ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 18 № 1 (2026). С. 94-105.

УДК 517.5

НЕРАВЕНСТВА ТИПА КОЛМОГОРОВА ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ В КРУГЕ ФУНКЦИЙ

М.Ш. ШАБОЗОВ, Р.А. КАРИМЗОДА

Аннотация. В статье получен ряд неравенств типа Колмогорова для аналитических в круге произвольного радиуса R функций, принадлежащих пространству Харди $H_{q,R}$ ($1 \leqslant q \leqslant \infty$, $R > 0$), и даны некоторые их применения в экстремальных задачах наилучших полиномиальных приближения.

Ключевые слова: неравенства типа Колмогорова, наилучшее полиномиальное приближение, промежуточные производные, точная верхняя грань, пространство Харди.

Mathematics Subject Classification: 30E05, 30E10

1. Введение

С начала двадцатого века у многих великих математиков, таких как Э. Ландау, Ж. Адамар, Г. Харди, Дж. Литтльвуд, А.Н. Колмогоров, особый интерес вызывало получение точных неравенств для норм промежуточных производных функций посредством норму самой функции и нормы её старшей производной. Такие неравенства в современной математике принято называть неравенствами типа Колмогорова. Бурное развитие этой тематики связано с работами В.В. Арестова, С.Б. Стечкина, Л.В. Тайкова, В.Н. Габушина, В.М. Тихомирова, Н.П. Купцова, В.Н. Коновалова, Н.П. Корнейчука, В.Ф. Бабенко, Г.Г. Магарил-Ильяева, А.А. Лигуна, С.А. Пичугова и многих других. Подробное изложение как современных, так и более ранних результатов приведено в сравнительно недавно вышедшей из печати монографии В.Ф. Бабенко, Н.П. Корнейчука, В.А. Кофанова, С.А. Пичугова [2]. Для функции двух переменных неравенства типа Колмогорова доказаны в недавно опубликованных работах С.Б. Вакарчука [3], С.Б. Вакарчука и М.Б. Вакарчука [4], [5] и М.Ш. Шабозова с учениками [9], [10].

По нашему мнению, большой интерес представляет нахождение неравенств типа Колмогорова для аналитических в произвольном круге радиуса R функций, где по сравнению с функций действительного переменного, получено не так много окончательных результатов (см., например, работы [3]–[5], [8]–[10], [12] и приведенную в них литературу).

В настоящей работе доказан ряд неравенств типа Колмогорова для аналитических в произвольном круге функций, принадлежащих пространствам Харди H_q, $1 \leqslant q \leqslant \infty$.

Введём необходимые обозначения и понятия. Пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ — соответственно множество натуральных, целых неотрицательных, положительных, вещественных и комплексных чисел. Пусть

$$U_R := \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$$

— круг произвольного радиуса R в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $A(U_R)$ — множество аналитических в круге U_R функций. Для произвольной функции $f \in A(U_R)$ при $0 < \rho \leqslant R$

M.Sh. Shabozov, R.A. Karimzoda, Kolmogorov type inequalities for functions analytic in circle.

Поступила 28 сентября 2024 г.

положим

$$M_q(f,\rho) := \begin{cases} \left(\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} |f(\rho e^{it})|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} & \text{если} \quad 1 \leqslant q < \infty, \\ \max\{|f(\rho e^{it})| : 0 \leqslant t < 2\pi\} & \text{если} \quad q = \infty, \end{cases}$$

где интеграл понимается в смысле Лебега.

Символом $H_{q,R}$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, $R > 0$ обозначим банахово пространство Харди, состоящее из функций $f \in A(U_R)$, для которых конечна норма

$$\|f\|_{H_{q,R}} := \lim_{\rho \to R-0} M_q(f,\rho). \tag{1.1}$$

Хорошо известно [6, с. 279], что норма (1.1) реализуется на угловых граничных значениях $f(Re^{it})$ функции $f \in H_{q,R}$:

$$\|f\|_{H_{q,R}} := \begin{cases} \left(\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} |f(Re^{it})|^q \, dt\right)^{\frac{1}{q}} & \text{если} \quad 1 \leqslant q < \infty, \\ \operatorname{ess\,sup}\{|f(Re^{it})| : 0 \leqslant t < 2\pi\} & \text{если} \quad q = \infty. \end{cases}$$

В случае $R = 1$ полагаем $U := U_1$, $H_q := H_{q,1}$.

Обозначим через $H_{q,\rho}$, $0 < \rho \leqslant R$ пространство Харди функций $f \in A(U_\rho)$, для которых

$$\|f(z)\|_{H_{q,\rho}} := \|f(\rho z)\|_{H_q} = \|f(\rho e^{i(\cdot)})\|_{L_q[0,2\pi]} = M_q(f,\rho) < \infty.$$

Производную r-го порядка функции $f(z)$ по аргументу z комплексного переменного $z = \rho e^{it}$ обозначим через $f_a^{(r)}(z)$. Очевидно, что

$$f_a^{(1)}(z) = \frac{\partial f(\rho e^{it})}{\partial t} = f'(z)zi$$

и для $r \geqslant 2$ ($r \in \mathbb{N}$) полагаем

$$f_a^{(r)}(z) := \{f_a^{(r-1)}(z)\}_a^{(1)}.$$

Символом $H_{q,R,a}^{(r)}$ обозначим класс функций $f \in A(U_R)$, у которых $f_a^{(r)} \in H_{q,R}$, то есть

$$H_{q,R,a}^{(r)} := \left\{f \in A(U_R) : \|f_a^{(r)}\|_{q,R} = \|f_a^{(r)}(R\,\cdot)\|_q < \infty\right\}, \quad r \in \mathbb{N}.$$

Аналогичным образом для обычной производной r-го порядка по переменной z функции $f \in A(U_R)$ с рядом Тейлора

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) z^k, \tag{1.2}$$

полагаем

$$f^{(r)}(z) := \frac{d^r f}{dz} = \sum_{k=r}^{\infty} \alpha_{k,r} c_k(f) z^{k-r},$$

где

$$\alpha_{k,r} := k(k-1)\cdots(k-r+1), \quad k \geqslant r, \quad k \in \mathbb{N}, \quad r \in \mathbb{Z}_+, \quad \alpha_{k,0} := 1, \quad \alpha_{k,1} := k,$$

$c_k(f)$ — коэффициенты ряда Тейлора функции f. В дальнейшем полагаем

$$H_{q,R}^{(r)} := \left\{f \in A(U_R) : \|f^{(r)}\|_{q,R} = \|f^{(r)}(R\,\cdot)\|_q < \infty\right\}, \quad r \in \mathbb{N}.$$

