ является исчерпывающим списком интегрируемых уравнений вида (1.3). В связи с этим, можно предположить, что список $(L_1)$–$(L_9)$ также является исчерпывающим.*

Обсудим некоторые понятия, необходимые нам в дальнейшем. Рассмотрим систему дифференциально–разностных уравнений вида

$$\begin{cases} u_{1,x}^{j+1} = g_1(u_{1,x}^j, u_1^{j+1}, u_2^j, u_n^j), \\ u_{n,x}^{j+1} = g(u_{n,x}^j, u_n^{j+1}, u_{n+1}^j, u_n^j, u_{n-1}^{j+1}), \qquad 2 \leqslant n \leqslant N-1, \\ u_{N,x}^{j+1} = g_N(u_{N,x}^j, u_N^{j+1}, u_{N+1}^j, u_N^j, u_{N-1}^{j+1}). \end{cases} \tag{1.4}$$

**Определение 1.1.** *Система уравнений* (1.4) *называется интегрируемой в смысле Дарбу, если она допускает полные наборы интегралов по обоим характеристическим направлениям $x$ и $j$.*

**Определение 1.2.** *Функция*

$$J = J(x, j, u_1^j, u_2^j, \ldots, u_N^j, u_1^{j+1}, u_2^{j+1}, \ldots, u_N^{j+1}, \ldots, u_1^{j+k}, u_2^{j+k}, \ldots, u_N^{j+k}), \tag{1.5}$$

*где $k = 1, 2, \ldots$, называется $x$–интегралом системы (1.4) порядка $k$, если хотя бы для одной пары чисел $l, s = 1, 2, \ldots, N$, произведение*

$$\frac{\partial J}{\partial u_l^j} \cdot \frac{\partial J}{\partial u_s^{j+k}}$$

*тождественно не обращается в нуль, и, кроме того, выполняется соотношение*

$$D_x J = 0,$$

*где $D_x$ обозначает оператор полного дифференцирования по $x$. Производная переменных $u_1^{j+k}$, $u_2^{j+k}$, …, $u_N^{j+k}$, $k = 1, 2, \ldots$, по $x$ вычисляется при помощи системы (1.4).*

Пусть задан набор $x$–интегралов минимальных порядков $k_l$ (определение минимальности можно найти в [3])

$$J_l = J_l(x, j, u_1^j, u_2^j, \ldots, u_N^j, u_1^{j+1}, u_2^{j+1}, \ldots, u_N^{j+1}, \ldots, u_1^{j+k_l}, u_2^{j+k_l}, \ldots, u_N^{j+k_l}), \tag{1.6}$$

где $l = 1, 2, \ldots, N$. Множество (1.6) представляет собой полный набор $x$–интегралов для системы гиперболического типа (1.4) тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\det\left(\frac{\partial J_l}{\partial u_n^{j+k_l}}\right) := \begin{vmatrix} \frac{\partial J_1}{\partial u_1^{j+k_1}} & \frac{\partial J_1}{\partial u_2^{j+k_1}} & \cdots & \frac{\partial J_1}{\partial u_N^{j+k_1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial J_N}{\partial u_1^{j+k_N}} & \frac{\partial J_N}{\partial u_2^{j+k_N}} & \cdots & \frac{\partial J_N}{\partial u_N^{j+k_N}} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{1.7}$$

**Определение 1.3.** *Функция*

$$I = I(x, j, u_1^j, u_2^j, \ldots, u_N^j, u_{1,x}^j, u_{2,x}^j, \ldots, u_{N,x}^j, \ldots, u_{1,[r]}^j, u_{2,[r]}^j, \ldots, u_{N,[r]}^j), \tag{1.8}$$

*где $u_{[r]} = \frac{\partial^r u}{\partial x^r}$, $r = 1, 2, \ldots$, называется $j$–интегралом порядка $r$ системы (1.4), если выполнено соотношение*

$$D_j I = I,$$

*где $D_j$ является оператором сдвига, действующим по правилу $D_j(f(j)) = f(j+1)$. Сдвиг $j$ переменных $u_{1,[r]}^j$, $u_{2,[r]}^j$, …, $u_{N,[r]}^j$, $r = 1, 2, \ldots$, вычисляется в силу системы уравнений (1.4).*

Пусть задан набор $j$–интегралов минимальных порядков $r_s$

$$I_s = I_s(x, j, u_1^j, u_2^j, \ldots, u_N^j, u_{1,x}^j, u_{2,x}^j, \ldots, u_{N,x}^j, \ldots, u_{1,[r_s]}^j, u_{2,[r_s]}^j, \ldots, u_{N,[r_s]}^j), \tag{1.9}$$

где $s = 1, 2, \ldots, N$. Множество (1.9) определяет полный набор $j$–интегралов системы (1.4) тогда и только тогда, когда выполняется условие (см. [11])

$$\det\left(\frac{\partial I_s}{\partial u^j_{n,[r_s]}}\right) := \begin{vmatrix} \frac{\partial I_1}{\partial u^j_{1,[r_1]}} & \frac{\partial I_1}{\partial u^j_{2,[r_1]}} & \ldots & \frac{\partial I_1}{\partial u^j_{N,[r_1]}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial I_N}{\partial u^j_{1,[r_N]}} & \frac{\partial I_N}{\partial u^j_{2,[r_N]}} & \ldots & \frac{\partial I_N}{\partial u^j_{N,[r_N]}} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{1.10}$$

