ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 18 № 1 (2026). С. 39-67.

УДК 517.5

КРИТЕРИЙ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО ПРИНЦИПА

А.С. КРИВОШЕЕВ, О.А. КРИВОШЕЕВА

Аннотация. В работе изучаются подпространства функций аналитических в выпуклой области и инвариантных относительно оператора дифференцирования. Исследуется задача фундаментального принципа — представления всех функций из инвариантного подпространства рядами экспоненциальных мономов. Эти экспоненциальные мономы являются собственными и присоединенными функциями оператора дифференцирования в инвариантном подпространстве. Получен простой геометрический критерий фундаментального принципа. Получен также аналогичный критерий разрешимости интерполяционной задачи в пространствах целых функций экспоненциального типа.

Ключевые слова: инвариантное подпространство, фундаментальный принцип, экспоненциальный моном, целая функция, ряд экспонент.

Mathematics Subject Classification: 30D10

1. Введение

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность различных комплексных чисел λ_k и их кратностей n_k. Считаем, что $|\lambda_k|$ не убывает и $|\lambda_k| \to \infty$, $k \to \infty$. Символом $\Xi(\Lambda)$ обозначим множество пределов сходящихся последовательностей вида $\left\{\overline{\lambda}_{k_j}/|\lambda_{k_j}|\right\}_{j=1}^{\infty}$ ($\overline{\lambda}$ — комплексное сопряжение). Множество $\Xi(\Lambda)$ замкнуто и является подмножеством единичной окружности $S(0,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Введем семейство экспоненциальных мономов

$$\mathcal{E}(\Lambda) = \{z^n e^{\lambda_k z}\}_{k=1,n=0}^{\infty,n_k-1}.$$

Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — выпуклая область и

$$H_D(\varphi) = \sup_{z\in D} \mathrm{Re}(ze^{-i\varphi}), \qquad \varphi \in [0, 2\pi]$$

— ее опорная функция. Положим

$$J(D) = \{e^{i\varphi} \in S(0,1) : H_D(\varphi) = +\infty\}.$$

Символами $\mathrm{int}\, J(D)$, $\overline{J(D)}$ и $\partial J(D)$ обозначим соответственно совокупность внутренних точек, замыкание и границу (в топологии окружности $S(0,1)$) множества $J(D)$. Если множество $\overline{J(D)} \setminus J(D) = \partial J(D) \setminus J(D)$ не пусто, то оно состоит из одной или двух точек. Если D — ограниченная область, то $J(D) = \emptyset$. В случае неограниченной области возможны следующие ситуации:

1) $J(D) = S(0,1)$, т.е. $D = \mathbb{C}$,
2) D — полуплоскость $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(ze^{-i\varphi}) < a\}$ и $J(D) = S(0,1) \setminus \{e^{i\varphi}\}$,
3) D — полоса $\{z \in \mathbb{C} : b < \mathrm{Re}(ze^{-i\varphi}) < a\}$ и $J(D) = S(0,1) \setminus \{e^{i\varphi}, e^{i\varphi+\pi}\}$,
4) в остальных случаях $J(D)$ является дугой единичной окружности, которая опирается на угол раствора не меньше чем π.

A.S. Krivosheev, O.A. Krivosheeva. Criterion of fundamental principle.

Поступила 15 января 2026 г.

Неограниченные выпуклые области, описанные в случаях 1)–4), будем называть соответственно областями I–IV типа.

Пусть $H(D)$ — пространство функций аналитических в области D с топологией равномерной сходимости на компактах $K \subset D$. Символом $W(\Lambda, D)$ обозначим замыкание в пространстве $H(D)$ линейной оболочки системы $\mathcal{E}(\Lambda)$. Если система $\mathcal{E}(\Lambda)$ не полна в пространстве $H(D)$, то $W(\Lambda, D)$ является нетривиальным (т.е. $W(\Lambda, D) \neq \{0\}$, $H(D)$) замкнутым подпространством в $H(D)$. Из определения вытекает, что оно инвариантно относительно оператора дифференцирования. При этом система $\mathcal{E}(\Lambda)$ — это набор собственных и присоединенных функций оператора дифференцирования в $W(\Lambda, D)$, а Λ — его кратный спектр.

Пусть $W \subset H(D)$ — нетривиальное замкнутое подпространство инвариантное относительно оператора дифференцирования, и $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ — его кратный спектр. Он является не более чем счетным множеством с единственной предельной точкой ∞ (см. [20, гл. II, §7]). Семейство $\mathcal{E}(\Lambda)$ является набором собственных и присоединенных функций оператора дифференцирования в W. Говорят, что подпространство W допускает спектральный синтез, если оно совпадает с $W(\Lambda, D)$. Отметим, что проблема спектрального синтеза полностью решена в работах [3] и [4]. Если D — неограниченная выпуклая область, то всегда верно равенство $W = W(\Lambda, D)$, т.е. W допускает спектральный синтез (см. [4, теорема 8.2]).

