ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 18 № 1 (2026). С. 68-93.

УДК 517.53

РЯДЫ ФУРЬЕ И ДЕЛЬТА–СУБГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ НА ОТКРЫТОМ ПОЛУКОЛЬЦЕ

К.Г. МАЛЮТИН[1], Н.В. КУИНЬ, А.А. НАУМОВА[2]

Аннотация. Рассматривается класс $SK(R)$ субгармонических функций на неограниченном открытом полукольце

$$D_+(R) = \{z : \, |z| > R, \ \operatorname{Im} z > 0\},$$

которые имеют на каждом полукольце

$$D_+(R_1, R_2) = \{z : \ R < R_1 < |z| < R_2 < \infty, \ \operatorname{Im} z > 0\}$$

положительную гармоническую мажоранту. Вводится класс $JS(R)$ субгармонических функций на $D_+(R)$, предельные значения которых на вещественной границе $D_+(R)$ неположительные. Получены некоторые свойства функций из классов $SK(R)$ и $JS(R)$. Класс $\delta S(R)$ дельта–субгармонических функций на $D_+(R)$ определяется как разность классов $SK(R)$ или $JS(R)$:

$$\delta S(R) = SK(R) - SK(R) = JS(R) - JS(R).$$

Для функции $v \in \delta S(R)$ вводится характеристика роста $T_R(r, v)$, отличающаяся от характеристик, используемых для функций, определённых на верхней полуплоскости. Она определяет рост функции в окрестности полуокружности $L_R = \{Re^{i\theta} : 0 \leqslant \theta \leqslant \pi\}$. Для произвольной функции роста γ (неограниченной неубывающей положительной функции, определённой на вещественной полуоси $R_+ = \{r : r > 0\}$) мы определяем класс $\delta S_{L_R}(R, \gamma) \subset \delta S(R)$ дельта–субгармонических функций v конечного γ–типа на $D_+(R)$ в окрестности полуокружности L_R как

$$T_R(r, v) \leqslant A\gamma\left(\frac{B}{r - R}\right)$$

для всех $R < r < 2R$ при некоторых положительных A и B, зависящих от v, но не зависящих от r. Получены критерии принадлежности функции v классу $\delta S_{L_R}(R, \gamma)$ в терминах её коэффициентов Фурье.

Ключевые слова: неограниченное открытое полукольцо, гармоническая мажоранта, дельта–субгармоническая функция, функции роста, коэффициенты Фурье.

Mathematics Subject Classification: 30D35 31A05

1. Введение

Будем использовать следующие определения и терминологию. Через $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ обозначим множество целых положительных (натуральных) чисел, $\mathbb{C} = \{z = x + iy\}$ —

K.G. Malyutin, N.V. Quynh, A.A. Naumova, Fourier series and delta–subharmonic functions on open semi–annulus.

© Малютин К.Г., Куинь Н.В., Наумова А.А. 2026.

[1,2]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00006, https://rscf.ru/project/24-21-00006/.

Поступила 15 декабря 2025 г.

комплексная плоскость с вещественной осью $\mathbb{R}$,

$$R_+ = \{r : r > 0\}, \qquad \operatorname{Im} z = y, \qquad \operatorname{Re} z = x,$$

$\mathbb{C}_+ := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ — верхняя полуплоскость без границы, ∞ может обозначать как бесконечную точку на комплексной плоскости, так и $+\infty$ на вещественной оси. Открытый круг радиуса r с центром в точке a будем обозначать через $C(a,r)$, через $B(a,r) = \overline{C(a,r)}$ обозначим замкнутый круг, $\overline{G}$ — замыкание множества G, G_+ означает пересечение множества G с полуплоскостью $\mathbb{C}_+$, то есть $G_+ = G \cap \mathbb{C}_+$. Символ ∂ может обозначать, в зависимости от контекста, как частную производную функции, так и границу множества. Через $x_+ = \max\{x; 0\}$ обозначаем неотрицательную часть вещественного числа x. В частности, $\ln_+ 0 = 0$. Обозначим через

$$D_+(R_1, R_2) = \{z :\ 0 < R_1 < |z| < R_2 < +\infty,\ \operatorname{Im} z > 0\}$$

открытое полукольцо в верхней полуплоскости. Через

$$D_+(R) = \{z :\ |z| \geqslant R,\ \operatorname{Im} z > 0\}$$

обозначаем неограниченное открытое полукольцо в верхней полуплоскости. Через A, A_1, ..., мы обозначаем положительные константы которые могут изменяться в процессе доказательства. Может встретиться такое рассуждение: «пусть $f(r) \leqslant A\gamma(Br)$, тогда $f(2r) \leqslant A\gamma(Br)$», которое не должно вызывать недоразумений, $B \times G$ — декартово произведение множеств B и G.

Изложение теории субгармонических функций можно найти в книгах Привалова [12], Хеймана и Кеннеди [14], Цудзи [20], а также в монографии [8]. В статье мы получаем критерий принадлежности дельта–субгармонической функции на неограниченном полукольце заданному классу, который определяется произвольной функцией роста. Базой, на которой основывается доказательство этого результата, является обобщенная формула Карлемана. Эта формула отличается от формул Дж. Ито [16], А.Ф. Гришина [5], Н.В. Говорова [2]. Заметим, что эти авторы рассматривали функции на открытой полуплоскости, в отличие от Карлемана, который рассматривал мероморфные функции замкнутые на полукольце. В последнее время появились интересные работы Б.Н. Хабибуллина [13] и его учеников [11], в которых предложен новый подход к обобщению формулы Карлемана, основанный на инверсии специальных функций относительно окружности.

2. Выделение и оценки исключительных множеств

Пусть μ — положительная мера на полукольце $D_+(R)$, $\varphi(\alpha)$ — непрерывная строго возрастающая функция на сегменте $[0,1]$, $A(r)$ — непрерывная строго положительная неубывающая функция на полуоси $(0,\infty)$.

Определение 2.1. *Исключительным множеством F для меры μ, построенным с помощью функций $A(r)$ и $\varphi(\alpha)$, называется множество тех $z \neq 0$, для которых существует $\alpha \in [0,1]$ такое, что*

$$\frac{\mu(B(z,\alpha r))}{A(r)} \geqslant \varphi(\alpha), \quad r = |z|. \tag{2.1}$$

Лемма 2.1. *Для каждого $z \in F$ существует наибольшее из чисел $\alpha = \alpha_z$, для которого выполняется неравенство (2.1). В случае $\alpha_z < 1$ выполняется равенство:*

$$\frac{\mu(B(z,\alpha r))}{A(r)} = \varphi(\alpha_z).$$

Определение 2.1 и лемма 2.1 для полуплоскости принадлежат А.Ф. Гришину [4]. Для неограниченного полукольца доказательство леммы 2.1 аналогично рассуждениям в случае полуплоскости и мы опускаем его.

Введем следующие обозначения:

$$L(z,\zeta)=\frac{1}{\operatorname{Im}\zeta}\ln\left|\frac{z-\zeta}{z-\overline{\zeta}}\right|,\quad l(z,\zeta)=|\zeta|L(z,\zeta).$$

Написанные формулы определяют ядра как непрерывные функции при $\operatorname{Im} z\geqslant 0$, $\zeta\in\ \mathbb{C}_+$, $z\neq\zeta$. Однако, эти функции распространяются как непрерывные на множество

$$\overline{\mathbb{C}}_+\times\overline{\mathbb{C}}_+\setminus\operatorname{diag}\left(\overline{\mathbb{C}}_+\times\overline{\mathbb{C}}_+\right),$$

где

$$\operatorname{diag}\left(\overline{\mathbb{C}}_+\times\overline{\mathbb{C}}_+\right)=\left\{(z,z),z\in\overline{\mathbb{C}}_+\right\}.$$

В дальнейшем мы, обычно, будем рассматривать функцию $L(z,\zeta)$ на множестве $\mathbb{C}_+\times\mathbb{C}$, считая, что $L(z,z)=-\infty$ при $z\in\mathbb{C}_+$, $L(z,\zeta)=\ 0$ при $\operatorname{Im}\zeta<0$. Если $\zeta=t$ — вещественно, то

$$\begin{aligned}L(z,t)=\lim_{\eta\to+0}\frac{1}{\eta}\ln\left|\frac{z-t-i\eta}{z-t+i\eta}\right|&=-\lim_{\eta\to+0}\frac{1}{\eta}\operatorname{Re}\ln\left(1-\frac{2i\eta}{z-t+i\eta}\right)\\&=-\operatorname{Re}\frac{2i}{z-t}=-\frac{2y}{(x-t)^2+y^2},\end{aligned}$$

где $z=x+iy$.

Таким образом, $L(z,\zeta)$ лишь множителем отличается от ядра Пуассона для верхней полуплоскости. Функция $L(z,\zeta)$ почти постоянна по переменной ζ на части окружности $|\zeta-z|=\alpha r$, $r=|z|$, лежащей в замкнутой верхней полуплоскости. Это мы отразим в следующей лемме, принадлежащей А.Ф. Гришину [4].

Лемма 2.2. *Для функции $L(z,\zeta)$ при $|\zeta-z|=\alpha r$, $\operatorname{Im}\zeta\geqslant 0$, справедливы следующие оценки*

$$\frac{1}{r}f(\alpha,\theta)\leqslant L(re^{i\theta},\zeta)\leqslant\frac{1}{r(\sin\theta+\alpha)}\ln\frac{\alpha}{2\sin\theta+\alpha},$$

$$f(\alpha,\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sin\theta-\alpha}\ln\dfrac{\alpha}{2\sin\theta-\alpha}, & \alpha<\sin\theta,\\ -\dfrac{2\sin\theta}{\alpha^2}, & \alpha\geqslant\sin\theta,\end{cases}$$

$$\frac{4}{\ln 3}\frac{1}{r(\sin\theta+\alpha)}\ln\frac{\alpha}{2\sin\theta+\alpha}\leqslant L(re^{i\theta},\zeta)\leqslant\frac{1}{r(\sin\theta+\alpha)}\ln\frac{\alpha}{2\sin\theta+\alpha}.$$

Замечание 2.1. *Факт наличия последнего неравенства мы выразили словами, что функция $L(z,\zeta)$ почти постоянна на окружности $|\zeta-z|=\alpha r$.*

Теорема 2.1. *Пусть μ — положительная, конечная мера на полукольце $\overline{D_+(R)}$, $\mu(\overline{D_+(R)})=S$, F — исключительное множество для меры μ, построенное с помощью функций*

$$A(r)\equiv S,\quad\varphi(\alpha)=2\frac{1+\eta}{\eta}\alpha,\quad\eta\in(0,1).$$

Тогда при $z\notin F$ выполняется неравенство

$$u(z):=\iint\limits_{\overline{D_+(R)}}l(z,\zeta)\,d\mu(\zeta)>-MNS,$$

где

$$M=\frac{8}{\ln 3}\int\limits_0^\infty \frac{1}{1+u}\ln\left(1+\frac{2}{u}\right)du,\qquad N=2\frac{1+\eta}{\eta}.$$

Замечание 2.2. *Аналогичная теорема для полуплоскости* $\overline{\mathbb{C}}_+$ *доказана А. Ф. Гришиным в его диссертации* [5, Теорема 18]. *Доказательство для полукольца* $\overline{D_+(R)}$ *аналогично рассуждениям из* [5], *однако, мы не встречали теорему Гришина в других источниках кроме его диссертации, в которой доказательство приведено кратко. Для полноты изложения, приведем доказательство теоремы* 2.1, *не претендуя на авторство, используя идеи из* [5].