## 2. Алгоритм дискретизации цепочек типа полудискретной цепочки Тоды

Обсудим метод дискретизации интегрируемых трехмерных цепочек вида (1.2), основанный на использовании её конечно–полевой редукции

$$\begin{cases} u^{j+1}_{1,x} = g_1(u^j_{1,x}, u^{j+1}_1, u^j_2, u^j_n), \\ u^{j+1}_{n,x} = g(u^j_{n,x}, u^{j+1}_n, u^j_{n+1}, u^j_n, u^{j+1}_{n-1}), \qquad 2 \leqslant n \leqslant N-1, \\ u^{j+1}_{N,x} = g_N(u^j_{N,x}, u^{j+1}_N, u^j_{N+1}, u^j_N, u^{j+1}_{N-1}). \end{cases} \tag{2.1}$$

Здесь функции $g_1$ и $g_N$ выбраны таким образом, что система (2.1) является интегрируемой в смысле Дарбу. Граничные условия для цепочек $(L_1)$–$(L_9)$, обеспечивающие интегрируемые по Дарбу редукции, найдены в работах [12], [13], [7].

Предположим, что функции

$$J_l = J_l(x, j, u^j, u^{j+1}, \ldots, u^{j+k_l}), \qquad l = 1, 2, \ldots, N, \tag{2.2}$$

где $u^j = (u^j_1, u^j_2, \ldots, u^j_N)$, образуют полный набор характеристических интегралов минимальных порядков по направлению $x$ системы (2.1). Другими словами, функции $J_l$ удовлетворяют соотношению $D_x J_l = 0$, где $D_x$ обозначает оператор полной производной по переменной $x$. При этом имеется в виду, что производная $D_x$ от функции $J_l$ вычисляется в силу исходной системы (2.1).

В дальнейшем мы предполагаем, что динамические переменные $u^j_1$, $u^j_2$, …, $u^j_N$ зависят не только от $x$ и $j$, но и от дополнительной дискретной переменной $m$, поэтому введем нижний индекс $u^j_{1,m}$, $u^j_{2,m}$, …, $u^j_{N,m}$. Зависимость от переменной $m$ будет определяться в силу разностной системы следующего вида

$$\begin{cases} u^{j+1}_{1,m+1} = h_1(u^j_{1,m+1}, u^{j+1}_{1,m}, u^j_{2,m+1}, u^j_{1,m}), \\ u^{j+1}_{n,m+1} = h(u^j_{n,m+1}, u^{j+1}_{n,m}, u^j_{n+1,m+1}, u^j_{n,m}, u^{j+1}_{n-1,m}), \qquad 2 \leqslant n \leqslant N-1, \\ u^{j+1}_{N,m+1} = h_N(u^j_{N,m+1}, u^{j+1}_{N,m}, u^j_{N,m}, u^{j+1}_{N-1,m}) \end{cases} \tag{2.3}$$

с неопределенными правыми частями. Для отыскания конкретного вида функций $h_1$, $h_2$ и $h$ мы будем пользоваться предположением, что функции $J_l$, которые являются $x$–интегралами системы (2.1), после введения зависимости от дискретной переменной $m$ будут являться $m$–интегралами искомой системы (2.3). Обозначим эти функции через $\tilde{J}_l$:

$$\tilde{J}_l = \tilde{J}_l(x, j, m, u^j_m, u^{j+1}_m, \ldots, u^{j+k_l}_m), \quad l = 1, 2, \ldots, N, \tag{2.4}$$

где $u^j_m = (u^j_{1,m}, u^j_{2,m}, \ldots, u^j_{N,m})$. Другими словами, функции $\tilde{J}_l$ должны удовлетворять условию

$$D_m \tilde{J}_l = \tilde{J}_l,$$

где $D_m$ — оператор сдвига аргумента $m$, сдвиг по переменной $m$ выполняется в силу системы (2.3).

При этом, для исключения тривиального результата, необходимо, чтобы функции $\tilde{J}_1$, $\tilde{J}_2$, …, $\tilde{J}_l$ обеспечивали полный набор независимых $m$–интегралов минимальных порядков для (2.3).

Допустим, что система вида (2.3) найдена и она не является тривиальной, тогда мы легко определяем вид дискретной трехмерной цепочки

$$u^{j+1}_{n,m+1} = h(u^j_{n,m+1}, u^{j+1}_{n,m}, u^j_{n+1,m+1}, u^j_{n,m}, u^{j+1}_{n-1,m}). \tag{2.5}$$

Отметим, что для решения задачи дискретизации достаточно ограничиться рассмотрением случая $N = 3$.