В случае, когда спектр подпространства W конечен, оно совпадает с пространством решений однородного линейного дифференциального уравнения конечного порядка с постоянными коэффициентами. Более общим примером инвариантного подпространства служит множество решений уравнения свертки $\mu(g(z + w)) \equiv 0$ (или системы таких уравнений), где μ — линейный непрерывный функционал на пространстве $H(D)$. Частные случаи уравнения свертки — линейные дифференциальные, разностные, дифференциально–разностные уравнения с постоянными коэффициентами конечного и бесконечного порядков, а также некоторые виды интегральных уравнений.

Основной задачей в теории инвариантных подпространств является проблема фундаментального принципа, т.е. представления произвольной функции из W при помощи ряда по элементам системы $\mathcal{E}(\Lambda)$. Говорят, что в подпространстве W со спектром $\{\lambda_k, n_k\}$ имеет место фундаментальный принцип, если для любой функции $g \in W$ верно представление

$$g(z) = \sum_{k=1,n=0}^{\infty,n_k-1} d_{k,n} z^n e^{\lambda_k z}, \qquad z \in D, \tag{1.1}$$

причем ряд сходится равномерно на компактах из области D. Название фундаментальный принцип появилось в связи с частным случаем инвариантного подпространства — пространством решений линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. Известно, что каждое решение такого уравнения есть линейная комбинация элементарных решений — экспоненциальных мономов $z^n e^{\lambda_k z}$, показатели которых являются нулями (возможно кратными) характеристического многочлена. Наличие этого представления называется фундаментальным принципом Л. Эйлера.

Проблему фундаментального принципа, естественно, имеет смысл рассматривать лишь для инвариантных подпространств, допускающих спектральный синтез, т.е. для подпространств вида $W(\Lambda, D)$.

При помощи преобразования Лапласа проблема фундаментального принципа сводится к двойственной задаче кратной интерполяции в пространстве целых функций экспоненциального типа. Исследования обеих задач, проводившиеся вначале независимо друг от друга, имеют богатую историю. Основные ее этапы отражены в работах [1] и [5]. В случае ограниченной выпуклой области проблема фундаментального принципа полностью решена в работах [5]–[7], [10]. Получен простой геометрический критерий фундаментального принципа (см. [10, теорема 3.2]) для инвариантных подпространств, допускающих спектральный синтез, который формулируется лишь в терминах индекса конденсации S_Λ (он будет определен ниже), максимальной угловой плотности последовательности Λ и длины дуги границы области D.

Гораздо хуже обстоит дело с неограниченными выпуклыми областями. В работе [5] получен критерий фундаментального принципа для произвольных выпуклых областей. Однако он имеет два недостатка. Присутствует некоторое ограничение на кратность n_k точек λ_k. Кроме того, в нем содержится следующее условие (оно эквивалентно наличию фундаментального принципа). Требуется существование семейства целых функции, обращающихся в ноль в точках λ_k с кратностью не меньшей чем n_k, рост которых является близким к регулярному и связан с D. Остается открытым вопрос, при каких условиях на Λ и D подобное семейство существует. Задача построения этого семейства является достаточно сложной. Что же касается неограниченных областей, то в этой связи исследовались по большей части только три частных случая — области I–III типа.

Полное решение проблемы фундаментального принципа для нетривиальных инвариантных подпространств целых функций получено в работе [9]. Доказывается, что наличие фундаментального принципа в любом таком подпространстве эквивалентно конечности индекса конденсации S_Λ.

Инвариантные подпространства в полуплоскости изучались в случае простого положительного спектра, имеющего плотность. В работе [8] эта задача решена полностью, причем для произвольной выпуклой области D. Решение найдено в терминах простых геометрических характеристик последовательности Λ и области D. Оно содержит в себе принципиально новый момент. Оказалось, что в случае правой полуплоскости, для справедливости фундаментального принципа не требуется измеримости последовательности Λ, и даже конечности ее максимальной плотности, несмотря на то, что опорная функция полуплоскости ограничена в положительном направлении. Необходимым и достаточным условием в этой ситуации является равенство нулю характеристики S_Λ. В работе [11] этот результат распространен на случай инвариантных подпространств с почти вещественным спектром Λ (т.е. $\Xi(\Lambda) = \{1\}$). Здесь были преодолены значительные трудности, связанные с кратностями n_k точек спектра λ_k. Отметим, что результат работы [11] легко переносится на случай инвариантных подпространств со спектром Λ, для которого $\Xi(\Lambda)$ является одноточечным множеством.