2. Неравенство типа Колмогорова для классов функций $H^{(r)}_{q,R,a}$ и $H^{(r)}_{q,R}$ $(r \in \mathbb{N}, \quad 1 \leqslant q \leqslant \infty)$

В этом пункте мы докажем неравенство типа Колмогорова для классов функций $H^{(r)}_{q,R,a}$ и $H^{(r)}_{q,R}$ при любых $r \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$. Выше мы отметили, что норма функций $f \in H_{q,R}$ реализуется на её угловых граничных значениях $f(Re^{it}) \in L_q$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, которые существуют почти для всех значений $t \in [0, 2\pi)$. Если при этом $1 \leqslant p \leqslant q$, то справедливо включение $H_{q,R} \subset H_{p,R}$ при любом $R > 0$. Из результата работы К.И. Бабенко [1] в качестве следствие вытекает, что $H^{(r)}_{q,R,a} \subset H_{q,R}$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$. Исходя из этого для произвольной функции $f \in H^{(r)}_{q,R,a}$ при $q \geqslant 2$ имеем $f^{(r)}_a \in H_{q,R} \subset H_{2,R}$. Используя разложение функции f в круге U_R в ряд Тейлора (1.2), производную r-го порядка $f^{(r)}_a(z)$ представим в виде

$$f^{(r)}_a(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (ik)^r c_k(f) z^k.$$

Поскольку, как следует из вышеизложенного, для функции $f \in H^{(r)}_{q,R,a}$ норма её r–й производной

$$f^{(r)}_a(Re^{it}) = \sum_{k=1}^{\infty} (ik)^r c_k(f) (Re^{it})^k$$

конечна в пространстве $H_{2,R}$:

$$\|f^{(r)}_a\|^2_{H_{2,R}} = \sum_{k=1}^{\infty} k^{2r} |c_k(f)|^2 R^{2k} < \infty, \tag{2.1}$$

то, в силу формулы (2.1), конечными в этом пространстве будут и нормы всех её промежуточных производных $f^{(r-\nu)}_a(z)$, $\nu = \overline{1, r-1}$. Отсюда, в частности, следует принадлежность указанных производных пространству Харди $H_{p,R}$, $1 \leqslant p \leqslant 2$, то есть справедливы соотношения

$$H^{(r)}_{q,R,a} \subset H^{(r-\nu)}_{p,R,a},$$

где $1 \leqslant p \leqslant 2 \leqslant q$, $\nu = \overline{1, r}$, $H^{(0)}_{p,R} \equiv H_{p,R}$. Имеет место следующая

Теорема 2.1. *Пусть $\nu, r \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant \nu \leqslant r$, $0 < \rho \leqslant R$ и $1 \leqslant p \leqslant 2 \leqslant s, t \leqslant q$. Тогда для любой функции $f \in H^{(r)}_{q,R,a}$ имеет место неравенство типа Колмогорова*

$$\|f^{(r-\nu)}_a\|_{H_{p,\rho}} \leqslant \frac{\rho}{R} \|f\|^{\frac{\nu}{r}}_{H_{s,R}} \|f^{(r)}_a\|^{1-\frac{\nu}{r}}_{H_{t,R}}. \tag{2.2}$$

Неравенство (2.2) является точным в том смысле, что существует функция $g \in H^{(r)}_{q,R,a}$, обращающая его в равенство.

Доказательство. Поскольку при $\nu = r$ неравенство (2.2) очевидно, полагаем, что $1 \leqslant \nu \leqslant r-1$. Пусть функция $f \in H^{(r)}_{q,R,a}$. Тогда для её производной $(r-\nu)$–го порядка справедливо соотношение

$$f^{(r-\nu)}_a(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (ik)^{r-\nu} c_k(f) z^k, \tag{2.3}$$

и в силу равенства Парсеваля для норм функций f и $f^{(r-\nu)}$ из (1.2) и (2.3) имеем

$$\|f\|^2_{H_{2,R}} = \sum_{k=0}^{\infty} |c_k(f)|^2 R^{2k}, \tag{2.4}$$

$$\|f_a^{(r-\nu)}\|^2_{H_{2,R}} = \sum_{k=1}^{\infty} k^{2(r-\nu)} |c_k(f)|^2 R^{2k}.$$

В произвольной точке $z \in U_R$, $|z| = \rho$, $0 < \rho \leqslant R$ для норм $f_a^{(r-\nu)}(z)$ запишем

$$\|f_a^{(r-\nu)}\|^2_{H_{2,\rho}} = \sum_{k=1}^{\infty} k^{2(r-\nu)} |c_k(f)|^2 \rho^{2k}. \tag{2.5}$$

Равенство (2.5) представим в следующем виде

$$\begin{aligned} \|f_a^{(r-\nu)}\|^2_{H_{2,\rho}} &= \sum_{k=1}^{\infty} k^{2(r-\nu)} |c_k(f)|^2 R^{2k} \left(\frac{\rho}{R}\right)^{2k} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(|c_k(f)|^2 R^{2k}\right)^{\frac{\nu}{r}} \left(k^{2r} |c_k(f)|^2 R^{2k}\right)^{1-\frac{\nu}{r}} \left(\frac{\rho}{R}\right)^{2k} \\ &\leqslant \max_{k\geqslant 1} \left(\frac{\rho}{R}\right)^{2k} \sum_{k=1}^{\infty} \left(|c_k(f)|^2 R^{2k}\right)^{\frac{\nu}{r}} \left(k^{2r} |c_k(f)|^2 R^{2k}\right)^{1-\frac{\nu}{r}}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Применяя к сумме в правой части (2.6) неравенство Гельдера для рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k^{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}, \tag{2.7}$$

где $a_k, b_k \geqslant 0$, $\alpha > 1$, $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$, полагая в нашем случае $\alpha := \frac{r}{\nu}$, $\beta := \frac{r}{(r-\nu)}$ с учётом формул (2.4), (2.1) и соотношения

$$\max_{k\geqslant 1} \left(\frac{\rho}{R}\right)^{2k} = \left(\frac{\rho}{R}\right)^2,$$

получаем

$$\|f_a^{(r-\nu)}\|^2_{H_{2,\rho}} \leqslant \left(\frac{\rho}{R}\right)^2 \|f\|^{2\frac{\nu}{r}}_{H_{2,R}} \|f_a^{(r)}\|^{2(1-\frac{\nu}{r})}_{H_{2,R}}$$