Доказательство. Поскольку ядро $l(z,\zeta)$ отрицательное, получим $u(z)\leqslant 0$. Так как при

$$\zeta-z=\alpha re^{i\psi},\quad z=re^{i\theta},$$

выполняется неравенство $|\zeta|\leqslant(1+\alpha)r$, по лемме 2.2

$$|u(z)|\leqslant\frac{4}{\ln 3}\iint\frac{1+\alpha}{\sin\theta+\alpha}\ln\left(1+\frac{2\sin\theta}{\alpha}\right)d\mu(\zeta)$$

$$=\frac{4}{\ln 3}\int\limits_0^\infty\frac{1+\alpha}{\sin\theta+\alpha}\ln\left(1+\frac{2\sin\theta}{\alpha}\right)d\mu(B(z,\alpha r)).$$

Обозначим

$$f(\alpha)=\frac{1+\alpha}{\sin\theta+\alpha}\ln\left(1+\frac{2\sin\theta}{\alpha}\right).$$

Функция $f(\alpha)$ убывает на интервале $(0,+\infty)$, т.е. $f'(\alpha)<0$.

Заметим, что при $\alpha\geqslant\dfrac{1}{N}$ и $z\notin F$ имеет место равенство $\mu(B(z,\alpha r))=S$, так как по построению множества F для таких α имеем $\mu(B(z,\alpha r))\geqslant SN\alpha\geqslant S$. Отсюда следует, что

$$|u(z)|\leqslant\frac{4}{\ln 3}\int\limits_0^{\frac{1}{N}}f(\alpha)\,d\mu(B(z,\alpha r)).$$

При $z\notin F$ выполняется неравенство $\mu(B(z,\alpha r))\leqslant\min\{NS\alpha;S\}$. Поэтому для всех $z\notin F$

$$\int\limits_\varepsilon^{\frac{1}{N}}f(\alpha)\,d\mu(B(z,\alpha r))=\mu(B(z,\alpha r))f(\alpha)\Big|_\varepsilon^{\frac{1}{N}}-\int\limits_\varepsilon^{\frac{1}{N}}\mu(B(z,\alpha r))\,df(\alpha)$$

$$\leqslant Sf\left(\frac{1}{N}\right)-\mu(B(z,\varepsilon r))f(\varepsilon)-NS\int\limits_\varepsilon^{\frac{1}{N}}\alpha\,df(\alpha)$$

$$\leqslant NS\varepsilon f(\varepsilon)+NS\int\limits_\varepsilon^{\frac{1}{N}}f(\alpha)\,d\alpha.$$

Переходя к пределу при $\varepsilon\to+0$, получим

$$|u(z)|\leqslant\frac{4NS}{\ln 3}\int\limits_0^{\frac{1}{N}}\frac{1+\alpha}{\sin\theta+\alpha}\ln\left(1+\frac{2\sin\theta}{\alpha}\right)d\alpha$$

$$\leqslant \frac{8NS}{\ln 3}\int\limits_0^{\frac{1}{N}} \frac{1}{\sin\theta+\alpha}\ln\left(1+\frac{2\sin\theta}{\alpha}\right)\,d\alpha$$
$$\leqslant \frac{8NS}{\ln 3}\int\limits_0^{\infty} \frac{1}{1+u}\ln\left(1+\frac{2}{u}\right)\,du.$$

Теорема доказана. □

3. Предварительные сведения

В начале, мы приведем известные формулы для функций Грина полукольца $D_+(R_1, R_2)$.

Лемма 3.1. *Пусть $G(z,\zeta)$ — функция Грина полукольца $D_+(R_1,R_2)$ и пусть $R_1 = qR$, $R_2 = \dfrac{R}{q}$. Тогда*

$$G(z,\zeta) = \ln\left|\frac{\sigma\left(\ln\dfrac{z\overline{\zeta}}{q^2R^2}\right)\sigma\left(\ln\dfrac{z}{\overline{\zeta}}\right)}{\sigma\left(\ln\dfrac{z\zeta}{q^2R^2}\right)\sigma\left(\ln\dfrac{z}{\zeta}\right)}\right|, \tag{3.1}$$

где

$$\ln\omega = \ln|\omega| + i\arg\omega, \qquad 0<\arg z, \arg\zeta<\pi, \qquad \arg\overline{\zeta} = -\arg\zeta,$$
$$\arg\omega_1\omega_2 = \arg\omega_1+\arg\omega_2, \qquad \arg\frac{\omega_1}{\omega_2} = \arg\omega_1-\arg\omega_2,$$

— сигма–функция Вейерштрасса с основными периодами $\omega_1 = -4\ln q$, $\omega_2 = 2\pi i$. Имеют место соотношения:

$$\begin{aligned} G(z,\zeta) =& 2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m(1-q^{4m})}\left(\frac{\tau}{r}\right)^m\left(1-\frac{q^{2m}r^{2m}}{R^{2m}}\right)\left(1-\frac{q^{2m}R^{2m}}{\tau^{2m}}\right)\sin m\theta\sin m\varphi,\\ & qR<\tau<r<\frac{R}{q}, \end{aligned}\tag{3.2}$$

$$\begin{aligned} G(z,\zeta) =& 2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m(1-q^{4m})}\left(\frac{r}{\tau}\right)^m\left(1-\frac{q^{2m}R^{2m}}{r^{2m}}\right)\left(1-\frac{q^{2m}\tau^{2m}}{R^{2m}}\right)\sin m\theta\sin m\varphi,\\ & qR<r<\tau<\frac{R}{q}, \end{aligned}\tag{3.3}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(z,t)}{\partial n} =& \frac{2}{t}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{1-q^{4m}}\left(\frac{t}{r}\right)^m\left(1-\frac{q^{2m}R^{2m}}{t^{2m}}\right)\left(1-\frac{q^{2m}r^{2m}}{R^{2m}}\right)\sin m\theta,\\ & qR<|t|<r<\frac{R}{q}, \end{aligned}\tag{3.4}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(z,t)}{\partial n} =& \frac{2}{t}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{1-q^{4m}}\left(\frac{r}{t}\right)^m\left(1-\frac{q^{2m}t^{2m}}{R^{2m}}\right)\left(1-\frac{q^{2m}R^{2m}}{r^{2m}}\right)\sin m\theta,\\ & qR<r<|t|<\frac{R}{q}, \end{aligned}\tag{3.5}$$

$$\frac{\partial G\left(z, qRe^{i\varphi}\right)}{\partial n} = \frac{4}{qR} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^{4m}} \left(\frac{qR}{r}\right)^m \left(1 - \frac{q^{2m} r^{2m}}{R^{2m}}\right) \sin m\theta \sin m\varphi, \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial G\left(z, \dfrac{1}{q} Re^{i\varphi}\right)}{\partial n} = \frac{4q}{R} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^{4m}} \left(\frac{qr}{R}\right)^m \left(1 - \frac{q^{2m} R^{2m}}{r^{2m}}\right) \sin m\theta \sin m\varphi. \tag{3.7}$$

Доказательство. Разложения ядра в формуле (3.1) при

$$R_1 = qR, \qquad R_2 = \frac{R}{q}, \qquad q \in (0,1), \qquad z = re^{i\theta}, \qquad \zeta = \tau e^{i\varphi}$$

можно получить, используя теорию эллиптических функций (см., например, [1, глава III, п. 12]. Формулы (3.2)–(3.7) приведены в диссертации А.Ф. Гришина [5] (см. [7, 9]). □

Следующая теорема — это аналог теоремы Литлвуда [18] для неограниченного полукольца $D_+(R)$.

Теорема 3.1. *Пусть μ — положительная мера, сосредоточенная на полукольце (открытом) $D_+(R)$, такая, что*

$$\iint\limits_{D_+(R)} \frac{d\mu(\zeta)}{1+|\zeta|^2} < \infty.$$

Пусть

$$v(z) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{D_+(R)} L(z,\zeta)\, d\mu(\zeta).$$

Тогда для почти всех в смысле меры Лебега $x \in I_R = (-\infty, -R) \cup (R, +\infty)$ существует предел

$$\lim_{y\to+0} v(x+iy) = 0.$$

Замечание 3.1. *Для случая когда мера μ сосредоточена на открытой верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$ аналогичная теорема доказана в диссертации А.Ф. Гришина* [5, Теорема 26]. *В других источниках мы ее не встречали. Поэтому, для полноты изложения, приведем доказательство теоремы 3.1, используя рассуждения из* [5].

Доказательство. Будем считать меру μ продолженной на полукольцо $D_+\left(\frac{R}{2}, R\right]$ как нулевую меру. Пусть

$$E = E_\delta = \left\{x \in I_R : \varliminf_{y\to+0} v(x+iy) < -\delta\right\}.$$

Так как $v(z) \leqslant 0$ (это так потому, что ядро $L(z,\zeta) \leqslant 0$, μ — положительная мера), утверждение теоремы эквивалентно тому, что для каждого $\delta > 0$ множество E_δ имеет меру ноль. Пусть $R < a < b < +\infty$, $\Delta > 0$,

$$B = [a/2, 2b] \times [0, 2\Delta], \qquad B_1 = [a,b] \times [0,\Delta],$$

$$v(z) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{B} L(z,\zeta)\, d\mu(\zeta) + \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{D_+(R)\setminus B} L(z,\zeta)\, d\mu(\zeta) = v_1(z) + v_2(z).$$

При $z \in B_1$, $\zeta \notin B$ справедливы неравенства

$$-L(z,\zeta) = \frac{1}{2\operatorname{Im}\zeta} \ln\left(1 + \frac{4\operatorname{Im} z \operatorname{Im}\zeta}{|z-\zeta|^2}\right) \leqslant \frac{2\operatorname{Im} z}{|z-\zeta|^2} \leqslant \frac{C\operatorname{Im} z}{1+|\zeta|^2},$$

где $C = C(a, b, \Delta, R)$. Тогда при $z \in B_1$

$$|v_2(z)| \leqslant C \operatorname{Im} z \iint\limits_{D_+(R)} \frac{d\mu(\zeta)}{1 + |\zeta|^2}.$$

Поэтому

$$v_2(x + iy) \overset{y \to +0}{\rightrightarrows} 0 \quad \text{при} \quad x \in [a, b].$$

Далее

$$v_1(z) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_B L(z, \zeta)\, d\mu(\zeta) = \iint\limits_B l(z, \zeta)\, d\mu_1(\zeta),$$

где

$$d\mu_1(\zeta) = \frac{1}{2\pi|\zeta|}\, d\mu(\zeta), \qquad \mu_1(B) \leqslant \frac{1}{2\pi a}\, \mu(B).$$

По теореме 2.1 для любого $\eta \in (0, 1)$ существует система кругов F с суммой радиусов не превышающей $2\eta(b + \Delta)$, такая, что выполняется неравенство

$$v_1(z) \geqslant -2M \frac{1 + \eta}{\eta} \mu_1(B).$$

Для любого $\eta > 0$ можно выбрать $\Delta > 0$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$2M \frac{1 + \eta}{\eta} \mu_1(B) < \frac{\sigma}{2}.$$

Обозначим через E_1 проекцию F на вещественную ось,

$$E_+ = E_1 \cap (R, +\infty), \qquad E_- = E_1 \cap (-\infty, -R).$$

Тогда

$$\operatorname{mes} E_+ < \operatorname{mes} E_1 < 2\eta(b + \Delta) < 2\eta(b + 1).$$

При $x \notin E_+$ выполняются неравенства

$$v(x + iy) > -\frac{\sigma}{2}, \qquad \varliminf_{y \to +0} v(x + iy) \geqslant -\frac{\sigma}{2}.$$

Поэтому $E \cap [a, b] \subset E_+$. Поскольку $\operatorname{mes} E_+ < 2\eta(b+1)$, а η — произвольное число, имеем $\operatorname{mes}(E \cap [a, b]) = 0$. Поскольку a и b — произвольные числа, тогда $\operatorname{mes}(E \cap (R, +\infty)) = 0$.