## 3. Пример

В качестве иллюстрации алгоритма дискретизации рассмотрим полудискретную цепочку Тоды $(L_1)$

$$u^{j+1}_{n,x} = u^j_{n,x} + e^{u^j_n - u^{j+1}_{n-1}} - e^{u^j_{n+1} - u^{j+1}_n}. \tag{3.1}$$

Конечно–полевая редукция уравнения (3.1) получается из этой цепочки при помощи наложения граничных условий обрыва $u_0 = \infty$, $u_4 = -\infty$ и имеет вид

$$\begin{cases} \bar{u}^{j+1}_x = \bar{u}^j_x - e^{\bar{v}^j - \bar{u}^{j+1}}, \\ \bar{v}^{j+1}_x = \bar{v}^j_x + e^{\bar{v}^j - \bar{u}^{j+1}} - e^{\bar{w}^j - \bar{v}^{j+1}}, \\ \bar{w}^{j+1}_x = \bar{w}^j_x + e^{\bar{w}^j - \bar{v}^{j+1}}, \end{cases} \tag{3.2}$$

где $\bar{u}^j = u^j_1$, $\bar{v}^j = u^j_2$, $\bar{w}^j = u^j_3$. Далее нам понадобятся $x$–интегралы системы (3.2), которые имеют вид

$$\begin{aligned} \bar{J}_1 &= e^{\bar{u}^{j+1} + \bar{v}^{j+1} + \bar{w}^{j+1} - \bar{u}^j - \bar{v}^j - \bar{w}^j}, \\ \bar{J}_2 &= e^{\bar{v}^j + \bar{w}^j - \bar{v}^{j-1} - \bar{w}^{j-1}} + e^{\bar{u}^{j+1} + \bar{w}^j - \bar{u}^j - \bar{w}^{j-1}} + e^{\bar{u}^{j+1} + \bar{v}^{j+1} - \bar{u}^j - \bar{v}^j}, \\ \bar{J}_3 &= e^{\bar{u}^{j+2} - \bar{u}^{j+1}} + e^{\bar{v}^{j+1} - \bar{v}^j} + e^{\bar{w}^j - \bar{w}^{j-1}}. \end{aligned}$$

Покажем, что интегралы $\bar{J}_1$–$\bar{J}_3$ образуют полный набор независимых $x$–интегралов. Вычислим определитель (1.7). Получим

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \bar{J}_1}{\partial \bar{u}^{j+1}} & \dfrac{\partial \bar{J}_1}{\partial \bar{v}^{j+1}} & \dfrac{\partial \bar{J}_1}{\partial \bar{w}^{j+1}} \\ \dfrac{\partial D_j(\bar{J}_2)}{\partial \bar{u}^{j+2}} & \dfrac{\partial D_j(\bar{J}_2)}{\partial \bar{v}^{j+2}} & \dfrac{\partial D_j(\bar{J}_2)}{\partial \bar{w}^{j+2}} \\ \dfrac{\partial D_j(\bar{J}_3)}{\partial \bar{u}^{j+3}} & \dfrac{\partial D_j(\bar{J}_3)}{\partial \bar{v}^{j+3}} & \dfrac{\partial D_j(\bar{J}_3)}{\partial \bar{w}^{j+3}} \end{vmatrix} = e^{\bar{u}^{j+3} + \bar{v}^{j+2} + \bar{w}^{j+1} - \bar{u}^j - \bar{v}^j - \bar{w}^j} \neq 0. \tag{3.3}$$

Следовательно, интегралы $\bar{J}_1$–$\bar{J}_3$ образуют полный набор независимых $x$–интегралов.

Теперь введем зависимость от $m$ в переменных $\bar{u}^j = \bar{u}^j_m$, $\bar{v}^j = \bar{v}^j_m$, $\bar{w}^j = \bar{w}^j_m$ и сделаем замену $e^{\bar{u}^j_m} = u^j_m$, $e^{\bar{v}^j_m} = v^j_m$, $e^{\bar{w}^j_m} = w^j_m$, тогда $x$–интегралы $\bar{J}_1$–$\bar{J}_3$ перепишутся в виде

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{u^{j+1}_m v^{j+1}_m w^{j+1}_m}{u^j_m v^j_m w^j_m}, \\ J_2 &= \frac{v^j_m w^j_m}{v^{j-1}_m w^{j-1}_m} + \frac{u^{j+1}_m w^j_m}{u^j_m w^{j-1}_m} + \frac{u^{j+1}_m v^{j+1}_m}{u^j_m v^j_m}, \\ J_3 &= \frac{u^{j+2}_m}{u^{j+1}_m} + \frac{v^{j+1}_m}{v^j_m} + \frac{w^j_m}{w^{j-1}_m}. \end{aligned}$$

Далее будем предполагать, что функции $J_1$–$J_3$ являются $m$–интегралами системы

$$\begin{cases} u^{j+1}_{m+1} = h_1(u^j_m, u^j_{m+1}, u^{j+1}_m, v^j_{m+1}), \\ v^{j+1}_{m+1} = h_2(v^j_m, v^j_{m+1}, v^{j+1}_m, w^j_{m+1}, u^{j+1}_m), \\ w^{j+1}_{m+1} = h_3(w^j_m, w^j_{m+1}, w^{j+1}_m, v^{j+1}_m), \end{cases} \tag{3.4}$$