или что тоже

$$\|f_a^{(r-\nu)}\|_{H_{2,\rho}} \leqslant \frac{\rho}{R} \|f\|^{\frac{\nu}{r}}_{H_{2,R}} \|f_a^{(r)}\|^{1-\frac{\nu}{r}}_{H_{2,R}}. \tag{2.8}$$

Учитывая принадлежность промежуточной производной $f_a^{(r-\nu)}$ функции $f \in H^{(r)}_{q,R,a}$ $q \geqslant 2$ пространству $H_{p,R}$, $1 \leqslant p \leqslant 2$ и справедливость соотношений $f \in H_{s,R}$, $f_a^{(r)} \in H_{t,R}$, где $2 \leqslant s, t \leqslant q$, а также специфику определения нормы в пространстве Харди, получаем

$$\|f_a^{(r-\nu)}\|_{H_{p,\rho}} \leqslant \|f_a^{(r-\nu)}\|_{H_{2,\rho}}, \qquad 0 < \rho \leqslant R, \qquad 1 \leqslant p \leqslant 2. \tag{2.9}$$

Кроме того, поскольку $f \in H_{2,R}$, при $1 \leqslant p \leqslant 2 \leqslant s, t \leqslant q$

$$H_{2,R} \subset H_{s,R}, \qquad H^{(r)}_{2,R,a} \subset H^{(r)}_{t,R,a},$$

и выполняются неравенства

$$\|f\|_{H_{2,R}} \leqslant \|f\|_{H_{s,R}}, \qquad \|f_a^{(r)}\|_{H_{2,R}} \leqslant \|f_a^{(r)}\|_{H_{t,R}}. \tag{2.10}$$

Учитывая неравенства (2.9) и (2.10) из (2.8) будем иметь

$$\|f_a^{(r-\nu)}\|_{H_{p,\rho}} \leqslant \frac{\rho}{R} \|f\|^{\frac{\nu}{r}}_{H_{s,R}} \|f_a^{(r)}\|^{1-\frac{\nu}{r}}_{H_{t,R}}$$

и таким образом неравенство (2.2) доказано.

Докажем точность неравенства (2.2), например, для экстремальной функции $g(z) = az \in H^{(r)}_{q,R,a}$. Для этой функции

$$\|g\|_{H_{s,R}} = |a|R, \qquad \|g_a^{(r-\nu)}\|_{H_{p,\rho}} = |a|\rho, \qquad \|g_a^{(r)}\|_{H_{t,R}} = |a|R.$$

Пользуясь этими значениями норм, получаем

$$\frac{\rho}{R}\|g\|^{\frac{\nu}{r}}_{H_{s,R}}\|g_a^{(r)}\|^{1-\frac{\nu}{r}}_{H_{t,R}} = \frac{\rho}{R}(|a|R)^{\frac{\nu}{r}}(|a|R)^{1-\frac{\nu}{r}} = |a|\rho = \|g_a^{(r-\nu)}\|_{H_{p,\rho}},$$

откуда и следует точность (2.2) и теорема 2.1 полностью доказана. □

Из теоремы 2.1 вытекает

Следствие 2.1. *В условиях теоремы 2.1 при $\rho = R$ справедливо неравенство*

$$\|f_a^{(r-\nu)}\|_{H_{p,R}} \leqslant \|f\|^{\frac{\nu}{r}}_{H_{s,R}}\|f_a^{(r)}\|^{1-\frac{\nu}{r}}_{H_{t,R}}.$$

Теорема 2.2. *Пусть $\nu, r \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant \nu \leqslant r$, $0 < \rho \leqslant R$ и $1 \leqslant p \leqslant 2 \leqslant s, t \leqslant q$. Тогда для любой функции $f \in H^{(r)}_{q,R}$, у которой коэффициенты Тейлора $c_k(f) = 0$, $k = \overline{r-\nu, r-1}$, имеет место неравенство*

$$\|f^{(r-\nu)}\|_{H_{p,\rho}} \leqslant \left(\frac{\rho}{R}\right)^r \frac{\alpha_{r,r-\nu}}{\alpha_{r,r}^{1-\frac{\nu}{r}}}\|f\|^{\frac{\nu}{r}}_{H_{s,R}}\|f^{(r)}\|^{1-\frac{\nu}{r}}_{H_{t,R}}, \tag{2.11}$$

которое обращается в равенство для функции $g_1(z) = az^r$, $a \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Используя разложение функции $f \in A(U_R)$ в ряд Тейлора (1.2), для производной r-го порядка $f^{(r)}(z)$ запишем

$$f^{(r)}(z) = \sum_{k=r}^{\infty}\alpha_{k,r}c_k(f)z^{k-r},$$

где $\alpha_{k,r} := k(k-1)\cdots(k-r+1)$, $k \geqslant r$, $k, r \in \mathbb{N}$. Поскольку для произвольной функции $f \in H^{(r)}_{q,R}$ норма её r–й производной

$$\|f^{(r)}\|^2_{H_{2,R}} = \sum_{k=r}^{\infty}\alpha^2_{k,r}|c_k(f)|^2R^{2(k-r)} \tag{2.12}$$

конечна в пространстве $H_{2,R}$, то в силу (2.12) и представления величин $\alpha_{k,r}$, конечными в этом пространстве будут и нормы всех её промежуточных производных $f^{(r-\nu)}(z)$ $(\nu = \overline{1, r-1})$. Отсюда, в частности, следует, что $f^{(r-\nu)}(z) \in H^{(r)}_{p,R}$ $(1 \leqslant p \leqslant 2)$ и имеет место включение $H^{(r)}_{q,R} \subset H^{(r-\nu)}_{p,R}$, где $1 \leqslant p \leqslant 2 \leqslant q$, $\nu = \overline{1, r}$.