Аналогично доказывается, что $\operatorname{mes}(E \cap (-\infty, -R)) = 0$. А значит $\operatorname{mes} E = 0$.

Теорема полностью доказана. □

Теорема 3.2. *Пусть v — та же функция, что и в теореме 3.1 Тогда для любого сегмента $[a, b] \subset I_R$ существует предел*

$$\lim_{y \to +0} \int\limits_a^b v(x + iy)\, dx = 0.$$

Замечание 3.2. *Для открытой верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$ аналогичная теорема доказана в диссертации А.Ф. Гришина* [5, Теорема 27]. *Для полноты изложения, приведем доказательство теоремы 3.2, используя рассуждения из* [5].

Доказательство. Пусть $R < a < b < +\infty$, а функции v_1 и v_2 — те же, что и в тексте доказательства теоремы 3.1. Так как

$$v_2(x + iy) \overset{y \to +0}{\rightrightarrows} 0 \quad \text{при} \quad x \in [a, b],$$

имеем

$$\lim_{y\to+0}\int_a^b v_2(x+iy)dx=0.$$

Обозначим $\zeta=\xi+i\eta$. Далее

$$\begin{aligned}\int_a^b|L(x+iy,\zeta)|dx&=\frac{1}{2\eta}\int_a^b\ln\frac{(x-\xi)^2+(y+\eta)^2}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\,dx\\&<\frac{1}{2\eta}\int_R^{+\infty}\ln\frac{(x-\xi)^2+(y+\eta)^2}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\,dx<\frac{1}{2\eta}\int_{-\infty}^{+\infty}\ln\frac{(x-\xi)^2+(y+\eta)^2}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\,dx\\&=\frac{1}{2\eta}\int_{-\infty}^{+\infty}\ln\frac{u^2+(y+\eta)^2}{u^2+(y-\eta)^2}\,du=\frac{\pi}{\eta}(y+\eta-|y-\eta|)\leqslant 2\pi.\end{aligned}$$

Поэтому

$$\int_a^b|v_1(x+iy)|\,dx\leqslant\frac{1}{2\pi}\iint\limits_B\int_a^b|L(x+iy,\zeta)|\,dxd\mu(\zeta)\leqslant\mu(B).$$

Тогда

$$\overline{\lim_{y\to+0}}\int_a^b v(x+iy)\,dx\leqslant\mu(B).$$

Так как $\lim\limits_{\Delta\to+0}\mu(B)=0$, теорема полностью доказана. □

Нам понадобится следующая теорема.

Теорема 3.3. *Пусть μ — мера на I_R такая, что*

$$\int\limits_{I_R}\frac{d|\mu|(t)}{1+t^2}<\infty,\quad |\mu|=\mu^++\mu^-,$$

где $\mu=\mu^+-\mu^-$ — разложение Жордана меры μ. Пусть

$$v(z)=\frac{y}{\pi}\int\limits_{I_R}\frac{d\mu(t)}{(t-x)^2+y^2},\quad z=x+iy.$$

1) *Если в точке x_0 существует конечная или бесконечная (определённого знака) производная $\mu'(x_0)$, имеем*
$$\lim_{y\to+0}v(x_0+iy)=\mu'(x_0).$$
2) *Пусть $[a,b]\subset I_R$, $\mu(\{a\})=\mu(\{b\})=0$. Тогда*
$$\lim_{y\to+0}\int_a^b v(x+iy)\,dx=\mu([a,b]).$$

Доказательство. Утверждение 1) — это известная теорема Фату. Для случая полуплоскости, её доказательство можно найти, например, в [17, Chapter VI].

2) Аналогичное утверждение для полуплоскости доказано А.Ф. Гришиным [5, Теорема 29]. Другое доказательство для полуплоскости дано в работе [9, Теорема 3.3].

Пусть $a>R$. Зафиксируем $\delta>0$ так, чтобы $[a-\delta,b+\delta]\subset I_R$.

Положим $I_\delta = I_R \setminus [a-\delta, b+\delta]$. Представим функцию v в виде суммы

$$v(z) = \frac{y}{\pi}\int\limits_{a-\delta}^{b+\delta} \frac{d\mu(t)}{(t-x)^2+y^2} + \frac{y}{\pi}\int\limits_{I_\delta} \frac{d\mu(t)}{(t-x)^2+y^2} = v_1(z) + v_2(z).$$

При $x = \operatorname{Re} z \in [a,b]$, $t \in I_\delta$, справедлива оценка

$$\frac{t^2+1}{(t-x)^2+y^2} \leqslant K(a,b,\delta),$$

где $K(a,b,\delta) > 0$ — константа. Поэтому

$$\lim_{y\to+0}\int\limits_a^b |v_2(x+iy)|\,dx \leqslant \lim_{y\to+0}\int\limits_a^b \left(K(a,b,\delta)\frac{y}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d|\mu|(t)}{1+t^2}\right)dx = 0.$$

Оценим интеграл от функции v_1:

$$\int\limits_a^b v_1(x+iy)\,dx = \int\limits_{a-\delta}^{b+\delta}\frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\frac{b-t}{y} - \operatorname{arctg}\frac{a-t}{y}\right)d\mu(t).$$

Подынтегральная функция $f(t,y;a,b)$ в правой части последнего равенства ограничена. Кроме того,

$$\lim_{y\to+0} f(t,y;a,b) = \begin{cases} 0, & t\in\mathbb{R}\setminus[a,b],\\ 1, & t\in(a,b),\\ \frac{1}{2}, & t\in\{a;b\}.\end{cases}$$

Поскольку $\mu(\{a\}) = \mu(\{b\}) = 0$, функция $f(t,y;a,b)$ $|\mu|$–почти всюду сходится при $y\to+0$ к характеристической функции $\chi_{[a,b]}$ интервала $[a,b]$. Тогда по теореме Лебега о мажорированной сходимости

$$\lim_{y\to+0}\int\limits_a^b v_1(x+iy)\,dx = \int\limits_a^b d\mu(t) = \mu([a,b]).$$

Аналогично рассматривается случай $a < -R$. Теорема доказана. □

4. Субгармонические функции на полукольце

Мы начнём с необходимых определений и изложения тех свойств субгармонических функций, которые будут использованы в дальнейшем. Доказательство следующей теоремы можно найти в [12].

Теорема 4.1. *Пусть D — область, имеющая функцию Грина $G(z,\zeta)$. Пусть v — субгармоническая функция на области D, μ — мера Рисса функции v. Пусть h — наилучшая гармоническая мажоранта функции v в области D. Для того, чтобы имело место представление*

$$v(z) = -\iint\limits_D G(z,\zeta)\,d\mu(\zeta) + h(z), \tag{4.1}$$

где h — гармоническая функция в области D, необходимо и достаточно, чтобы функция v имела в области D гармоническую мажоранту. Если равенство (4.1) имеет место, то h — наилучшая гармоническая мажоранта функции v в области D.

Приведем теорему о положительной гармонической мажоранте [5, Теорема 31].

Теорема 4.2. *Пусть D — область, имеющая функцию Грина. Пусть v — субгармоническая функция на области D, имеющая в этой области гармоническую мажоранту. Пусть h — наилучшая гармоническая мажоранта функции v в области D. Для того, чтобы функция v имела в области D положительную гармоническую мажоранту, необходимо и достаточно, чтобы функция h имела в области D положительную гармоническую мажоранту. В случае, если положительные гармонические мажоранты у этих функций существуют, то наилучшие положительные гармонические мажоранты функций v и h совпадают.*

Замечание 4.1. *Кроме диссертации А.Ф. Гришина нам неизвестна формулировка и доказательство этой теоремы в других источниках. Ввиду ее важности в наших исследованиях (в этом и дальнейших), не претендуя на авторство, мы приведем доказательство теоремы 4.2, используя рассуждения из [5].*

Доказательство. По теореме 4.1 функция v допускает представление (4.1). Пусть существуют наилучшие положительные гармонические мажоранты H_v и H_h функций v и h в области D, соответственно. Тогда $H_v \leqslant H_h$. Поскольку область D имеет функцию Грина, существует последовательность конечно–связных ограниченных областей D_m, исчерпывающих область D, т.е. $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} D_m = D$, и таких, что:

1) $\overline{D_m} \subset D_{m+1}$,
2) $\overline{D_m}$ — компакт,
3) граница D_m есть объединение конечного числа аналитических жордановых кривых.

Пусть граница $\mathcal{L}$ области E состоит из конечного числа замкнутых аналитических жордановых кривых. Как известно [3, Глава 6, §3], что если функция u есть гармоническая в области E, ограниченная и непрерывная в замыкании $\overline{E}$, то имеет место формула Грина

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathcal{L}} \frac{\partial G(z,\zeta)}{\partial n} u(\zeta) ds, \tag{4.2}$$

где $G(z,\zeta)$ — функция Грина области E, n — внутренняя нормаль в точке $\zeta \in \mathcal{L}$, s — длина дуги на $\mathcal{L}$, $\zeta = \zeta(s)$ — параметризация $\mathcal{L}$.

Пусть $G_m(z,\zeta)$ и $G(z,\zeta)$ — функции Грина областей D_m и D. Тогда [3, Глава 6, §3] $G_m(z,\zeta) \uparrow G(z,\zeta)$ при $m \to \infty$, $z \in D$ (ясно, что предельное соотношение имеет место для m, таких, что $z \in D_m$).

Пусть h_v — наилучшая гармоническая мажоранта функции v в области D. Согласно формуле (4.2) имеем

$$h_v(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathcal{L}_m} \frac{\partial G_m(z,\zeta_1)}{\partial n} h_v(\zeta_1)\, ds, \qquad \mathcal{L}_m = \partial D_m.$$

Применяя равенство (4.1), получим

$$h_v(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathcal{L}_m} \frac{\partial G_m(z,\zeta_1)}{\partial n} v(\zeta_1)\, ds + \iint\limits_{D} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathcal{L}_m} \frac{\partial G_m(z,\zeta_1)}{\partial n} G(\zeta_1,\zeta)\, ds d\mu(\zeta).$$

Из формулы (4.2) получаем

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathcal{L}_m} \frac{\partial G_m(z,\zeta_1)}{\partial n} G(z,\zeta_1)\, ds = \begin{cases} G(z,\zeta) - G_m(z,\zeta), & \zeta \in D_m, \\ G(z,\zeta), & \zeta \notin D_m. \end{cases}$$

Кроме того, имеет место неравенство

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathcal{L}_m}\frac{\partial G_m(z,\zeta_1)}{\partial n}v(\zeta_1)\,ds \leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathcal{L}_m}\frac{\partial G_m(z,\zeta_1)}{\partial n}H_v(\zeta_1)\,ds = H_v(z).$$

Отсюда получаем неравенство

$$\begin{aligned} h_v(z) &\leqslant H_v(z) + \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{D_m}(G(z,\zeta)-G_m(z,\zeta))\,d\mu(\zeta) + \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{D\setminus D_m}G(z,\zeta)\,d\mu(\zeta) \\ &\leqslant H_v(z) + \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{D_{m_0}}(G(z,\zeta)-G_m(z,\zeta))\,d\mu(\zeta) + \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{D\setminus D_{m_0}}G(z,\zeta)\,d\mu(\zeta), \end{aligned}$$

если $m_0 \leqslant m$.