которая получается из цепочки

$$u_{n,m+1}^{j+1} = h_2(u_{n,m}^j, u_{n,m+1}^j, u_{n,m}^{j+1}, u_{n+1,m+1}^j, u_{n-1,m}^{j+1}). \tag{3.5}$$

Из условий $(D_m - 1)J_i = 0$ получаем следующие 3 уравнения

$$\begin{aligned}
(D_m - 1)J_1 &= \frac{u_{m+1}^{j+1}v_{m+1}^{j+1}w_{m+1}^{j+1}}{u_{m+1}^j v_{m+1}^j w_{m+1}^j} - \frac{u_m^{j+1}v_m^{j+1}w_m^{j+1}}{u_m^j v_m^j w_m^j} = 0,\\
(D_m - 1)J_2 &= \frac{v_{m+1}^j w_{m+1}^j}{v_{m+1}^{j-1} w_{m+1}^{j-1}} + \frac{u_{m+1}^{j+1} w_{m+1}^j}{u_{m+1}^j w_{m+1}^{j-1}} + \frac{u_{m+1}^{j+1} v_{m+1}^{j+1}}{u_{m+1}^j v_{m+1}^j}\\
&\quad - \frac{v_m^j w_m^j}{v_m^{j-1} w_m^{j-1}} - \frac{u_m^{j+1} w_m^j}{u_m^j w_m^{j-1}} - \frac{u_m^{j+1} v_m^{j+1}}{u_m^j v_m^j} = 0,\\
(D_m - 1)J_3 &= \frac{u_{m+1}^{j+2}}{u_{m+1}^{j+1}} + \frac{v_{m+1}^{j+1}}{v_{m+1}^j} + \frac{w_{m+1}^j}{w_{m+1}^{j-1}} - \frac{u_m^{j+2}}{u_m^{j+1}} - \frac{v_m^{j+1}}{v_m^j} - \frac{w_m^j}{w_m^{j-1}} = 0.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Сосредоточимся на первом уравнении. Перепишем его с учетом системы (3.4):

$$\begin{aligned}
&\frac{h_1(u_m^j, u_{m+1}^j, u_m^{j+1}, v_{m+1}^j) h_2(v_m^j, v_{m+1}^j, v_m^{j+1}, w_{m+1}^j, u_m^{j+1}) h_3(w_m^j, w_{m+1}^j, w_m^{j+1}, v_m^{j+1})}{u_{m+1}^j v_{m+1}^j w_{m+1}^j}\\
&\quad - \frac{u_m^{j+1}v_m^{j+1}w_m^{j+1}}{u_m^j v_m^j w_m^j} = 0.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Продифференцируем уравнение (3.7) по $u_{m+1}^j$ и получим, что функция $h_1(u_m^j, u_{m+1}^j, u_m^{j+1}, v_{m+1}^j)$ удовлетворяет уравнению

$$u_{m+1}^j \frac{\partial}{\partial u_{m+1}^j} h_1(u_m^j, u_{m+1}^j, u_m^{j+1}, v_{m+1}^j) - h_1(u_m^j, u_{m+1}^j, u_m^{j+1}, v_{m+1}^j) = 0. \tag{3.8}$$

Решая полученное уравнение, найдем

$$h_1(u_m^j, u_{m+1}^j, u_m^{j+1}, v_{m+1}^j) = h_{11}(u_m^j, u_m^{j+1}, v_{m+1}^j) u_{m+1}^j. \tag{3.9}$$

Тогда, с учетом найденного, уравнение (3.7) перепишется в виде

$$\begin{aligned}
&\frac{h_{11}(u_m^j, u_m^{j+1}, v_{m+1}^j) h_2(v_m^j, v_{m+1}^j, v_m^{j+1}, w_{m+1}^j, u_m^{j+1}) h_3(w_m^j, w_{m+1}^j, w_m^{j+1}, v_m^{j+1})}{v_{m+1}^j w_{m+1}^j}\\
&\quad - \frac{u_m^{j+1}v_m^{j+1}w_m^{j+1}}{u_m^j v_m^j w_m^j} = 0.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Далее, мы дифференцируем уравнение (3.10) по $w_m^{j+1}$ дважды и, анализируя полученное уравнение, находим, что функция $h_3(w_m^j, w_{m+1}^j, w_m^{j+1}, v_m^{j+1})$ принимает вид

$$h_3(w_m^j, w_{m+1}^j, w_m^{j+1}, v_m^{j+1}) = h_{31}(w_m^j, w_{m+1}^j, v_m^{j+1}) w_m^{j+1}. \tag{3.11}$$

Тогда уравнение (3.10) запишется в виде

$$\frac{h_{11}(u_m^j, u_m^{j+1}, v_{m+1}^j) h_2(v_m^j, v_{m+1}^j, v_m^{j+1}, w_{m+1}^j, u_m^{j+1}) h_{31}(w_m^j, w_{m+1}^j, v_m^{j+1})}{v_{m+1}^j w_{m+1}^j} - \frac{u_m^{j+1}v_m^{j+1}}{u_m^j v_m^j w_m^j} = 0. \tag{3.12}$$