Пусть теперь функция $f \in H^{(r)}_{q,R}$ и удовлетворяет условию теоремы 2.2 относительно коэффициентов $c_k(f)$. Тогда для её производной $(r-\nu)$–го порядка имеет место разложение в ряд Тейлора

$$f^{(r-\nu)}(z) = \sum_{k=r}^{\infty}\alpha_{k,r-\nu}c_k(f)z^{k-r+\nu}$$

и в силу уравнения замкнутости

$$\|f^{(r-\nu)}\|^2_{H_{2,\rho}} = \sum_{k=r}^{\infty}\alpha^2_{k,r-\nu}|c_k(f)|^2\rho^{2(k-r+\nu)},$$

которое представим в виде

$$\begin{aligned} \|f^{(r-\nu)}\|^2_{H_{2,R}} &= \sum_{k=r}^{\infty} \left(\alpha^2_{k,r}|c_k(f)|^2R^{2(k-r)}\right)^{1-\frac{\nu}{r}} \left(|c_k(f)|^2R^{2k}\right)^{\frac{\nu}{r}} \left(\frac{\rho}{R}\right)^{2(k-r+\nu)} \left(\frac{\alpha_{k,r-\nu}}{\alpha^{1-\frac{\nu}{r}}_{k,r}}\right)^2 \\ &\leqslant \max_{k\geqslant r}\left(\left(\frac{\rho}{R}\right)^{2(k-r+\nu)}\left(\frac{\alpha_{k,r-\nu}}{\alpha^{1-\frac{\nu}{r}}_{k,r}}\right)^2\right) \sum_{k=r}^{\infty}\left(|c_k(f)|^2R^{2k}\right)^{\frac{\nu}{r}} \left(\alpha^2_{k,r}|c_k(f)|^2R^{2(k-r)}\right)^{1-\frac{\nu}{r}}. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Из результата работы [5] вытекает, что

$$\max_{k\geqslant r}\left\{\left(\frac{\rho}{R}\right)^{2(k-r+\nu)}\left[\frac{\alpha_{k,r-\nu}}{\alpha^{1-\frac{\nu}{r}}_{k,r}}\right]^2\right\} = \left(\frac{\rho}{R}\right)^{2\nu}\left[\frac{\alpha_{r,r-\nu}}{\alpha^{1-\frac{\nu}{r}}_{r,r}}\right]. \tag{2.14}$$

Применяя как и в предыдущей теореме неравенство Гельдера (2.7) к правой части (2.13) с учетом (2.14), имеем

$$\begin{aligned} \|f^{(r-\nu)}\|^2_{H_{2,\rho}} &\leqslant \left(\frac{\rho}{R}\right)^{2\nu}\frac{\alpha^2_{r,r-\nu}}{\alpha^{2(1-\frac{\nu}{r})}_{r,r}}\left(\sum_{k=r}^{\infty}|c_k(f)|^2R^{2k}\right)^{\frac{\nu}{r}}\left(\sum_{k=r}^{\infty}\alpha^2_{k,r}|c_k(f)|^2R^{2(k-r)}\right)^{1-\frac{\nu}{r}} \\ &= \left(\frac{\rho}{R}\right)^{2\nu}\frac{\alpha^2_{r,r-\nu}}{\alpha^{2(1-\frac{\nu}{r})}_{r,r}}\|f\|^{2\frac{\nu}{r}}_{H_{2,R}}\|f^{(r)}\|^{2(1-\frac{\nu}{r})}_{H_{2,R}}. \end{aligned}$$

Далее в силу тех же соображений, которые мы излагали в ходе доказательства теоремы 2.1, имеем

$$\begin{aligned} &\|f^{(r-\nu)}\|_{H_{p,\rho}} \leqslant \|f^{(r-\nu)}\|_{H_{2,\rho}}, \qquad 1\leqslant p\leqslant 2, \quad 0<\rho\leqslant R, \\ &\|f^{(r)}\|_{2,R} \leqslant \|f^{(r)}\|_{H_{t,R}}, \qquad \|f\|_{H_{2,R}} \leqslant \|f\|_{H_{s,R}}, \end{aligned}$$

используя которые получаем

$$\|f^{(r-\nu)}\|_{H_{p,\rho}} \leqslant \left(\frac{\rho}{R}\right)^{\nu}\frac{\alpha_{r,r-\nu}}{\alpha^{1-\frac{\nu}{r}}_{r,r}}\|f\|^{\frac{\nu}{r}}_{H_{s,R}}\|f^{(r)}\|^{1-\frac{\nu}{r}}_{H_{t,R}}$$

и неравенство (2.11) доказано.

Для функции $g_1(z) = az^r \in H^{(r)}_{q,R}$, $a\in\mathbb{C}$, $r\in\mathbb{N}$ неравенство (2.11) обращается в равенство. В самом деле, для g_1 получаем

$$\|g_1\|_{H_{s,R}} = |a|R^r, \qquad \|g_1^{(r)}\|_{H_{t,R}} = |a|\alpha_{r,r}, \qquad \|g_1^{(r-\nu)}\|_{H_{p,\rho}} = |a|\rho^{\nu}\alpha_{r,r-\nu}.$$

Подставляя значения этих норм в правую часть (2.11), будем иметь

$$\begin{aligned} \left(\frac{\rho}{R}\right)^{\nu}\frac{\alpha_{r,r-\nu}}{\alpha^{1-\frac{\nu}{r}}_{r,r}}\|g_1\|^{\frac{\nu}{r}}_{H_{s,R}}\|g_1^{(r)}\|^{1-\frac{\nu}{r}}_{H_{t,R}} &= \left(\frac{\rho}{R}\right)^{\nu}\frac{\alpha_{r,r-\nu}}{\alpha^{1-\frac{\nu}{r}}_{r,r}}\left(|a|R^r\right)^{\frac{\nu}{r}}\left(\alpha_{r,r}|a|\right)^{1-\frac{\nu}{r}} \\ &= |a|\left(\frac{\rho}{R}\right)^{\nu}\frac{\alpha_{r,r-\nu}}{\alpha^{1-\frac{\nu}{r}}_{r,r}}\alpha^{1-\frac{\nu}{r}}_{r,r}R^{\nu} = |a|\rho^{\nu}\alpha_{r,r-\nu} = \|g_1^{(r-\nu)}\|_{H_{p,R}}. \end{aligned}$$

Точность неравенства (2.11) доказана. Этим доказательство теоремы 2.2 завершается. □

Следствие 2.2. *В условиях теоремы 2.2 при $\rho = R$ имеет место неравенство*

$$\|f^{(r-\nu)}\|_{H_{p,R}} \leqslant \frac{\alpha_{r,r-\nu}}{\alpha^{1-\frac{\nu}{r}}_{r,r}}\|f\|^{\frac{\nu}{r}}_{H_{s,R}}\|f^{(r)}\|^{1-\frac{\nu}{r}}_{H_{t,R}} \tag{2.15}$$

и знак равенства реализуется для функции $g_1(z) = az^r$.

Замечание 2.1. *Неравенство (2.15) ранее при $p = s = t \equiv 2$, $R \equiv 1$ было доказано в [3], а в случае $1\leqslant p\leqslant 2\leqslant s,t\leqslant q$ и $R = 1$ доказано в [5].*

3. Неравенства типа Колмогорова для наилучших полиномиальных приближений аналитических функций классов $H^{(r)}_{q,R,a}$ и $H^{(r)}_{q,R}$, $r \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$

Рассмотрим некоторые приложения результатов, полученных в теоремах 2.1 и 2.2 пункта 2 к экстремальным задачам теории полиномиальных приближений аналитических в круге функций, принадлежащих классам $H^{(r)}_{q,R,a}$ и $H^{(r)}_{q,R}$ ($r \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$). Обозначим через $\mathcal{P}_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$ — подпространство алгебраических полиномов комплексного переменного z степени, не превышающей n.