Поскольку

$$G(z,\zeta)-G_m(z,\zeta) \leqslant G(z,\zeta), \qquad \lim_{m\to\infty}(G(z,\zeta)-G_m(z,\zeta)) = 0,$$

по теореме Лебега о мажорируемой сходимости

$$h_v(z) \leqslant H_v(z) + \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{D\setminus D_{m_0}}G(z,\zeta)\,d\mu(\zeta) = H_v(z) + \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{D}\chi_{D\setminus D_{m_0}}(\zeta)\,G(z,\zeta)\,d\mu(\zeta).$$

Вновь применяя теорему Лебега о мажорируемой сходимости, получим, что

$$h_v(z) \leqslant H_v(z).$$

Таким образом, функция $h_v(z)$ имеет положительную гармоническую мажоранту и $H_v(z)$ — одна из таких мажорант. Тогда $H_v(z) \geqslant H_h(z)$. С учетом отмеченного выше неравенства $H_v(z) \leqslant H_h(z)$ получаем $H_v(z) = H_h(z)$.

Теорема доказана. □

Следующая теорема — это знаменитая теорема Мартина о представлении положительных гармонических функций. Её доказательство можно найти в [15].

Теорема 4.3. *Пусть D — область, имеющая функцию Грина, и пусть Γ — граница Мартина области D, $M(z,\zeta)$ — функция Мартина области D, $\zeta \in \Gamma$. Пусть $u(z)$ — положительная гармоническая функция в области D. Тогда существует единственная конечная, положительная, сосредоточенная на множестве минимальных точек границы Γ, мера λ на Γ такая, что*

$$u(z) = \int\limits_{\Gamma} M(z,\zeta)\,d\lambda(\zeta).$$

Замечание 4.2. *О функции Мартина и границе Мартина можно прочесть в* [15].

Нам понадобится теорема А.Ф. Гришина о наилучшей положительной гармонической мажоранте [5, Теорема 33].

Теорема 4.4. *Пусть D — область, имеющая функцию Грина. Пусть $u(z)$ — гармоническая функция на области D, имеющая в этой области положительную гармоническую мажоранту. Тогда существует единственная мера ν на Γ, сосредоточенная на множестве минимальных точек, имеющая конечную полную вариацию, и такая, что*

$$u(z) = \int\limits_{\Gamma} M(z,\zeta)\,d\nu(\zeta).$$

Если $\Gamma = \Gamma_+ \cup \Gamma_-$ — разложение Хана множества Γ для меры ν, а $\nu = \nu_+ - \nu_-$ — разложение Жордана для этой меры, то для наилучшей положительной гармонической мажоранты $H(z)$ функции $u(z)$ справедлива формула

$$H(z) = \int_{\Gamma_+} M(z,\zeta)\, d\nu(\zeta) = \int_{\Gamma} M(z,\zeta)\, d\nu_+(\zeta).$$

Замечание 4.3. *Эта теорема с доказательством приведена в диссертации А.Ф. Гришина. В других источниках она нам не встречалась. Поэтому, для полноты изложения, учитывая значимость этой теоремы в теории функций, не претендуя на авторство, мы приведем ее доказательство, основанное на идеях из диссертации А.Ф. Гришина.*

Доказательство. Поскольку функция $u(z)$ имеет в области D положительную гармоническую мажоранту, она представляется в этой области в виде разности двух положительных гармонических функций. По теореме 4.3 существует мера ν, сосредоточенная на множестве минимальных граничных точек Γ_1, имеющая конечную полную вариацию и такая, что

$$u(z) = \int_{\Gamma} M(z,\zeta) d\nu(\zeta).$$

Докажем единственность такой меры. Если это не так, то существует ненулевая мера ν, сосредоточенная на множестве Γ_1, имеющая конечную полную вариацию, и такая, что

$$\int_{\Gamma} M(z,\zeta)\, d\nu(\zeta) = 0.$$

Если $\nu = \nu_+ - \nu_-$ — разложение Жордана для этой меры, то каждая из мер ν_+ и ν_- сосредоточена на множестве Γ_1. Тогда

$$\int_{\Gamma} M(z,\zeta)\, d\nu_+(\zeta) = \int_{\Gamma} M(z,\zeta)\, d\nu_-(\zeta).$$

По теореме 4.3 $\nu_+ = \nu_-$. Так как это взаимно сингулярные меры, имеем $\nu_+ = \nu_- = 0$, $\nu = 0$. Мы получили противоречие и единственность меры $\nu = 0$ доказана.

Пусть $H(z)$ — наилучшая положительная гармоническая мажоранта функции $u(z)$. По теореме 4.3 существует положительная мера ν_1, сосредоточенная на Γ, такая, что

$$H(z) = \int_{\Gamma} M(z,\zeta)\, d\nu_1(\zeta).$$

Тогда

$$H(z) - u(z) = \int_{\Gamma} M(z,\zeta)\, d(\nu_1(\zeta) - \nu(\zeta)).$$

По доказанному свойству единственности $\nu_1 - \nu$ — положительная мера. Покажем, что мера $\nu_2 = \nu_1 - \nu_+$ есть отрицательная мера. Если это не так, то существует компакт $E_3 \subset \Gamma$ такой, что ограничение ν_3 меры ν_2 на E_3 есть положительная мера, причем $\nu_3(E_3) = \nu_2(E_3) > 0$. Имеем $\nu_1 - \nu_3 = \nu_1 - \nu_2 = \nu_+$ на E_3, $\nu_1 - \nu_3 = \nu_1$ на CE_3. Таким образом, $\nu_1 - \nu_3$ есть положительная мера, а функция

$$H_1(z) = \int_{\Gamma} M(z,\zeta)\, (d\nu_1(\zeta) - d\nu_3(\zeta))$$

будет положительной гармонической функцией в D.

Поскольку $\nu_3(E_3) > 0$, выполняется неравенство $H_1(z) < H(z)$ при $z \in D$. Кроме того,

$$H_1(z) - u(z) = \int\limits_{\Gamma} M(z,\zeta)\, d(\nu_1(\zeta) - \nu(\zeta) - \nu_3(\zeta)).$$

Рассмотрим меру $\nu_1 - \nu - \nu_3 = \nu_1 - \nu_+ - \nu_3 + \nu_-$. На множестве E_3 эта мера совпадает с мерой $\nu_1 - \nu_+ - \nu_3 + \nu_- = \nu_-$ и потому положительна. На множестве CE_3 эта мера совпадает с мерой $\nu_1 - \nu$ и также положительная. Поэтому $\nu_1 - \nu - \nu_3$ есть положительная мера, а $H_1(z) - u(z)$ есть положительная функция. Тогда $H_1(z)$ есть положительная гармоническая мажоранта функции $u(z)$. Поскольку $H_1(z) < H(z)$, мы получаем противоречие. Отрицательность меры ν_2 доказана. Поскольку ν_1 — положительная мера, мера ν_2 сосредоточена на множестве Γ_+ как это следует из определения ν_2.

Если $\nu_2(\Gamma_+) < 0$, то

$$(\nu_1 - \nu)(\Gamma_+) = (\nu_1 - \nu_+ + \nu_-)(\Gamma_+) = (\nu_1 - \nu_+)(\Gamma_+) = \nu_2(\Gamma_+) < 0.$$

Это противоречит тому, что $\nu_1 - \nu$ — положительная мера. Таким образом, ν_2 есть отрицательная мера, сосредоточенная на множестве Γ_+. Причем $\nu_2(\Gamma_+) = 0$, поэтому $\nu_2 = 0$, $\nu_1 = \nu_+$ и теорема доказана. □

Доказательство следующей теоремы можно найти в [15].

Теорема 4.5. *Пусть D — односвязная область, евклидова граница которой Γ есть жорданова кривая. Тогда граница Мартина области D гомеоморфна Γ и каждая точка границы минимальна. Если $\zeta \in \Gamma$, то функция Мартина $M(z,\zeta)$ области D, отвечающая этой точке, имеет вид*

$$M(z,\zeta) = \lim_{\substack{\zeta_1 \to \zeta \\ \zeta_1 \in D}} \frac{G(z,\zeta)}{G(z_0,\zeta_1)},$$

где $G(z,\zeta)$ — функция Грина области D, z_0 такая точка, что $v(z_0) > -\infty$.

Теорема 4.6. *Пусть D — односвязная область, ограниченная жордановой кривой Γ. Пусть в точке $\zeta \in \Gamma$ кривая Γ имеет касательную, а функция Грина $G(z,\zeta)$ области D — нормальную производную. Тогда*

$$M(z,\zeta) = \frac{\partial G(z,\zeta)/\partial n_\zeta}{\partial G(z_0,\zeta)/\partial n_\zeta}.$$

Доказательство. Эта теорема легко следует из предыдущей. □

Пусть $SK(R_1,R_2)$ — класс субгармонических функций на $D_+(R_1,R_2)$, имеющих в этом полукольце положительную гармоническую мажоранту, $G(z,\zeta)$ — функция Грина полукольца $D_+(R_1,R_2)$. Следующая теорема доказана в [9, Теорема 7].

Теорема 4.7. *Пусть $v \in SK(R_1,R_2)$, μ — риссовская мера функции $v(z)$, $G(z,\zeta)$ — функция Грина полукольца $D_+(R_1,R_2)$. Тогда существуют вещественные числа a_j, $j = 1,\dots,4$, однозначно определяемые функцией $v(z)$ меры ν_j, $j = 1,2$, на интервале $(0,\pi)$ и мера ν на множестве $I(R_1,R_2) = (-R_2,-R_1) \cup (R_1,R_2)$, причем, если z_0 такая точка, что $v(z_0) > -\infty$, тогда*

- *мера $\tilde\mu$, $d\tilde\mu(\zeta) \overset{\mathrm{def}}{=} G(z_0,\zeta)\, d\mu(\zeta)$, конечна на $D_+(R_1,R_2)$,*
- *меры $\tilde\nu_j$, $d\tilde\nu_j(\zeta) \overset{\mathrm{def}}{=} \dfrac{\partial G(z_0,R_je^{i\varphi})}{\partial n_\zeta}\, d\nu_j(\zeta)$, $j = 1,2$, имеют ограниченную полную вариацию на интервале $(0,\pi)$,*
- *мера $\tilde\nu$, $d\tilde\nu(t) \overset{\mathrm{def}}{=} \dfrac{\partial G(z_0,t)}{\partial n_\zeta}\, d\nu(t)$, имеет ограниченную полную вариацию на $I(R_1,R_2)$.*

При $z \in D_+(R_1, R_2)$ имеет место равенство

$$v(z) = -\iint\limits_{D_+(R_1,R_2)} G(z,\zeta)\,d\mu(\zeta) + \sum_{j=1}^{2} \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^\pi \frac{\partial G(z, R_j e^{i\varphi})}{\partial n_\zeta}\,d\nu_j(\varphi) + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{I(R_1,R_2)} \frac{\partial G(z,t)}{\partial n_t}\,d\nu(t)$$
$$+ a_1 M(z, R_1) + a_2 M(z, -R_1) + a_3 M(z, R_2) + a_4 M(z, -R_2),$$

где $M(z,\zeta)$ — функция Мартина полукольца $D_+(R_1, R_2)$, отвечающая граничной точке ζ, а интегралы понимаются как несобственные с особыми точками на концах интегрирования. Имеют место формулы:

$$\nu_1([\alpha,\beta]) = \lim_{r\to R_1+0} R_1 \int\limits_\alpha^\beta v(re^{i\varphi})\,d\varphi, \quad \nu_2([\alpha,\beta]) = \lim_{r\to R_2-0} R_2 \int\limits_\alpha^\beta v(re^{i\varphi})\,d\varphi,$$

если $\quad 0 < \alpha < \beta < \pi, \quad \nu_j(\{\alpha\}) = \nu_j(\{\beta\}) = 0, \quad j = 1, 2,$

$$\nu([a,b]) = \lim_{y\to+0} \int\limits_a^b v(x+iy)\,dx, \quad \text{если} \quad [a,b] \in I(R_1,R_2), \quad \nu(\{a\}) = \nu(\{b\}) = 0,$$

$$d\nu_j(\varphi) = R_j v(R_j e^{i\varphi})d\varphi + d\sigma_j(\varphi)d\varphi, \quad j = 1, 2, \quad d\nu(t) = v(t)dt + d\sigma(t),$$

где почти всюду

$$v(R_1 e^{i\varphi}) = \lim_{r\to R_1+0} v(re^{i\varphi}), \qquad v(R_2 e^{i\varphi}) = \lim_{r\to R_2-0} v(re^{i\varphi}), \qquad v(t) = \lim_{y\to+0} v(t+iy),$$

а σ_j, $j = 1, 2$, σ, — меры, сингулярные относительно меры Лебега (невозрастающие ограниченные функции на $(0, \pi)$, на I, для которых почти всюду $\sigma_j' = 0$, $\sigma' = 0$).