Поскольку функции $h_{11}(u^j_m, u^{j+1}_m, v^j_{m+1})$, $h_2(v^j_m, v^j_{m+1}, v^{j+1}_m, w^j_{m+1}, u^{j+1}_m)$, $h_{31}(w^j_m, w^j_{m+1}, v^{j+1}_m)$ не равны нулю, уравнение (3.12) может быть представлено одним из следующих вариантов

$$\begin{aligned}
&\frac{h_{11}(u^j_m, u^{j+1}_m, v^j_{m+1})u^j_m}{v^j_{m+1}w^j_{m+1}} - \frac{u^{j+1}_m v^{j+1}_m}{v^j_m w^j_m h_2(v^j_m, v^j_{m+1}, v^{j+1}_m, w^j_{m+1}, u^{j+1}_m)h_{31}(w^j_m, w^j_{m+1}, v^{j+1}_m)} = 0;\\
&\frac{h_2(v^j_m, v^j_{m+1}, v^{j+1}_m, w^j_{m+1}, u^{j+1}_m)v^j_m}{v^j_{m+1}w^j_{m+1}} - \frac{u^{j+1}_m v^{j+1}_m}{u^j_m w^j_m h_{11}(u^j_m, u^{j+1}_m, v^j_{m+1})h_{31}(w^j_m, w^j_{m+1}, v^{j+1}_m)} = 0;\\
&\frac{h_{31}(w^j_m, w^j_{m+1}, v^{j+1}_m)w^j_m}{v^j_{m+1}w^j_{m+1}} - \frac{u^{j+1}_m v^{j+1}_m}{u^j_m v^j_m h_{11}(u^j_m, u^{j+1}_m, v^j_{m+1})h_2(v^j_m, v^j_{m+1}, v^{j+1}_m, w^j_{m+1}, u^{j+1}_m)} = 0.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Дифференцируя эти три уравнения соответственно по $u^j_m$, $v^j_m$ и $w^j_m$, найдем зависимость искомых функций от данных переменных

$$\begin{aligned}
h_{11}(u^j_m, u^{j+1}_m, v^j_{m+1}) &= \frac{h_{12}(u^{j+1}_m, v^j_{m+1})}{u^j_m};\\
h_2(v^j_m, v^j_{m+1}, v^{j+1}_m, w^j_{m+1}, u^{j+1}_m) &= \frac{h_{22}(v^j_{m+1}, v^{j+1}_m, w^j_{m+1}, u^{j+1}_m)}{v^j_m};\\
h_{31}(w^j_m, w^j_{m+1}, v^{j+1}_m) &= \frac{h_{32}(w^j_{m+1}, v^{j+1}_m)}{w^j_m}.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Тогда, уравнение (3.12) перепишется в виде

$$\frac{h_{12}(u^{j+1}_m, v^j_{m+1})h_{22}(v^j_{m+1}, v^{j+1}_m, w^j_{m+1}, u^{j+1}_m)h_{32}(w^j_{m+1}, v^{j+1}_m)}{v^j_{m+1}w^j_{m+1}} - u^{j+1}_m v^{j+1}_m = 0, \tag{3.15}$$

из которого выразим функцию $h_{22}(v^j_{m+1}, v^{j+1}_m, w^j_{m+1}, u^{j+1}_m)$:

$$h_{22}(v^j_{m+1}, v^{j+1}_m, w^j_{m+1}, u^{j+1}_m) = \frac{u^{j+1}_m v^{j+1}_m v^j_{m+1} w^j_{m+1}}{h_{12}(u^{j+1}_m, v^j_{m+1})h_{32}(w^j_{m+1}, v^{j+1}_m)}. \tag{3.16}$$

В итоге, из первого уравнения (3.6) находим предварительный вид искомых функций $h_1(u^j_m, u^j_{m+1}, u^{j+1}_m, v^j_{m+1})$, $h_2(v^j_m, v^j_{m+1}, v^{j+1}_m, w^j_{m+1}, u^{j+1}_m)$ и $h_3(w^j_m, w^j_{m+1}, w^{j+1}_m, v^{j+1}_m)$:

$$\begin{aligned}
h_1(u^j_m, u^j_{m+1}, u^{j+1}_m, v^j_{m+1}) &= \frac{h_{12}(u^{j+1}_m, v^j_{m+1})u^j_{m+1}}{u^j_m};\\
h_2(v^j_m, v^j_{m+1}, v^{j+1}_m, w^j_{m+1}, u^{j+1}_m) &= \frac{u^{j+1}_m v^{j+1}_m v^j_{m+1} w^j_{m+1}}{v^j_m h_{12}(u^{j+1}_m, v^j_{m+1})h_{32}(w^j_{m+1}, v^{j+1}_m)};\\
h_3(w^j_m, w^j_{m+1}, w^{j+1}_m, v^{j+1}_m) &= \frac{h_{32}(w^j_{m+1}, v^{j+1}_m)w^{j+1}_m}{w^j_m}.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Перейдем далее к исследованию второго уравнения (3.6), которое с учетом найденных значений (3.17) принимает вид