Символом $E_{n-1}(f)_{q,\rho}$ ($n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, $0 < \rho \leqslant R$) обозначим величину наилучшего полиномиального приближения функции $f \in H_{q,\rho}$ элементами подпространства $\mathcal{P}_{n-1}$ в метрике пространства $H_{q,\rho}$:

$$E_{n-1}(f)_{q,\rho} := \inf\left\{\|f - p_{n-1}\|_{q,\rho} : p_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}\right\}.$$

Полином p^*_{n-1} для которого $E_{n-1}(f)_{q,\rho} = \|f - p^*_{n-1}\|_{q,\rho}$ называют полиномом наилучшего приближения функции $f \in H_{q,\rho}$. В случае $q = 2$ полином наилучшего приближения p^*_{n-1} совпадает с частной суммой $(n-1)$–го порядка

$$T_{n-1}(f, z) := \sum_{k=0}^{n-1} c_k(f) z^k$$

ряда Тейлора функции $f \in H_{2,R}$. При этом

$$E_{n-1}(f)_{2,\rho} = \|f - T_{n-1}(f)\|_{2,\rho} = \left\{\sum_{k=n}^{\infty} |c_k(f)|^2 \rho^{2k}\right\}. \tag{3.1}$$

Теорема 3.1. *Пусть $\nu, r \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant \nu \leqslant r$, $1 \leqslant p \leqslant 2 \leqslant s, t \leqslant q$, $0 < \rho \leqslant R$. Тогда для любой функции $f \in H^{(r)}_{q,R} \cap H^{(r)}_{q,R,a}$ и любого $n \in \mathbb{N}$ выполняются неравенства*

$$E_{n-r+\nu-1}(f^{(r-\nu)})_{p,\rho} \leqslant \left(\frac{\rho}{R}\right)^{n-r+\nu} \frac{\alpha_{n,r-\nu}}{\alpha_{n,r}^{1-\frac{\nu}{r}}} \left(E_{n-1}(f)_{s,R}\right)^{\frac{\nu}{r}} \left(E_{n-r+1}(f^{(r)})_{t,R}\right)^{1-\frac{\nu}{r}}, \quad n > r, \tag{3.2}$$

$$E_{n-1}(f_a^{(r-\nu)})_{p,\rho} \leqslant \left(\frac{\rho}{R}\right)^{n} \left(E_{n-1}(f)_{s,R}\right)^{\frac{\nu}{r}} \left(E_{n-1}(f_a^{(r)})_{t,R}\right)^{1-\frac{\nu}{r}}, \tag{3.3}$$

где $f^{(0)} = f_a^{(0)} \equiv f$, которые являются точными в указанном ранее смысле.

Доказательство. Равенства (3.2) и (3.3) доказываются по одной и той же схеме рассуждений, поэтому приводим доказательство (3.2). Рассмотрим произвольную функцию $f \in A(U_R)$ с рядом Тейлора (1.2), принадлежащую множеству $H_{q,R}$, $q \geqslant 2$ и обозначим

$$r_n(f, z) := f(z) - T_{n-1}(f, z) = \sum_{k=n}^{\infty} c_k(f) z^k. \tag{3.4}$$

Ясно, что $r_n(f) \in H^{(r)}_{q,R}$ и поскольку по условию теоремы функция $f \in H_{q,R}$, в силу равенств (3.1) и (3.4)

$$E_{n-1}(f)_{2,R} = \|r_n(f)\|_{2,R}. \tag{3.5}$$

Пусть теперь $\nu \in [0, n-1]$ — произвольное натуральное число. Непосредственным вычислением производной ν-го порядка убедимся в справедливости равенства

$$T^{(\nu)}_{n-1}(f, z) = T_{n-\nu-1}(f^{(\nu)}, z), \tag{3.6}$$

где $T_{n-1}^{(0)}(f,z) \equiv T_{n-1}(f,z)$. В силу равенств (3.4) из (3.6) для $n \geqslant r \geqslant \nu \geqslant 1$ получаем

$$\begin{aligned} r_n^{(r-\nu)}(f,z) &= \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,r-\nu} c_k(f) z^{k-r+\nu} \\ &= f^{(r-\nu)}(z) - T_{n-r+\nu-1}(f^{(r-\nu)}, z) = r_{n-r+\nu}(f^{(r-\nu)}, z). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Учитывая равенство (3.5) из (3.7) получаем

$$\|r_n^{(r-\nu)}(f)\|_{2,R} = E_{n-r+\nu-1}(f^{(r-\nu)})_{2,R}, \tag{3.8}$$

$$\|r_n^{(r)}(f)\|_{2,R} = E_{n-r-1}(f^{(r)})_{2,R}. \tag{3.9}$$

Применяя схему доказательства теоремы 2.2 при $p = s = t = 2$ с учетом формул (3.5), (3.8) и (3.9), после некоторых простых вычислений получаем

$$E_{n-r+\nu-1}(f^{(r-\nu)})_{2,\rho} \leqslant \left(\frac{\rho}{R}\right)^{n-r+\nu} \frac{\alpha_{n,r-\nu}}{\alpha_{n,r}^{1-\frac{\nu}{r}}} \left(E_{n-1}(f)_{2,R}\right)^{\frac{\nu}{r}} \left(E_{n-r+1}(f^{(r)})_{2,R}\right)^{1-\frac{\nu}{r}}.$$

Из определения величины наилучшего полиномиального приближения функций $f \in H_{q,R}$ при $1 \leqslant p \leqslant q$ имеем

$$E_{n-1}(f)_{p,R} \leqslant E_{n-1}(f)_{q,R}.$$

Учитывая соотношение $H_{q,R}^{(r)} \subset H_{p,R}^{(r-\nu)}$, $1 \leqslant p \leqslant 2 \leqslant q$ и вытекающее отсюда неравенство

$$E_{n-1}(f)_{2,R} \leqslant E_{n-1}(f)_{s,R}, \qquad s,t \leqslant q,$$

запишем

$$\begin{aligned} &E_{n-r+\nu-1}(f^{(r-\nu)})_{p,\rho} \leqslant E_{n-r+\nu-1}(f^{(r-\nu)})_{2,\rho}, \\ &E_{n-r-1}(f^{(r)})_{2,R} \leqslant E_{n-r-1}(f^{(r)})_{t,R}, \quad t \geqslant 2, \end{aligned}$$

пользуясь которыми сразу получаем неравенство (3.2).