Если, кроме этого, функция v является субгармонической и имеет положительную гармоническую мажоранту на более широком полукольце

$$D_+(R_1', R_2'), \qquad 0 < R_1' < R_1 < R_2 < R_2',$$

то

$$v(z) = -\iint\limits_{D_+(R_1,R_2)} G(z,\zeta)d\mu(\zeta) + \sum_{j=1}^{2} \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^\pi \frac{\partial G(z, R_j e^{i\varphi})}{\partial n_\zeta} v(R_j e^{i\varphi})d\varphi$$
$$+ \frac{1}{2\pi} \int\limits_{I(R_1,R_2)} \frac{\partial G(z,t)}{\partial n_t} d\nu(t). \tag{4.3}$$

Зафиксируем $R > 0$ и далее будем рассматривать класс субгармонических функций на $D_+(R)$, имеющих в каждом полукольце $D_+(R_1, R_2)$, $R_1 > R$, положительную гармоническую мажоранту. Обозначим этот класс через $SK(R)$.

Теорема 4.8. *Пусть $v \in SK(R)$ и пусть μ — ее риссовская мера. Тогда*

1) *существует мера ν на $I_R = (-\infty, -R) \cup (R, +\infty)$, имеющая ограниченную полную вариацию на любом сегменте $[a,b] \subset I_R$, причем, если $\nu(\{a\}) = \nu(\{b\}) = 0$, то*

$$\nu([a,b]) = \lim_{y\to+0} \int\limits_a^b v(x+iy)dx,$$

2) *для почти всех в смысле меры Лебега $x \in I_R$ существует предел*

$$v(x) = \lim_{y\to+0} v(x+iy)dx,$$

причем $v(x)$ принадлежит классу L_1 интегрируемых по мере Лебега функций на любом сегменте $[a,b] \subset I_R$,

3) *$d\nu(x) = v(x)dx + d\sigma(x)$, где σ — сингулярная относительно меры Лебега мера на I_R,*
4) *если функция v ограничена сверху на полукольце $D_+(x_0, x_0+\delta) \subset D_+(R)$, то мера σ отрицательна на $[-x_0-\delta, -x_0] \cup [x_0, x_0+\delta]$,*
5) *если $d\mu_1(\zeta) = 2\pi \operatorname{Im}\zeta d\mu(\zeta)$, то мера μ_1 конечна на каждом компакте $K \subset \overline{D_+(R)} \backslash L_R$,*
6) *для любого $r > R$*

$$\int_0^\pi |v(re^{i\theta})| \sin\theta d\theta < \infty.$$

Доказательство. Рассмотрим полукольцо $D_+(R_1, 4R_1)$, $R_1 > R$. По теореме 3.1 существует конечная мера ν на $I(R_1, 4R_1)$ такая, что при $z \in D_+(R_1, 4R_1)$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} v(z) = -\iint\limits_{D_+(R_1,4R_1)} G(z,\zeta)\, d\mu(\zeta) + \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \frac{\partial G(z, R_1e^{i\varphi})}{\partial n_\zeta} v(R_1e^{i\varphi})\, d\varphi \\ + \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \frac{\partial G(z, 4R_1e^{i\varphi})}{\partial n_\zeta} v(4R_1e^{i\varphi})\, d\varphi + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{I(R_1,4R_1)} \frac{\partial G(z,t)}{\partial n_t}\, d\nu(t). \end{aligned} \tag{4.4}$$

Причем, если $[a,b] \in I(R_1, 4R_1)$, $\nu(\{a\}) = \nu(\{b\}) = 0$, то

$$\nu([a,b]) = \lim_{y\to+0} \int_a^b v(x+iy)dx.$$

Из написанной формулы видно, что мера ν не зависит от R_1 и определяется однозначно на всем множестве I_R. Поскольку мера ν имеет ограниченную полную вариацию на любом сегменте $I(R_1, 4R_1) \subset I_R$, по теореме Лебега

$$d\nu(t) = \varphi(t)\, dt + d\sigma(t),$$

где φ принадлежит L_1 на любом сегменте $I(R_1, 4R_1) \subset I_R$, а σ — сингулярная относительно меры Лебега мера.

Пусть $v(z_0 > -\infty)$, $z_0 \in D_+(R_1, R_2)$, $G(z,\zeta)$ — функция Грина полукольца $D_+(R_1, 4R_1)$. Тогда мера μ_2, $d\mu_2(\zeta) = G(z_0,\zeta)d\mu(\zeta)$, есть конечная мера на $D_+(R_1, 4R_1)$. Так как функция $\dfrac{\operatorname{Im}\zeta}{G(z_0,\zeta)}$ есть ограниченная функция на $D_+\left(\dfrac{3}{2}R_1, \dfrac{7}{2}R_1\right)$, мера

$$d\mu_1(\zeta) = 2\pi \operatorname{Im}\zeta\, d\mu(\zeta) = 2\pi \frac{\operatorname{Im}\zeta}{G(z_0,\zeta)}\, d\mu_2(\zeta)$$

есть ограниченная мера на $D_+(R_1, 4R_1)$. Так как $R_1 > R$ произвольно, мера μ_1 конечна на любом компакте $K \subset \overline{D_+(R)} \setminus L_R$.

Мы будем считать меру μ_1 мерой во всей плоскости, причем ее ограничение на полукольцо $D_+(R)$ равно $2\pi \operatorname{Im}\zeta\, d\mu(\zeta)$, а ограничение на $\mathbb{C} \setminus D_+(R)$ равно нулю.

Из теорем 3.1 и 4.6 следует, что меры

$$d\nu_1(\varphi) = \frac{\partial G(z_0, R_1e^{i\varphi})}{\partial n} v(R_1e^{i\varphi})\, d\varphi, \qquad d\nu_2(\varphi) = \frac{\partial G(z_0, 4R_1e^{i\varphi})}{\partial n} v(4R_1e^{i\varphi})\, d\varphi,$$

имеют ограниченную полную вариацию на сегменте $[0,\pi]$. Поэтому

$$\int_0^\pi \frac{\partial\, G(z_0, R_1e^{i\varphi})}{\partial n} |v(R_1e^{i\varphi})|\, d\varphi < \infty, \qquad \int_0^\pi \frac{\partial\, G(z_0, 4R_1e^{i\varphi})}{\partial n} |v(4R_1e^{i\varphi})|\, d\varphi < \infty.$$

Так как
$$\frac{\sin\varphi}{\partial\, G(z_0, R_1 e^{i\varphi})/\partial n} \leqslant M(z_0, \pm R_1) \quad \text{при} \quad \varphi \in (0,\pi),$$
имеем
$$\int\limits_0^{\pi} |v(R_1 e^{i\theta})| \sin\theta\, d\theta < \infty.$$

Пусть $G_1(z,\zeta)$ — функция Грина верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$. Тогда отношение $\dfrac{G(z,\zeta)}{G_1(z,\zeta)}$ ограничено при $z,\zeta \in D_+(R_1, 4R_1)$. Кроме того, $\dfrac{G_1(z,\zeta)}{\operatorname{Im}\zeta} = -L(z,\zeta)$.

Тогда
$$v_1(z) = \iint\limits_{D_+(R_1,4R_1)} G(z,\zeta)\, d\mu(\zeta) = -\frac{1}{2\pi} \iint\limits_{D_+(R_1,4R_1)} L(z,\zeta) \frac{G(z,\zeta)}{G_1(z,\zeta)}\, d\mu_1(\zeta)$$
$$\leqslant -\frac{M}{2\pi} \iint\limits_{D_+(R_1,4R_1)} L(z,\zeta)\, d\mu_1(\zeta).$$
Тогда по теореме 3.1 $\lim\limits_{y\to+0} v_1(x+iy) = 0$ почти всюду.

Так как при фиксированном $x \in I(R_1, 4R_1)$ справедливы соотношения
$$\frac{\partial G(x+iy, R_1 e^{i\varphi})/\partial n}{\partial G(z_0, R_1 e^{i\varphi})/\partial n} \overset{y\to+0}{\rightrightarrows} 0, \qquad \frac{\partial G(x+iy, 4R_1 e^{i\varphi})/\partial n}{\partial G(z_0, 4R_1 e^{i\varphi})/\partial n} \overset{y\to+0}{\rightrightarrows} 0, \quad \varphi \in (0,\pi),$$
для функций
$$v_2(z) = \frac{R_1}{2\pi} \int\limits_0^{\pi} \frac{\partial G(z, R_1 e^{i\varphi})}{\partial n} v(R_1 e^{i\varphi})\, d\varphi = \frac{R_1}{2\pi} \int\limits_0^{\pi} \frac{\partial G(z, R_1 e^{i\varphi})/\partial n}{\partial G(z_0, R_1 e^{i\varphi})/\partial n}\, d\nu_1(\varphi),$$
$$v_3(z) = \frac{4R_1}{2\pi} \int\limits_0^{\pi} \frac{\partial G(z, 4R_1 e^{i\varphi})}{\partial n} v(4R_1 e^{i\varphi})\, d\varphi = \frac{4R_1}{2\pi} \int\limits_0^{\pi} \frac{\partial G(z, 4R_1 e^{i\varphi})/\partial n}{\partial G(z_0, R_1 e^{i\varphi})/\partial n}\, d\nu_2(\varphi),$$
справедливы равенства $\lim\limits_{y\to+0} v_j(x+iy) = 0$, $j = 2, 3$.