$$\begin{aligned}
&\frac{h_{32}(w^j_{m+1}, v^{j+1}_m)h_{12}(u^{j+2}_m, v^{j+1}_{m+1})}{u^{j+1}_m w^j_{m+1}} + \frac{u^{j+2}_m v^{j+2}_m h_{32}(w^j_{m+1}, v^{j+1}_m)}{u^{j+1}_m v^{j+1}_m h_{32}(w^{j+1}_{m+1}, v^{j+2}_m)} + \frac{u^{j+1}_m v^{j+1}_m}{v^j_m h_{12}(u^{j+1}_m, v^j_{m+1})}\\
&\qquad - \frac{v^{j+1}_m}{v^j_m} - \frac{u^{j+2}_m}{u^{j+1}_m} - \frac{w^j_m u^{j+2}_m v^{j+2}_m}{w^{j+1}_m u^{j+1}_m v^{j+1}_m} = 0,
\end{aligned} \tag{3.18}$$

где

$$h_{12}(u^{j+2}_m, v^{j+1}_{m+1}) = D_j(h_{12}(u^{j+1}_m, v^j_{m+1})) = h_{12}\left(u^{j+2}_m, \frac{u^{j+1}_m v^{j+1}_m v^j_{m+1} w^j_{m+1}}{v^j_m h_{12}(u^{j+1}_m, v^j_{m+1})h_{32}(w^j_{m+1}, v^{j+1}_m)}\right),$$

$$h_{32}(w^{j+1}_{m+1}, v^{j+2}_m) = D_j(h_{32}(w^j_{m+1}, v^{j+1}_m)) = h_{32}\left(\frac{h_{32}(w^j_{m+1}, v^{j+1}_m)w^{j+1}_m}{w^j_m}, v^{j+2}_m\right).$$

Заметим, что в уравнении (3.18) только функция $h_{12}(u^{j+2}_m, v^{j+1}_{m+1})$ содержит переменную $u^{j+2}_m$, аналогично только $h_{32}(w^{j+1}_{m+1}, v^{j+2}_m)$ содержит $v^{j+2}_m$. Следовательно, дифференцируя уравнение (3.18) по $u^{j+2}_m$ дважды и, соответственно, по $v^{j+2}_m$ дважды, получим следующие два уравнения на искомые функции:

$$\frac{\partial^2}{\partial\left(u^{j+2}_m\right)^2}h_{12}(u^{j+2}_m, v^{j+1}_{m+1}) = 0,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\left(v^{j+2}_m\right)^2}h_{32}(w^{j+1}_{m+1}, v^{j+2}_m) - \frac{2\left(\frac{\partial}{\partial v^{j+2}_m}h_{32}(w^{j+1}_{m+1}, v^{j+2}_m)\right)^2}{h_{32}(w^{j+1}_{m+1}, v^{j+2}_m)} + \frac{2}{v^{j+2}_m}\frac{\partial}{\partial v^{j+2}_m}h_{32}(w^{j+1}_{m+1}, v^{j+2}_m) = 0.$$

Подействуем оператором $D_j^{-1}$ на последние два уравнения. Тогда получим уравнения на неизвестные функции $h_{12}(u^{j+1}_m, v^j_{m+1})$ и $h_{32}(w^j_{m+1}, v^{j+1}_m)$. Откуда найдем

$$h_{12}(u^{j+1}_m, v^j_{m+1}) = h_{13}(v^j_{m+1})u^{j+1}_m + h_{14}(v^j_{m+1}),$$
$$h_{32}(w^j_{m+1}, v^{j+1}_m) = -\frac{v^{j+1}_m}{h_{33}(w^j_{m+1})v^{j+1}_m - h_{34}(w^j_{m+1})}.$$

Таким образом, искомые функции примут вид

$$\begin{aligned}
&h_1(u^j_m, u^j_{m+1}, u^{j+1}_m, v^j_{m+1}) = \frac{\left(h_{13}(v^j_{m+1})u^{j+1}_m + h_{14}(v^j_{m+1})\right)u^j_{m+1}}{u^j_m};\\
&h_2(v^j_m, v^j_{m+1}, v^{j+1}_m, w^j_{m+1}, u^{j+1}_m) = -\frac{u^{j+1}_m v^j_{m+1} w^j_{m+1}\left(h_{33}(w^j_{m+1})v^{j+1}_m - h_{34}(w^j_{m+1})\right)}{v^j_m\left(h_{13}(v^j_{m+1})u^{j+1}_m + h_{14}(v^j_{m+1})\right)};\\
&h_3(w^j_m, w^j_{m+1}, w^{j+1}_m, v^{j+1}_m) = -\frac{w^{j+1}_m v^{j+1}_m}{w^j_m\left(h_{33}(w^j_{m+1})v^{j+1}_m - h_{34}(w^j_{m+1})\right)}.
\end{aligned}\tag{3.19}$$