Для функции $g_2(z) = az^n \in H_{q,R}^{(r)}$, $a \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > r$ неравенство (3.2) обращается в равенство. Получим

$$\begin{aligned} &g_2^{(r-\nu)}(z) = a\alpha_{n,r-\nu} z^{n-r+\nu}, \\ &g_2^{(r)}(z) = a\alpha_{n,r} z^{n-r}, \\ &E_{n-1}(g_2)_{s,R} = |a|R^n, \\ &E_{n-r+\nu-1}(g_2^{(r-\nu)})_{p,\rho} = |a|\alpha_{n,r-\nu}\rho^{n-r+\nu}, \\ &E_{n-r-1}(g_2^{(r)})_{t,R} = |a|\alpha_{n,r} R^{n-r}. \end{aligned}$$

Подставляя полученные величины наилучших полиномиальных приближений в неравенство (3.2), убеждаемся в том, что оно обращается в равенство и тем самым является неулучшаемым в указанном ранее смысле. В самом деле, имеем

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\rho}{R}\right)^{n-r+\nu} \frac{\alpha_{n,r-\nu}}{\alpha_{n,r}^{1-\frac{\nu}{r}}} \left(E_{n-1}(g_2)_{s,R}\right)^{\frac{\nu}{r}} \left(E_{n-r-1}(g_2^{(r)})_{t,R}\right)^{1-\frac{\nu}{r}} \\ &= \left(\frac{\rho}{R}\right)^{n-r+\nu} \frac{\alpha_{n,r-\nu}}{\alpha_{n,r}^{1-\frac{\nu}{r}}} \left(|a|R^n\right)^{\frac{\nu}{r}} \left(|a|\alpha_{n,r}R^{n-r}\right)^{1-\frac{\nu}{r}} \\ &= \left(\frac{\rho}{R}\right)^{n-r+\nu} \frac{\alpha_{n,r-\nu}}{\alpha_{n,r}^{1-\frac{\nu}{r}}} |a|\, R^{n\frac{\nu}{r}+n-r-(n-r)\frac{\nu}{r}} \alpha_{n,r}^{1-\frac{\nu}{r}} \\ &= \rho^{n-r+\nu}|a|\alpha_{n,r-\nu} = E_{n-r+\nu-1}(g_2^{(r-\nu)})_{p,\rho}, \end{aligned}$$

чем и завершаем доказательство теоремы 3.1. □

Следствие 3.1. *В условиях теоремы 3.1 при $\rho = R$ справедливы неравенства*

$$E_{n-r+\nu-1}(f^{(r-\nu)})_{p,R} \leqslant \frac{\alpha_{n,r-\nu}}{\alpha_{n,r}^{1-\frac{\nu}{r}}}(E_{n-1}(f)_{s,R})^{\frac{\nu}{r}}\left(E_{n-r-1}(f^{(r)})_{t,R}\right)^{1-\frac{\nu}{r}}, \qquad (3.10)$$

$$E_{n-1}(f_a^{(r-\nu)})_{p,R} \leqslant (E_{n-1}(f)_{s,R})^{\frac{\nu}{r}}\left(E_{n-1}(f_a^{(r)})_{t,R}\right)^{1-\frac{\nu}{r}}.$$

Отметим, что неравенство (3.10) ранее при $R = 1$ доказано в работе [5, с. 1590, неравенство (35)]. Очевидно, что доказанные неравенства (3.2) и (3.3) можно записать в несколько упрощённой форме

$$E_{n-\nu-1}(f^{(\nu)})_{p,\rho} \leqslant \left(\frac{\rho}{R}\right)^{n-\nu}\frac{\alpha_{n,\nu}}{\alpha_{n,r}^{\frac{\nu}{r}}}(E_{n-1}(f)_{s,R})^{1-\frac{\nu}{r}}\left(E_{n-r-1}(f^{(r)})_{t,R}\right)^{\frac{\nu}{r}}, \qquad (3.11)$$

$$E_{n-\nu-1}(f_a^{(\nu)})_{p,\rho} \leqslant \left(\frac{\rho}{R}\right)^{n}(E_{n-1}(f)_{s,R})^{1-\frac{\nu}{r}}\left(E_{n-1}(f_a^{(r)})\right)^{\frac{\nu}{r}}. \qquad (3.12)$$

Неравенства (3.11) и (3.12) позволяют более проще решать некоторые экстремальные задачи теории приближения.

Через $W_{q,R}^{(r)}(W_{q,R,a}^{(r)})$ обозначим класс функций $f \in H_{q,R}^{(r)}$ ($f \in H_{q,R,a}^{(r)}$), для которых $\|f^{(r)}\|_{q,R} \leqslant 1$, ($\|f_a^{(r)}\|_{q,R} \leqslant 1$). Рассмотрим следующую экстремальную задачу: требуется найти точные значения величин

$$\sup\left\{E_{n-\nu-1}(f^{(\nu)})_{p,\rho} : f \in W_{q,R}^{(r)}\right\}, \qquad n \geqslant r \geqslant \nu \geqslant 1, \qquad p \leqslant 2 \leqslant q, \qquad (3.13)$$

$$\sup\left\{E_{n-1}(f_a^{(\nu)})_{p,\rho} : f \in W_{q,R,a}^{(r)}\right\}, \qquad n \in \mathbb{N}, \qquad p \leqslant 2 \leqslant q. \qquad (3.14)$$

Величины (3.13) и (3.14) определяют точные верхние грани наилучших полиномиальных приближений промежуточных производных $f^{(\nu)}$ ($f_a^{(\nu)}$), $1 \leqslant \nu \leqslant r$, соответственно на классах $W_{q,R}^{(r)}$ и $W_{q,R,a}^{(r)}$ в метрике пространства Харди $H_{p,\rho}$, где $1 \leqslant p \leqslant 2 \leqslant q$, $0 < \rho \leqslant R$.

Приведенные ниже теоремы касаются вычисления указанных величин.