Так как
$$\frac{\partial G(x+iy, t)}{\partial n} - \frac{\partial G_1(x+iy, t)}{\partial n} \overset{y\to+0}{\rightrightarrows} 0, \quad \text{при} \quad x \in I\left(\frac{3R_1}{2}, \frac{7R_1}{2}\right), \quad t \in I(R_1, 4R_1),$$
для функции
$$v_4(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{I(R_1,4R_1)} \left(\frac{\partial G(z,t)}{\partial n} - \frac{\partial G_1(z,t)}{\partial n}\right) d\nu(t)$$
справедливо равенство
$$\lim_{y\to+0} v_4(x+iy) = 0, \quad x \in I\left(\frac{3R_1}{2}, \frac{7R_1}{2}\right).$$

Пусть
$$v_5(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{I(R_1,4R_1)} \frac{\partial G_1(z,t)}{\partial n}\, d\nu(t)$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{I(R_1,4R_1)} \frac{\partial G_1(z,t)}{\partial n} \varphi(t)\, dt + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{I(R_1,4R_1)} \frac{\partial G_1(z,t)}{\partial n}\, d\sigma(t).$$

Из теоремы 3.3 следует, что почти для всех $x \in I(R_1, 4R_1)$ выполняется равенство

$$\lim_{y\to+0} v_5(x+iy) = \varphi(x).$$

Из полученных равенств для v_j, $j = \overline{1,5}$, и (4.4) следует, что почти для всех $x \in I(R)$ выполняется равенство

$$\lim_{y\to+0} v(x+iy) = \varphi(x).$$

Нам осталось доказать утверждение 4 теоремы. Без ограничения общности, можно считать, что $x_0 = 2R_1$, $\delta = R_1$.

Так как меры $d\sigma(t)$ и $v(t)dt$ взаимно сингулярны, получим

$$d\nu_+(t) = v_+(t) + d\sigma_+(t), \qquad d\nu_-(t) = v_-(t) + d\sigma_-(t).$$

По теореме 4.2 наилучшие гармонические мажоранты функций $v(z)$

$$v_7(z) = v(z) + v_1(z)$$

в полукольце $D_+(R_1, R_2)$ совпадают. По теореме 4.4 наилучшая гармоническая мажоранта функции $v_7(z)$ в полукольце $D_+(R_1, R_2)$ имеет вид

$$H(z) = \sum_{j=1}^{2} \frac{R_j}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\partial G(z, R_j e^{i\varphi})}{\partial n_\zeta} v_+(R_j e^{i\varphi})\, d\varphi$$
$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{I(R_1,R_2)} \frac{\partial G(z,t)}{\partial n_t}\, d\nu_+(t) + \frac{1}{2\pi} \int_{I(R_1,R_2)} \frac{\partial G(z,t)}{\partial n_t}\, d\sigma_+(t).$$

Поскольку, по условию теоремы $v(z) \leqslant K$ в полукольце $D_+(R_1, R_2)$, а $H(z)$ — наилучшая гармоническая мажоранта функции $v(z)$ в этом полукольце, имеем $H(z) \leqslant K$. В частности,

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{I(R_1,R_2)} \frac{\partial G(z,t)}{\partial n_t} d\sigma_+(t) \leqslant K.$$

Из теоремы Фату следует, что почти всюду при $x \in I(R_1, R_2)$ выполняется равенство

$$\lim_{y\to+0} u(x+iy) = \sigma'_+(x) = 0.$$

По теореме 4.7, если $[a,b] \subset I(R_1, R_2)$, $\sigma(\{a\}) = \sigma(\{b\}) = 0$, тогда справедливо равенство

$$\sigma_+([a,b]) = \int_a^b u(x+iy)dx.$$

Поскольку $u(z) \leqslant K$, по теореме Лебега о мажорируемой сходимости $\sigma_+([a,b]) = 0$. Таким образом, σ_+ есть нулевая мера на $I(R_1, R_2)$, а $\sigma = \sigma_+ - \sigma_- = \sigma_-$ есть отрицательная мера на $I(R_1, R_2)$. Теорема полностью доказана. $\square$

Сейчас мы введем важное в теории субгармонических функций на полукольце понятие полной меры субгармонической функции. Полная мера будет определена не на всем множестве субгармонических функций на полукольце, а только на классе $SK(R)$.

Определение 4.1. *Пусть функция $v \in SK(R)$. Полной мерой функции v называется такая мера λ, что*

$$d\lambda(\zeta) = 2\pi \operatorname{Im}\zeta\, d\mu(\zeta) - d\nu(t), \quad t = \operatorname{Re}\zeta, t \in I(R) = (-\infty, -R] \cup [R, +\infty),$$

где μ риссовская мера функции v, $d\nu(t) = v(t)dt + d\sigma(t)$ — граничная мера функции v, а σ — сингулярная граничная мера функции v.

Замечание 4.4. *Мера λ обладает следующими свойствами:*

1) *λ — конечная мера на каждом компакте $K \subset \overline{D_+(R)}$;*
2) *λ — неотрицательная мера на $D_+(R)$;*
3) *λ равна нулю на дополнении $\mathbb{C} \setminus \overline{D_+(R)}$.*

Наоборот, если мера λ удовлетворяет условиям 1) — 3), то существует функция $v \in SK(R)$, с полной мерой равной λ.

Меру λ мы будем рассматривать как меру во всей плоскости. Ее ограничение на $\mathbb{C} \setminus \overline{D_+(R)}$ есть нулевая мера, ограничение на $D_+(R)$ есть положительная мера, а ограничение на $I(R)$ равно $-\nu$, где ν — граничная мера. Граничная мера ν, вообще говоря, — знакопеременная мера (заряд).

В следующей теореме мы устанавливаем с какой точностью функции класса $SK(R)$ определяются своей полной мерой.

Теорема 4.9. *Пусть $v_1, v_2 \in SK(R)$. Для того чтобы полные меры функций v_1 и v_2 совпадали, необходимо и достаточно, чтобы существовала аналитическая на множестве $\mathbb{C} \setminus C(0, R)$ функция g, принимающая вещественные значения на $I(R)$, такая, что*

$$v_1(z) - v_2(z) = \operatorname{Im} g(z), \quad z \in D_+(R). \tag{4.5}$$

Доказательство. Пусть выполняется равенство (4.5). Поскольку $\Delta g(z) \equiv 0$, функции v_1 и v_2 имеют одинаковые риссовские меры. Поскольку

$$\lim_{y \to +0} \int\limits_{[a,b] \cap I(R)} \operatorname{Im} g(x + iy) dx = 0,$$

у функций v_1 и v_2 одинаковые граничные меры. Следовательно, у этих функций одинаковые полные меры и одинаковые граничные меры.

Обратно, пусть у функций v_1 и v_2 одинаковые полные меры. Тогда у них одинаковые риссовские меры и одинаковые граничные меры. Пусть $R_1 > R$ — произвольное число. По теореме (3.1)

$$v_1(z) - v_2(z) = \int\limits_0^\pi \frac{\partial G(z, Re^{i\varphi})}{\partial n_\zeta} (v_1(Re^{i\varphi}) - v_2(Re^{i\varphi}))\, d\varphi$$
$$+ \int\limits_0^\pi \frac{\partial G(z, R_1 e^{i\varphi})}{\partial n_\zeta} (v_1(R_1 e^{i\varphi}) - v_2(R_1 e^{i\varphi}))\, d\varphi.$$

В правой части стоит гармоническая функция в полукольце $D_+(R, R_1)$, непрерывно продолжающаяся нулем на $I(R, R_1) = (-R_1, -R) \cup (R, R_1)$. Поскольку R_1 — произвольное число, функция $v_1 - v_2$ есть гармоническая функция на $D_+(R)$, непрерывно продолжающаяся нулем на $I(R)$. По принципу симметрии Шварца эта функция продолжается как гармоническая на $\{z : |z| > R, \ \operatorname{Im} z < 0\}$. Таким образом, существует гармоническая функция h на $\mathbb{C} \setminus B(R)$, обращающаяся в ноль на $I(R)$ и такая, что $v_1 - v_2 = h$ при $\operatorname{Im} z > 0$. Пусть $-h_1$ — функция гармонически сопряженная с функцией h. Тогда $g = h + ih_1$ есть аналитическая функция на $\mathbb{C} \setminus B(R)$, принимающая вещественные значения на $I(R)$ и $h = \operatorname{Im} g$. Теорема доказана. □

Обозначим через $JS(R)$ класс субгармонических функций на $D_+(R)$ таких, что $\varlimsup\limits_{z \to t} v(z) \leqslant 0$ для любого $t \in I(R)$.

Замечание 4.5. *Для субгармонических функций из класса $JS(R)$ полная мера — неотрицательная мера.*

Предложение 4.1. *$JS(R) \subset SK(R)$.*

Доказательство. Пусть

$$v \in JS(R), \qquad P = \{z : \operatorname{Re} z \in [a,b] \subset I(R),\ 0 < \operatorname{Im} z < T\}.$$

Так как

$$\varlimsup_{y\to+0} v(x+iy) \leqslant 0,$$

функция $v(a+iy)$ ограничена сверху при $y \in (0,T)$. Это справедливо и для $v(b+iy)$. Функция $v(x+iT)$ ограничена сверху при $x \in [a,b]$. Из полунепрерывности сверху субгармонической функции следует, что

$$\varlimsup_{\substack{z\in P\\ z\to\zeta}} v(z) \leqslant \begin{cases} v(\zeta), & \operatorname{Im}\zeta > 0,\\ 0, & \operatorname{Im}\zeta > 0.\end{cases}$$

В частности, существует константа M такая, что

$$\varlimsup_{\substack{z\in P\\ z\to\zeta}} v(z) \leqslant M, \quad \zeta \in \partial P.$$

Из принципа максимума следует, что $v(z) \leqslant M$ на P. Предложение доказано. □

Сейчас будет дано определение главного для нас объекта — δ–субгармонической функции.

Обычно δ–субгармонической функцией называют функцию представимую в виде разности субгармонических функций. Однако, такое определение нуждается в корректировке. Скорректированное определение δ–субгармонической функции приведено в [6].

Определение 4.2. *Функция v на области $G \subset \mathbb{C}$ называется δ-субгармонической, если выполняются следующие три условия.*

1) *Существует множество F емкости ноль такое, что на множестве $G \setminus F$ справедливо представление $v(z) = v_1(z) - v_2(z)$, где $v_1(z)$ и $v_2(z)$ — субгармонические функции на области G. С помощью этого представления определяется риссовская мера μ функции v по формуле $\mu = \mu_1 - \mu_2$, где μ_1 и μ_2 — риссовские меры функций $v_1(z)$ и $v_2(z)$. Определяющее множество H функции v — это множество таких точек $z \in G$, для которых существует такое $\delta > 0$, что выполняется неравенство*

$$\int_0^\delta \frac{|\mu|(B(z,t))}{t}dt < \infty.$$

2) *Для любой точки $z \in H$ выполняется равенство*

$$v(z) = \lim_{\delta\to 0}\frac{1}{2\pi\delta}\int_0^{2\pi} w(z+\delta e^{i\varphi})d\varphi.$$

3) $v(z) = 0$ *для $z \in G \setminus H$.*

Введём теперь класс $\delta S(R)$ дельта–субгармонических функций на $D_+(R)$ как разность $\delta S(R) = JS(R) - JS(R)$. При этом разность понимается с учетом сделанного выше замечания.