Перепишем уравнение (3.18) с учетом найденных функций и приравняем коэффициенты при независимых переменных $u^{j+2}_m$ и $v^{j+2}_m$. Соответственно получим следующие три уравнения

$$1)\quad h_{33}\left(-\frac{w^{j+1}_m v^{j+1}_m}{w^j_m\left(h_{33}(w^j_{m+1})v^{j+1}_m - h_{34}(w^j_{m+1})\right)}\right) - \frac{w^j_m\left(h_{33}(w^j_{m+1})v^{j+1}_m - h_{34}(w^j_{m+1})\right)}{v^{j+1}_m w^{j+1}_m} = 0,$$

$$\begin{aligned}
2)\quad & h_{13}\left(-\frac{u^{j+1}_m v^{j+1}_m v^j_{m+1} w^j_{m+1}\left(h_{33}(w^j_{m+1})v^{j+1}_m - h_{34}(w^j_{m+1})\right)}{v^j_m\left(h_{13}(v^j_{m+1})u^{j+1}_m + h_{14}(v^j_{m+1})\right)v^{j+1}_m}\right)v^{j+1}_m\\
&+ h_{34}\left(-\frac{w^{j+1}_m v^{j+1}_m}{w^j_m\left(h_{33}(w^j_{m+1})v^{j+1}_m - h_{34}(w^j_{m+1})\right)}\right)w^j_{m+1}\\
&- \left(h_{33}(w^j_{m+1})v^{j+1}_m - h_{34}(w^j_{m+1})\right)w^j_{m+1} = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3)\quad & h_{14}\left(-\frac{u^{j+1}_m v^{j+1}_m v^j_{m+1} w^j_{m+1}\left(h_{33}(w^j_{m+1})v^{j+1}_m - h_{34}(w^j_{m+1})\right)}{v^j_m\left(h_{13}(v^j_{m+1})u^{j+1}_m + h_{14}(v^j_{m+1})\right)v^{j+1}_m}\right)\\
&+ \frac{u^{j+1}_m w^j_{m+1}\left(h_{33}(w^j_{m+1})v^{j+1}_m - h_{34}(w^j_{m+1})\right)}{v^j_m}
\end{aligned}$$

$$-\frac{w^j_{m+1}\left(u^{j+1}_m\right)^2\left(h_{33}(w^j_{m+1})v^{j+1}_m-h_{34}(w^j_{m+1})\right)}{v^j_m\left(h_{13}(v^j_{m+1})u^{j+1}_m+h_{14}(v^j_{m+1})\right)}=0.$$

Сосредоточимся на втором уравнении этой тройки. Заметим, что только функция $h_{13}$ зависит от переменной $v^j_m$ и только $h_{34}$ от $w^j_m$. Следовательно, находим

$$h_{13}=C_1,\qquad h_{34}=C_2.$$

Тогда из того же уравнения найдем явный вид функции $h_{33}$

$$h_{33}=-\frac{C_1}{w^j_{m+1}}.$$

Анализ первого уравнения тройки приводит к равенству $C_1=1$. Теперь осталось рассмотреть третье уравнение, которое имеет вид

$$h_{14}\left(\frac{u^{j+1}_m v^j_{m+1}(C_2w^j_{m+1}+v^{j+1}_m)}{v^j_m(u^{j+1}_m+h_{14}(v^j_{m+1}))}\right)-\frac{u^{j+1}_m h_{14}(v^j_{m+1})(C_2w^j_{m+1}+v^{j+1}_m)}{v^j_m(u^{j+1}_m+h_{14}(v^j_{m+1}))}=0.$$

Дифференцируя это равенство по $w^j_{m+1}$ дважды и действуя на полученное уравнение оператором $D_j^{-1}$ найдем

$$h_{14}(v^j_{m+1})=C_3v^j_{m+1}.$$

В итоге находим, что искомые функции имеют вид

$$\begin{aligned}
h_1(u^j_m,u^j_{m+1},u^{j+1}_m,v^j_{m+1})&=\frac{u^j_{m+1}\left(u^{j+1}_m+C_3v^j_{m+1}\right)}{u^j_m},\\
h_2(v^j_m,v^j_{m+1},v^{j+1}_m,w^j_{m+1},u^{j+1}_m)&=\frac{u^{j+1}_m v^j_{m+1}\left(v^{j+1}_m+C_2w^j_{m+1}\right)}{v^j_m\left(u^{j+1}_m+C_3v^j_{m+1}\right)},\\
h_3(w^j_m,w^j_{m+1},w^{j+1}_m,v^{j+1}_m)&=\frac{w^{j+1}_m v^{j+1}_m w^j_{m+1}}{w^j_m\left(v^{j+1}_m+C_2w^j_{m+1}\right)}.
\end{aligned}\tag{3.20}$$

Теперь нам остается проверить третье уравнение системы (3.6), т.е. проверить, что функция $J_3$ является $m$–интегралом найденной системы (3.20). Непосредственным вычислением находим, что система (3.20) удовлетворяет третьему уравнению системы (3.6).