Теорема 3.2. *Пусть $n, r, \nu \in \mathbb{N}$ удовлетворяют соотношениям $n \geqslant r \geqslant \nu \geqslant 1$, $1 \leqslant p \leqslant 2 \leqslant q$, и $0 < \rho \leqslant R$, $R \geqslant 1$. Тогда имеет место равенство*

$$\begin{aligned}&\sup\left\{E_{n-\nu-1}(f^{(\nu)})_{p,\rho} : f \in W_{q,R}^{(r)}\right\}\\ &= \left(\frac{\rho}{R}\right)^{n-\nu}\frac{\alpha_{n,\nu}}{\alpha_{n,r}} := \left(\frac{\rho}{R}\right)^{n-\nu}\frac{1}{(n-\nu)\cdots(n-r+1)}.\end{aligned} \qquad (3.15)$$

Доказательство. Для произвольной функции $f \in H_{q,R}^{(r)}$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, $r \in \mathbb{Z}_+$ имеет место неравенство [7, с. 157], [11, с. 287]:

$$E_{n-1}(f)_{q,R} \leqslant \frac{1}{\alpha_{n,r}}E_{n-r-1}(f^{(r)})_{q,R}.$$

Используя неравенство Гельдера легко убедиться в справедливости включения $W_{q,R}^{(r)} \subset W_{s,R}^{(r)}$ при $2 \leqslant s \leqslant q$. Следовательно,

$$E_{n-1}(f)_{s,R} \leqslant E_{n-1}(f)_{q,R} \leqslant \frac{1}{\alpha_{n,r}}E_{n-r-1}(f^{(r)})_{q,R} \leqslant \frac{1}{\alpha_{n,r}}\|f^{(r)}\|_{q,R} \leqslant \frac{1}{\alpha_{n,r}}. \qquad (3.16)$$

Для функции $f \in W_{q,R}^{(r)}$ при $1 \leqslant p \leqslant 2 \leqslant t \leqslant q$ на основании неравенства

$$E_{n-r-1}(f^{(r)})_{p,R} \leqslant E_{n-r-1}(f^{(r)})_{q,R}, \qquad (3.17)$$

при $p = t$ имеем

$$E_{n-r-1}(f^{(r)})_{t,R} \leqslant E_{n-r-1}(f^{(r)})_{q,R} \leqslant \|f^{(r)}\|_{q,R} \leqslant 1. \qquad (3.18)$$

Тогда для произвольной функции $f \in W^{(r)}_{q,R}$ с учётом формул (3.16), (3.18) и включения $H^{(r)}_{q,R} \subset H^{(\nu)}_{p,R}$, где $1 \leqslant \nu \leqslant r$, $1 \leqslant p \leqslant 2 \leqslant q$, из неравенства (3.11) получаем

$$E_{n-\nu-1}(f^{(\nu)})_{p,R} \leqslant \left(\frac{\rho}{R}\right)^{n-\nu} \frac{\alpha_{n,\nu}}{\alpha_{n,r}^{\frac{\nu}{r}}} \left(\frac{1}{\alpha_{n,r}}\right)^{1-\frac{\nu}{r}}$$
$$= \left(\frac{\rho}{R}\right)^{n-\nu} \frac{\alpha_{n,\nu}}{\alpha_{n,r}} = \left(\frac{\rho}{R}\right)^{n-\nu} \frac{1}{(n-\nu)\cdots(n-r+1)}.$$

Отсюда следует оценка сверху

$$\sup\left\{E_{n-\nu-1}(f^{(\nu)})_{p,\rho} : f \in W^{(r)}_{q,R}\right\} \leqslant \left(\frac{\rho}{R}\right)^{n-\nu} \frac{1}{(n-\nu)\cdots(n-r+1)}. \tag{3.19}$$

Для получения оценки снизу рассмотрим функцию

$$g_3(z) = \frac{1}{R^{n-\nu}} \frac{z^n}{\alpha_{n,r}}, \quad R \geqslant 1, \quad n, r, \nu \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant r \geqslant \nu,$$

которая принадлежит классу $W^{(r)}_{q,R}$. Поскольку

$$g_3^{(\nu)}(z) = \frac{1}{R^{n-\nu}} \frac{\alpha_{n,\nu}}{\alpha_{n,r}} z^{n-\nu}, \qquad E_{n-\nu-1}(g_3^{(\nu)})_{p,\rho} = \left(\frac{\rho}{R}\right)^{n-\nu} \frac{\alpha_{n,\nu}}{\alpha_{n,r}},$$
$$\|g_3^{(r)}\|_{q,R} = \frac{R^{n-r}}{R^{n-\nu}} = \frac{1}{R^{r-\nu}} \leqslant 1, \qquad r \geqslant \nu,$$

имеет место оценка снизу

$$\begin{aligned}\sup\left\{E_{n-\nu-1}(f^{(\nu)})_{p,\rho} : f \in W^{(r)}_{q,R}\right\} &\geqslant E_{n-\nu-1}(g_3^{(\nu)})_{p,\rho} \\ &= \left(\frac{\rho}{R}\right)^{n-\nu} \frac{\alpha_{n,\nu}}{\alpha_{n,r}} = \left(\frac{\rho}{R}\right)^{n-\nu} \frac{1}{(n-\nu)\cdots(n-r+1)}.\end{aligned} \tag{3.20}$$

Требуемое равенство (3.15) получаем из сопоставления неравенств (3.19) и (3.20). Теорема 3.2 доказана. □

Аналогичным образом доказывается

Теорема 3.3. *Пусть $n, r, \nu \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant p \leqslant 2 \leqslant q$, $0 < \rho \leqslant R$. Тогда справедливо равенство*

$$\sup\left\{E_{n-1}(f_a^{(\nu)})_{p,\rho} : f \in W^{(r)}_{q,R,a}\right\} = \left(\frac{\rho}{R}\right)^n.$$

Теорема 3.4. *Пусть $n, r, \nu \in \mathbb{N}$ удовлетворяют соотношениям $n \geqslant r \geqslant \nu \geqslant 1$, $1 \leqslant p \leqslant 2 \leqslant s \leqslant q$ и $0 < \rho \leqslant R$. Тогда справедливо равенство*

$$\sup\left\{\frac{E_{n-\nu-1}(f^{(\nu)})_{p,\rho}}{(E_{n-1}(f)_{s,R})^{1-\frac{\nu}{r}}} : f \in W^{(r)}_{q,R}\right\} = \left(\frac{\rho}{R}\right)^{n-\nu} \frac{\alpha_{n,\nu}}{(\alpha_{n,r})^{\frac{\nu}{r}}}. \tag{3.21}$$

Если же $n, r, \nu \in \mathbb{N}$ — произвольные числа и $1 \leqslant p \leqslant 2 \leqslant q$, $0 < \rho \leqslant R$, то справедливо равенство

$$\sup\left\{\frac{E_{n-1}(f_a^{(\nu)})_{p,\rho}}{(E_{n-1}(f)_{s,R})^{1-\frac{\nu}{r}}} : f \in W^{(r)}_{q,R,a}\right\} = \left(\frac{\rho}{R}\right)^n. \tag{3.22}$$