Предложение 4.2. *$\delta S(R) = SK(R) - SK(R)$.*

Доказательство. Пусть $v \in \delta S(R)$. Тогда

$$v = v_1 - v_2, \qquad v_1, v_2 \in JS(R) \subset SK(R).$$

Отсюда следует, что

$$\delta S(R) \subset SK(R) - SK(R).$$

Пусть теперь $v \in SK(R) - SK(R)$, λ — ее полная мера, $\lambda = \lambda_+ - \lambda_-$ — жорданово разложение меры λ. Пусть функции $v_1, v_2 \in SK(R)$ такие, что λ_+ и λ_- их полные меры (такие функции существую в силу замечания 4.4). Тогда $v_1, v_2 \in JS(R)$. Имеем

$$v(z) = v_1(z) - v_2(z) + \operatorname{Im} g,$$

где g как в теореме 4.5. Итак, мы получили, что

$$v \in \delta S(R), \quad SK(R) - SK(R) \subset JS(R) - JS(R) = \delta S(R).$$

Предложение доказано. $\square$

5. Коэффициенты Фурье функции $v \in \delta S(R)$ в окрестности L_R

Коэффициенты Фурье функции $v \in \delta S(R)$ в окрестности L_R определяются равенством:

$$c_k(r, v) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\pi v((r-R)e^{i\theta}) \sin k\theta \, d\theta, \quad R < r \leqslant 2R, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Нам понадобится обобщенная формула Карлемана для полукольца $D_+((r-R), 4(r-R))$, которая может быть получена из формулы (16) в статье [10]. Сформулируем её в виде теоремы. Прежде введём обозначение. Пусть λ — произвольная мера в замкнутой полуплоскости $\overline{\mathbb{C}_+}$ определим меру λ_m, $m \in \mathbb{N}$, равенством

$$d\lambda_m(\zeta) = \frac{\sin m\varphi}{\operatorname{Im} \zeta} \tau^m \, d\lambda(\zeta), \quad \zeta = \tau e^{i\varphi},$$

где $\dfrac{\sin m\varphi}{\sin \varphi}$ при $\varphi = 0, \pi$ определяется по непрерывности.

Теорема 5.1. *Пусть $v \in \delta S(R)$, λ — полная мера функции v. Тогда для любого r, $R < r \leqslant 2R$, справедлива формула*

$$\begin{aligned}
&\int\limits_0^\pi v(2(r-R)e^{i\theta}) \sin m\theta \, d\theta \\
&\qquad = \frac{2^{m-2}}{(r-R)(4^m+1)} \int\limits_0^\pi \left(4v\left((r-R)e^{i\varphi}\right) + v(4(r-R)e^{i\varphi})\right) \sin m\varphi \, d\varphi \\
&\qquad - \frac{2^m}{2m(4^m+1)(r-R)^m} \int\limits_{(r-R)}^{2(r-R)} \left(1 - \frac{(r-R)^{2m}}{\tau^{2m}}\right) d\lambda_m(\tau) \\
&\qquad - \frac{8^m r^m}{2m(4^m+1)} \int\limits_{2(r-R)}^{4(r-R)} \left(\frac{1}{\tau^{2m}} - \frac{1}{16^m (r-R)^{2m}}\right) d\lambda_m(\tau).
\end{aligned} \tag{5.1}$$

Преобразуем формулу (5.1). Для этого, интегрируя по частям в правой части два последних члена, получим

$$\int_0^\pi v(2(r-R)e^{i\theta})\sin m\theta\, d\theta$$
$$=\frac{2^{m-2}}{(r-R)(4^m+1)}\int_0^\pi \left(4v\left((r-R)e^{i\varphi}\right)+v(4(r-R)e^{i\varphi})\right)\sin m\varphi\, d\varphi \tag{5.2}$$
$$+\frac{2^m(r-R)^m}{4^m+1}\left(\int_{(r-R)}^{2(r-R)}\frac{\lambda_m(\tau)}{\tau^{2m+1}}\,d\tau-4^m\int_{2(r-R)}^{4(r-R)}\frac{\lambda_m(\tau)}{\tau^{2m+1}}\,d\tau\right).$$

В частности, при $m=1$ формула (5.2) имеет вид:

$$\int_0^\pi v(2(r-R)e^{i\theta})\sin\theta\, d\theta=\frac{1}{10(r-R)}\int_0^\pi \left(4v\left((r-R)e^{i\varphi}\right)+v(4(r-R)e^{i\varphi})\right)\sin\varphi\, d\varphi$$
$$+\frac{2(r-R)}{5}\left(\int_{(r-R)}^{2(r-R)}\frac{\lambda(\tau)}{\tau^{3}}\,d\tau-4\int_{2(r-R)}^{4(r-R)}\frac{\lambda(\tau)}{\tau^{3}}\,d\tau\right). \tag{5.3}$$

Если $v=v_+-v_-$, а $\lambda=\lambda_+-\lambda_-$ — разложение Жордана меры λ, то формулу (5.3) можно представить как

$$\int_0^\pi v_+(2(r-R)e^{i\theta})\sin\theta\, d\theta$$
$$+\frac{1}{10(r-R)}\int_0^\pi \left(4v_-\left((r-R)e^{i\varphi}\right)+v_-(4(r-R)e^{i\varphi})\right)\sin\varphi\, d\varphi$$
$$+\frac{2(r-R)}{5}\left(\int_{(r-R)}^{2(r-R)}\frac{\lambda_-(\tau)}{\tau^{3}}\,d\tau+4\int_{2(r-R)}^{4(r-R)}\frac{\lambda_+(\tau)}{\tau^{3}}\,d\tau\right)=\int_0^\pi v_-(2(r-R)e^{i\theta})\sin\theta\, d\theta \tag{5.4}$$
$$+\frac{1}{10(r-R)}\int_0^\pi \left(4v_+\left((r-R)e^{i\varphi}\right)+v_+(4(r-R)e^{i\varphi})\right)\sin\varphi\, d\varphi$$
$$+\frac{2(r-R)}{5}\left(\int_{(r-R)}^{2(r-R)}\frac{\lambda_+(\tau)}{\tau^{3}}\,d\tau+4\int_{2(r-R)}^{4(r-R)}\frac{\lambda_-(\tau)}{\tau^{3}}\,d\tau\right).$$

Перепишем формулу (5.2) терминах коэффициентов Фурье:

$$c_m(2r,v)=\frac{2^{m-2}}{(r-R)(4^m+1)}\left(4c_m\left(r,v\right)+c_m(4r,v)\right)$$
$$+\frac{2^{m+1}(r-R)^m}{\pi(4^m+1)}\left(\int_{(r-R)}^{2(r-R)}\frac{\lambda_m(\tau)}{\tau^{2m+1}}\,d\tau-4^m\int_{2(r-R)}^{4(r-R)}\frac{\lambda_m(\tau)}{\tau^{2m+1}}\,d\tau\right). \tag{5.5}$$

6. ДЕЛЬТА–СУБГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ КОНЕЧНОГО γ–ТИПА НА $D_+(R)$ В ОКРЕСТНОСТИ L_R

Пусть $v \in \delta S(R)$, $v = v_+ - v_-$, λ — полная мера функции v, $\lambda = \lambda_+ - \lambda_-$ — жорданово разложение меры λ. Обозначим через

$$m_R(r, v) = (r - R)\int\limits_0^{\pi} v_+(2(r-R)e^{i\theta})\sin\theta\, d\theta$$

$$+\frac{1}{10}\int\limits_0^{\pi}\left(4v_-\left((r-R)e^{i\varphi}\right) + v_-(4(r-R)e^{i\varphi})\right)\sin\varphi\, d\varphi,$$

$$N_R(r, v) = \frac{2(r-R)^2}{5}\left(\int\limits_{(r-R)}^{2(r-R)}\frac{\lambda_-(\tau)}{\tau^3}\, d\tau + 4\int\limits_{2(r-R)}^{4(r-R)}\frac{\lambda_+(\tau)}{\tau^3}\, d\tau\right),$$

$$T_R(r, v) = m_R(r, v) + N_R(r, v), \quad r > R.$$

Из (5.4) получаем

$$T_R(r, v) = T_R(r, -v). \tag{6.1}$$

Определение 6.1. *Строго положительная непрерывная возрастающая и неограниченная функция $\gamma(r)$, определенная на R_+, называется функцией роста.*

Определение 6.2. *Пусть γ — функция роста. Функция $v \in \delta S(R)$ называется функцией конечного γ–типа в окрестности полуокружности L_R, если существуют постоянные A и $B > 0$ такие, что*

$$T_R(r, v) \leqslant A\,\gamma\left(\frac{B}{r-R}\right) \tag{6.2}$$

для всех r, $R < r \leqslant 2R$.

Класс данных δ–субгармонических функций конечного γ–типа в окрестности полуокружности L_R обозначим через $\delta S_{L_R}(R, \gamma)$. Через $JS_{L_R}(R, \gamma) \subset JS(R)$ обозначим соответствующий класс субгармонических функций. Понятно, что $JS_{L_R}(R, \gamma) \subset \delta S_{L_R}(R, \gamma)$.

Определение 6.3. *Положительная мера λ на $D_+(R)$ имеет конечную γ–плотность в окрестности полуокружности L_R, если при некоторых положительных A и B для всех r, $R < r \leqslant 2R$, выполняется неравенство*

$$\lambda(r-R) \leqslant A\,\gamma\left(\frac{B}{r-R}\right). \tag{6.3}$$

Заметим, что из (6.3) следует неравенство

$$\int\limits_{(r-R)}^{2(r-R)}\frac{\lambda(\tau)}{\tau^3}\, d\tau \leqslant A\,\gamma\left(\frac{B}{r-R}\right) \tag{6.4}$$

при некоторых положительных A и B для всех r, $R < r \leqslant 2R$. Наоборот из (6.4) следует неравенство (6.3).

Замечание 6.1. *Пусть $v \in J\delta_{L_R}(R, \gamma)$, λ — полная мера функции v, $\lambda = \lambda_+ - \lambda_-$ — жорданово разложение меры λ, $|\lambda| = \lambda_+ + \lambda_-$. Тогда мера $|\lambda|$ имеет конечную γ–плотность в окрестности полуокружности L_R.*

Это следствие определений 6.2 и 6.3.

Сформулируем и докажем критерий принадлежности дельта–субгармонической функции v классу $J\delta_{L_R}(R,\gamma)$.

Теорема 6.1. *Пусть $v \in J\delta(R)$, $\lambda = \lambda_+ - \lambda_-$ — полная мера функции v, γ — функция роста. Следующие два утверждения эквивалентны:*

1) $J\delta_{L_R}(R,\gamma)$;
2) *мера λ_+ (или мера λ_-) имеет конечную γ–плотность в окрестности полуокружности L_R и для всех r, $R < r \leqslant 2R$, при некоторых положительных A и B выполняется неравенство*

$$|c_k(2r,v)| \leqslant \frac{A}{r-R}\gamma\left(\frac{B}{r-R}\right), \quad k \in \mathbb{N}. \tag{6.5}$$

Доказательство. Доказательство проведём по схеме 1) $\Longrightarrow$ 2) $\Longrightarrow$ 1). Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). То, что меры $\lambda_+(v)$ и $\lambda_-(v)$ имеют конечную γ_2–плотность в окрестности полуокружности L_R прямо следует из определения класса $\delta S_{L_R}(R,\gamma)$ и равенства (6.1). Тогда из замечания 6.1 следует, что мера $|\lambda|$ имеет конечную γ–плотность в окрестности полуокружности L_R, то есть

$$|\lambda|(r-R) \leqslant A\,\gamma\left(\frac{B}{r-R}\right) \tag{6.6}$$

при некоторых положительных A и B для всех r, $R < r \leqslant 2R$.