Таким образом, окончательно получаем систему уравнений

$$\begin{cases}
u^{j+1}_{m+1}=\dfrac{u^j_{m+1}\left(u^{j+1}_m+C_3v^j_{m+1}\right)}{u^j_m},\\
v^{j+1}_{m+1}=\dfrac{u^{j+1}_m v^j_{m+1}\left(v^{j+1}_m+C_2w^j_{m+1}\right)}{v^j_m\left(u^{j+1}_m+C_3v^j_{m+1}\right)},\\
w^{j+1}_{m+1}=\dfrac{w^{j+1}_m v^{j+1}_m w^j_{m+1}}{w^j_m\left(v^{j+1}_m+C_2w^j_{m+1}\right)}.
\end{cases}\tag{3.21}$$

Поскольку предполагается, что найденная система получается из цепочки вида (3.5), имеем

$$u^{j+1}_{n,m+1}=\frac{u^{j+1}_{n-1,m}u^j_{n,m+1}(Cu^j_{n+1,m+1}+u^{j+1}_{n,m})}{u^j_{n,m}(Cu^j_{n,m+1}+u^{j+1}_{n-1,m})},\tag{3.22}$$

Положим постоянную $C=-1$, поскольку ее можно удалить заменой $u^j_{n,m}=(-C)^{-m}v^j_{n,m}$. Тогда получим известную цепочку, а именно решеточную цепочку Тоды

$$u^{j+1}_{n,m+1}=\frac{u^{j+1}_{n-1,m}u^j_{n,m+1}(u^j_{n+1,m+1}-u^{j+1}_{n,m})}{u^j_{n,m}(u^j_{n,m+1}-u^{j+1}_{n-1,m})}.\tag{3.23}$$

Пара Лакса цепочки

$$\begin{cases} \psi_{n,m}^{j+1} = \dfrac{u_{n,m}^{j+1}}{u_{n,m}^{j}} \psi_{n,m}^{j} - \psi_{n+1,m}^{j}, \\ \psi_{n,m+1}^{j} = \psi_{n,m}^{j} - \dfrac{u_{n,m+1}^{j}}{u_{n-1,m}^{j}} \psi_{n-1,m}^{j}. \end{cases} \tag{3.24}$$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. В.Э. Адлер, С.Я. Старцев. *О дискретных аналогах уравнения Лиувилля* // Теор. мат. физ. **121**:2, 271–284 (1999).
2. Е.И. Ганжа, С.П. Царев. *Классические методы интегрирования гиперболических систем и уравнений второго порядка.* Сибирский федеральный университет, Красноярск, 2007.
3. А.В. Жибер, Р.Д. Муртазина, И.Т. Хабибуллин, А.Б. Шабат. *Характеристические кольца Ли и нелинейные интегрируемые уравнения.* Инст. комп. иссл. М.-Ижевск, 2012.
4. М.Н. Попцова, И.Т. Хабибуллин. *Алгебраические свойства квазилинейных двумеризованных цепочек, связанные с интегрируемостью* // Уфимск. мат. ж. **10**:3, 89–109 (2018).
5. Е.В. Ферапонтов. *Преобразования Лапласа систем гидродинамического типа в инвариантах Римана* // Теор. мат. физ. **110**:1, 86–97 (1997).
6. И.Т. Хабибуллин, М.Н. Кузнецова. *О классификационном алгоритме интегрируемых двумеризованных цепочек на основе алгебр Ли — Райнхарта* // Теор. мат. физ. **203**:1, 161–173 (2020).
7. И.Т. Хабибуллин, А.Р. Хакимова. *Интегрируемые дискретные системы* // Мат. сб. **217**:6 (2026) (в печати).
8. V.E. Adler. *The tangential map and associated integrable equations* // J. Phys. A Math. Theor. **42**:33, 332004 (2009).
9. E. Date, M. Jimbo, T. Miwa. *Method for generating discrete soliton equation. II* // J. Phys. Soc. Japan, **51**, 4125–4131 (1982).
10. E.V. Ferapontov, V.S. Novikov, I. Roustemoglou. *On the classification of discrete Hirota–type equations in 3D* // Int. Math. Res. Not. **2015**:13, 4933–4974 (2015).
11. I.T. Habibullin, M.N. Kuznetsova. *An algebraic criterion of the Darboux integrability of differential–difference equations and systems* // J. Phys. A Math. Theor. **54**:50, 505201 (2021).
12. I.T. Habibullin, A.R. Khakimova. *Characteristic Lie algebras of integrable differential–difference equations in 3D* // J. Phys. A Math. Theor. **54**:29, 295202 (2021).
13. I.T. Habibullin, A.R. Khakimova. *Nonlinear integrable lattices with three independent variables* // Уфим. мат. ж. **17**:2, 108–122 (2025).
14. M.N. Kuznetsova. *Classification of a subclass of quasilinear two-dimensional lattices by means of characteristic algebras* // Ufa Math. J. **11**:3, 109–131 (2019).
15. A.B. Shabat, R.I. Yamilov. *To a transformation theory of two-dimensional integrable systems* // Phys. Lett., A **227**:1-2, 15–23 (1997).



Айгуль Ринатовна Хакимова,
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия

Уфимский государственный нефтяной технический университет,
ул. Космонавтов, 1,
450064, г. Уфа, Россия
E-mail: aigul.khakimova@mail.ru