Доказательство. Приводим, например, доказательство (3.21), существенно базирующееся на неравенстве (3.2). Равенство (3.22) доказывается по аналогичной схеме и опирается на неравенстве (3.3). Для произвольной функции $f \in W^{(r)}_{q,R}$ при $p = t$ на основании неравенства (3.17) запишем

$$E_{n-r-1}(f^{(r)})_{t,R} \leqslant E_{n-r-1}(f^{(r)})_{q,R} \leqslant \|f^{(r)}\|_{q,R} \leqslant 1, \tag{3.23}$$

а потому, учитывая (3.16) и (3.23) из включения $H^{(r)}_{q,R} \subset H^{(r-\nu)}_{p,R}$, где $1 \leqslant p \leqslant 2 \leqslant s \leqslant q$ и (3.11), получаем

$$E_{n-\nu-1}(f^{(\nu)})_{p,\rho} \leqslant \left(\frac{\rho}{R}\right)^{n-\nu} \frac{\alpha_{n,\nu}}{\alpha_{n,r}^{\frac{\nu}{r}}} (E_{n-1}(f)_{s,R})^{1-\frac{\nu}{r}},$$

откуда сразу следует оценка сверху величины, расположенной в левой части равенства (3.21):

$$\sup\left\{\frac{E_{n-\nu-1}(f^{(\nu)})_{p,\rho}}{(E_{n-1}(f)_{s,R})^{1-\frac{\nu}{r}}} : f \in W^{(r)}_{q,R}\right\} \leqslant \left(\frac{\rho}{R}\right)^{n-\nu} \frac{\alpha_{n,\nu}}{\alpha_{n,r}^{\frac{\nu}{r}}}. \tag{3.24}$$

Чтобы получить соответствующую оценку снизу вводим в рассмотрение функцию

$$g_4(z) = \frac{1}{R^{n-r}} \frac{z^n}{\alpha_{n,r}}.$$

Учитывая соотношения

$$g_4^{(r)}(z) = \frac{z^{n-r}}{R^{n-r}}, \qquad \|g_4^{(r)}\|_{q,R} = 1, \qquad g_4^{(\nu)}(z) = \frac{z^{n-\nu}}{R^{n-r}} \frac{\alpha_{n,\nu}}{\alpha_{n,r}},$$

$$E_{n-\nu-1}(g_4^{(\nu)})_{p,\rho} = \frac{\rho^{n-\nu}}{R^{n-r}} \frac{\alpha_{n,\nu}}{\alpha_{n,r}}, \qquad E_{n-1}(g_4)_{s,R} = \frac{R^r}{\alpha_{n,r}},$$

запишем

$$\begin{gathered}\sup\left\{\frac{E_{n-\nu-1}(f^{(\nu)})_{p,\rho}}{(E_{n-1}(f)_{s,R})^{1-\frac{\nu}{r}}} : f \in W^{(r)}_{q,R}\right\} \\ \geqslant \frac{E_{n-\nu-1}(g_4^{(\nu)})_{p,\rho}}{(E_{n-1}(g_4)_{s,R})^{1-\frac{\nu}{r}}} = \frac{\rho^{n-\nu}}{R^{n-r}} \frac{\alpha_{n,\nu}}{\alpha_{n,r}} \left(\frac{\alpha_{n,r}}{R^r}\right)^{1-\frac{\nu}{r}} = \left(\frac{\rho}{R}\right)^{n-\nu} \frac{\alpha_{n,\nu}}{\alpha_{n,r}^{\frac{\nu}{r}}}.\end{gathered} \tag{3.25}$$

Сопоставляя оценки сверху (3.24) и снизу (3.25) получаем равенство (3.21), чем и завершаем доказательство теоремы 3.4. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. К.И. Бабенко. *О наилучшем приближении одного класса аналитических функций* // Изв. акад. наук СССР, Сер. мат. **22**:5, 631–640 (1958).
2. В.Ф. Бабенко, Н.П. Корнейчук, В.А. Кофанов, С.А. Пичугов. *Неравенства для производных и их приложения.* Киев: Наукова думка. 2003.
3. С.Б. Вакарчук. *О неравенствах типа Колмогорова для некоторых банаховых пространств аналитических функций* // В: Некоторые вопросы анализа и дифференциальной топологии, Наукова думка, Киев, 4–7 (1988).
4. С.Б. Вакарчук, М.Б. Вакарчук. *О мультипликативных неравенствах типа Харди — Литтльвуда — Полиа для аналитических функций одной и двух комплексных переменных* // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Сер. Математика. **18**:6/1, 81–87 (2010).
5. С.Б. Вакарчук, М.Б. Вакарчук. *Неравенства типа Колмогорова для аналитических функций одной и двух комплексных переменных и их приложение к теории аппроксимации* // Укр. мат. ж. **63**:12, 1579–1601 (2011).
6. В.И. Смирнов, Н.А. Лебедев. *Конструктивная теория функций комплексного переменного.* М.: Наука. 1965.
7. Л.В. Тайков. *О наилучшем приближении в среднем некоторых классов аналитических функций* // Мат. заметки **1**:2, 155–162 (1967).
8. Г.Г. Харди, Д.Е. Литтльвуд, Г. Полиа. *Неравенсва.* М.: Изд-во иностр. лит. 1948.
9. М.Ш. Шабозов, В.Д. Сайнаков. *О неравенствах типа Колмогорова в пространстве Бергмана для функций двух переменных* // Тр. ИММ УрО РАН **24**:4, 270–282 (2018).

10. М.Ш. Шабозов, М.О. Акобиршоев. *О неравенствах типа Колмогорова для периодических функций двух переменных в* L_2 // Чебышевский сб. **20**:2(70), 348–365 (2019).
11. М.Ш. Шабозов. *О наилучшем совместном приближении функций в пространстве Харди* // Тр. ИММ УрО РАН. **29**:4, 283–291 (2023).
12. G.N. Hardy, E. Landau, J.E. Littlewood. *Some inequalities satisfied by the integrals or derivatives of real or analytic function* // Math. Z. **39**:1, 677–695 (1935).

Шабозов Мирганд Шабозович,
Таджикский национальный университет,
пр. Рудаки, 17,
734025, г. Душанбе, Таджикистан
E-mail: shabozov@mail.ru

Каримзода Равшан Аъзам,
Таджикский национальный университет,
пр. Рудаки, 17,
734025, г. Душанбе, Таджикистан
E-mail: ravshan.karimov.93@gmail.com