Из неравенства (6.2) следует, что

$$m(r,v) \leqslant A\,\gamma\left(\frac{B}{r-R}\right),$$

при некоторых A и B для всех r, $R < r \leqslant 2R$. Из соотношения (6.1) также следует неравенство

$$m(r,-v) \leqslant A\,\gamma\left(\frac{B}{r-R}\right).$$

А значит для всех r, $R < r \leqslant 2R$,

$$\begin{gathered}\int_0^\pi |v(2(r-R)e^{i\varphi})|\sin\varphi\,d\varphi = \frac{m(r,v)+m(r,-v)}{r-R} \leqslant \frac{A}{r-R}\gamma\left(\frac{B}{r-R}\right),\\ |c_k(2r,v)| \leqslant \frac{2k}{\pi}\int_0^\pi |v(2(r-R)e^{i\varphi})|\sin\varphi\,d\varphi \leqslant \frac{Ak}{r-R}\gamma\left(\frac{B}{r-R}\right)\end{gathered} \tag{6.7}$$

Отметим также неравенство

$$\begin{aligned}|\lambda_m(r)| &= \left|\iint\limits_{C(0,r)} d\lambda_m(\zeta)\right| = \left|\iint\limits_{C(0,r)} \frac{\sin m\varphi}{\sin\varphi}\tau^{m-1}\,d\lambda(\zeta)\right|\\ &\leqslant m\iint\limits_{C(0,r)} \tau^{m-1}\,d|\lambda|(\zeta) \leqslant mr^{m-1}|\lambda|(r).\end{aligned}$$

Из (5.5), (6.4), (6.7), (6) получаем

$$|c_m(2r,v)| \leqslant \frac{2^{m-2}}{(r-R)(4^m+1)}\left(4\,|c_m(r,v)| + |c_m(4r,v)|\right)$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{2^{m+1}(r-R)^m}{\pi(4^m+1)}\left(\int\limits_{(r-R)}^{2(r-R)}\frac{|\lambda_m(\tau)|}{\tau^{2m+1}}\,d\tau+4^m\int\limits_{2(r-R)}^{4(r-R)}\frac{|\lambda_m(\tau)|}{\tau^{2m+1}}\,d\tau\right)\\
\leqslant&\frac{2^m mA}{(r-R)((4^m+1)}\,\gamma\left(\frac{B}{r-R}\right)\\
&+\frac{m2^{m+1}(r-R)^m}{\pi(4^m+1)}\left(\int\limits_{(r-R)}^{2(r-R)}\frac{|\lambda|(\tau)d\tau}{\tau^{m+2}}+4^m\int\limits_{2(r-R)}^{4(r-R)}\frac{|\lambda|(\tau)d\tau}{\tau^{m+2}}\right)\\
\leqslant&\frac{2^m mA}{(r-R)((4^m+1)}\,\gamma\left(\frac{B}{r-R}\right)\\
&+\frac{m2^{m+1}(r-R)^m|\lambda|(4(r-R))}{\pi(4^m+1)}\left(\int\limits_{(r-R)}^{2(r-R)}\frac{d\tau}{\tau^{m+2}}+4^m\int\limits_{2(r-R)}^{4(r-R)}\frac{d\tau}{\tau^{m+2}}\right)\\
\leqslant&\frac{2^m mA}{(r-R)((4^m+1)}\,\gamma\left(\frac{B}{r-R}\right)\\
&+\frac{m2^{m+1}(r-R)^m|\lambda|(4(r-R))}{\pi(4^m+1)(m+1)}\left(\frac{1}{(r-R)^{m+1}}+\frac{2^m}{(r-R)^{m+1}}\right)\\
\leqslant&\frac{A}{r-R}\,\gamma\left(\frac{B}{r-R}\right).
\end{aligned}
$$

Импликация 1) $\Longrightarrow$ 2) доказана.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 1). Из неравенства (6.5) и формулы (5.4) следует, что если одна из мер $\lambda_+(v)$ или $\lambda_-(v)$ имеет конечную γ–плотность в окрестности полуокружности L_R, то и другая мера имеет конечную γ–плотность в окрестности полуокружности L_R. Следовательно, мера $|\lambda|$ имеет конечную γ–плотность в окрестности полуокружности L_R. Далее мы оценим $v_+(z)$, используя формулу (4.3) при $R_1=r-R$, $R_2=4(r-R)$. Используя разложение в ряд Фурье (3.6), (3.7), при $q=\frac{1}{2}$, $R=2(r-R)=|z|$, получим

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\pi\frac{\partial G\left(z,4(r-R)e^{i\varphi}\right)}{\partial n}v\left(4(r-R)e^{i\varphi}\right)\,d\varphi+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\pi\frac{\partial G\left(z,(r-R)e^{i\varphi}\right)}{\partial n}v\left((r-R)e^{i\varphi}\right)\,d\varphi\right|\\
&\quad=\frac{1}{\pi(r-R)}\sum_{m=1}^\infty\frac{1}{2^m}\frac{4^m}{1+4^m}\left|2\int\limits_0^\pi v\left((r-R)e^{i\varphi}\right)\sin m\varphi d\varphi+\frac{1}{2}\int\limits_0^\pi v\left(4(r-R)e^{i\varphi}\right)\sin m\varphi d\varphi\right|\\
&\quad\leqslant\frac{1}{r}\sum_{m=1}^\infty\frac{1}{2^m}\left(|\,c_m\,(r,v)|+\frac{1}{4}|\,c_m(4r,v)|\right)\leqslant\frac{A}{r-R}\,\gamma\left(\frac{B}{r-R}\right),
\end{aligned}
$$

при некоторых $A,B>0$.

Из этого неравенства и формулы (4.3) получаем

$$
v_+(z)\leqslant\frac{1}{2\pi}\int\limits_{I(r,4r)}\frac{\partial G(z,t)}{\partial n_t}\,d|\nu|(t)+\frac{A}{r-R}\,\gamma\left(\frac{B}{r-R}\right). \tag{6.8}
$$

Теперь, используя ортогональность системы полиномов $\{\sin k\theta\}$, $k = 1, 2, \ldots$, на отрезке $[0, \pi]$ и формулы (3.4), (3.5), имеем

$$\int\limits_0^\pi v_+(2re^{i\theta})\sin\theta\,d\theta \leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_{I(r-R,4(r-R))}\frac{\partial G(z,t)}{\partial n_t}\,d|\nu|(t)\sin\theta\,d\theta + \frac{A}{r-R}\gamma\left(\frac{B}{r-R}\right)$$
$$\leqslant \frac{2\pi}{5}\left(\int\limits_{(r-R)}^{2(r-R)}\left(\frac{1}{r-R}-\frac{r-R}{t^2}\right)d|\nu|(t)\right.$$
$$\left.+\int\limits_{2(r-R)}^{4(r-R)}\left(\frac{4(r-R)}{t^2}-\frac{1}{4(r-R)}\right)d|\nu|(t)\right)$$
$$+\frac{A}{r-R}\gamma\left(\frac{B}{r-R}\right) = \frac{16\pi(r-R)}{5}\int\limits_{2(r-R)}^{4(r-R)}\frac{|\nu|(t)}{t^3}\,dt$$
$$-\frac{4\pi(r-R)}{5}\int\limits_{(r-R)}^{2(r-R)}\frac{|\nu|(t)}{t^3}\,dt + \frac{A}{r-R}\gamma\left(\frac{B}{r-R}\right)$$
$$\leqslant \frac{16\pi(r-R)}{5}\int\limits_{2(r-R)}^{4(r-R)}\frac{|\nu|(t)}{t^3}\,dt + \frac{A}{r-R}\gamma\left(\frac{B}{r-R}\right)$$
$$\leqslant \frac{A}{r-R}\gamma\left(\frac{B}{r-R}\right).$$

Отсюда следует, что функция v принадлежит пространству $J\delta_{L_R}\Big(R,\gamma\Big)$.

□

Для истинно–субгармонических функций справедливо следующее следствие из этой теоремы.

Теорема 6.2. *Пусть γ — функция роста, $v \in JS(R)$. Следующие два утверждения эквивалентны:*

1) $v \in JS_{L_R}(R,\gamma)$;
2) *для всех $r > R$ при некоторых положительных A, B выполняется неравенство*

$$|c_k(2r,v)| \leqslant \frac{A}{r-R}\gamma\left(\frac{B}{r-R}\right), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Действительно, если $v \in JS(R)$, то мера $\lambda_-(v) \equiv 0$ и, следовательно, имеет конечную γ–плотность. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Н.И. Ахиезер. *Элементы теории эллиптических функций.* М.: Наука. 1970.
2. Н.В. Говоров. *Краевая задача Римана с бесконечным индексом.* М.: Наука. 1986.
3. Г.М. Голузин. *Геометрическая теория функций комплексного переменного.* М: Наука. 1968.
4. А.Ф. Гришин. *О регулярности роста субгармонических функций. III* // Теор. функц., функц. анал. прилож. **7**, 59–84 (1968).

5. А.Ф. Гришин. *Субгармонические функции конечного порядка.* Дисс. ... докт. физ.–мат. наук. Харьков, 1992.
6. А.Ф. Гришин, Нгуен Ван Куинь, И.В. Поединцева. *Теоремы о представлении δ–субгармонических функций* // Вісн. харк. унів., сер. мат. прикл. мат. мех. **1133**:70, 56–75 (2014).
7. К.Г. Малютин. *Ряды Фурье и δ–субгармонические функции конечного γ–типа в полуплоскости* // Мат. сб. **192**:6, 51–70 (2001).
8. К.Г. Малютин. *Введение в теорию тригонометрически выпуклых функций.* М.: Физматлит. 2024.
9. К.Г. Малютин, А.А. Наумова. *Представление субгармонических функций в полукольце и в полукруге* // Чебышевский сб. **24**:5(91), 136–152 (2023).
10. К.Г. Малютин, А.А. Наумова. *Обобщенная формула Карлемана для полукольца и полукруга* // Челябинский физ.–мат. ж. **10**:4, 688–700 (2025).
11. Э.Б. Меньшикова. *Интегральные формулы типа Карлемана и Б.Я. Левина для мероморфных и субгармонических функций* // Изв. высш. учебн. завед., Мат. **2022**:6, 37–53 (2022).
12. И.И. Привалов. *Субгармонические функции.* Москва, Ленинград: Гостехиздат. 1937.
13. Б.Н. Хабибуллин. *О малости роста на мнимой оси целых функций экспоненциального типа с заданными нулями* // Мат. заметки **43**:5, 644–650 (1988).
14. У. Хейман, П. Кеннеди. *Субгармонические функции.* М.: Мир. 1980.
15. M. Brelot. *On topologies and boundaries in potential theory.* Springer, Berlin, Heidelberg, New York. 1971.
16. Jun-Iti Ito. *Subarmonic functions in the half-plane* // Trans. Amer. Math. Soc. **129**, 479–499 (1967).
17. P. Koosis. *Introduction to H_p Spaces.* Cambridge University Press, Cambridge (1998).
18. J.E. Littlewood. *On functions subharmonic in a circle. II.* // Proceedings L. M. S. **28**, 383–394 (1929).
19. L.A. Rubel, B.A. Taylor. *Fourier series method for meromorphic and entire functions* // Bull. Soc. Math. Fr. **96**, 53–96 (1968).
20. M. Tsuji. *Potential theory in modern function theory.* Maruzen, Tokyo. 1959.

Константин Геннадьевич Малютин,
Курский государственный университет,
ул. Радищева, 33,
305000, г. Курск, Россия
E-mail: malyutinkg@gmail.com

Нгуен Ван Куинь,
Ханойский промышленный университет,
ул. Кау Дьен, 298, район Тай Туу,
г. Ханой, Вьетнам
E-mail: nguyenvanquynh@haui.edu.vn

Алена Александровна Наумова,
Курский государственный университет,
ул. Радищева, 33,
305000, г. Курск, Россия
E-mail: aliona.filatowa2013@yandex.ru