В работе [12] при помощи разложения инвариантного подпространства на сумму двух инвариантных подпространств и на основе результатов работ [9] и [11] получен критерий фундаментального принципа для инвариантных подпространств в полуплоскости с произвольным спектром. Он формулируется лишь в терминах индекса конденсации S_Λ. Это же относится и к результату из работы [13]. В ней приводится критерий фундаментального принципа для инвариантных подпространств в произвольной выпуклой области при условии $\Xi(\Lambda) \subseteq J(D)$.

В работе [23] результат из работы [13] распространяется на случай, когда $\Xi(\Lambda)$ лежит в замыкании $\overline{J(D)}$ множества $J(D)$. Отметим, что этот случай принципиально отличается от случая $\Xi(\Lambda) \subseteq J(D)$. Получен простой геометрический критерий фундаментального принципа, который опирается лишь на понятие индекса конденсации S_Λ. Этот критерий базируется на результатах работ [9], [11] и [12].

Если D — выпуклая область I–III типа, то для любого инвариантного подпространства верно вложение $\Xi(\Lambda) \subseteq \overline{J(D)}$. Таким образом, проблема фундаментального принципа для неограниченных выпуклых областей I–III типа полностью решена.

В случае областей IV типа имеется результат из работы [5], который указан выше. Кроме того, в этом случае получены простые геометрические условия, необходимые для фундаментального принципа. В работе [11] устанавливается ограничение на кратность

n_k точек λ_k. В работе [15] необходимые условия формулируются в терминах длины дуги выпуклой области D и максимальной плотности последовательности Λ.

Данная работа завершает большой цикл исследований, которые проводились в работах [5]–[16], [23]. Здесь получено полное решение проблемы фундаментального принципа для произвольных инвариантных подпространств, допускающих спектральный синтез, в произвольных выпуклых областях комплексной плоскости. Критерий формулируется лишь в терминах индекса конденсации S_Λ, максимальной угловой плотности последовательности Λ и длины дуги границы области D. Получен также критерий разрешимости соответствующей интерполяционной задачи в пространстве целых функций экспоненциального типа.

Работа состоит из пяти параграфов. Во втором параграфе приведены некоторые результаты из работ [5]–[16], [23], которые необходимы для доказательства основного результата данной работы в последнем параграфе.

Третий параграф носит вспомогательный характер. Здесь строятся специальные целые функции экспоненциального типа, которые обращаются в ноль на заданной последовательности Λ и имеют рост, близкий к регулярному росту. На этой основе в четвертом параграфе исследуется задача разложения инвариантного подпространства на сумму инвариантных подпространств. Доказывается, что при некоторых условиях каждая функция из инвариантного подпространства в любой неограниченной области IV типа может быть представлена как сумма функций из трех инвариантных подпространств. Их спектры соответствуют ограниченной, неограниченной частям выпуклой области и границе между этими частями.

В последнем параграфе доказывается критерий фундаментального принципа и разрешимости интерполяционной задачи.

2. Предварительные результаты

Прежде всего, приведем результаты из работы [14], в которых описывается характер сходимости рядов вида (1.1). Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$. Положим

$$m(\Lambda) = \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{n_k}{|\lambda_k|}, \qquad \sigma(\Lambda) = \overline{\lim_{j\to\infty}} \frac{\ln j}{|\xi_j|},$$

где $\{\xi_j\}$ — неубывающая по модулю последовательность, составленная из точек λ_k, причем каждая λ_k встречается в ней ровно n_k раз,

$$m(\Lambda,\mu) = \sup \overline{\lim_{j\to\infty}} \frac{n_{k_j}}{\lambda_{k_j}},$$

где супремум берется по всем подпоследовательностям $\{\lambda_{k_j}\}$ таким, что $\overline{\lambda}_{k_j}/|\lambda_{k_j}| \to \mu$. Если $\mu \notin \Xi(\Lambda)$, то полагаем $m(\Lambda,\mu) = 0$.

Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — выпуклая область. Опишем пространство последовательностей коэффициентов $\{d_{k,n}\}_{k=1,n=0}^{\infty,n_k-1}$, при которых в области D сходится ряд (1.1). Через $\mathcal{K}(D) = \{K_p\}_{p=1}^{\infty}$ обозначим последовательность выпуклых компактов в области D, которая строго исчерпывает ее, т.е.

$$K_p \subset \operatorname{int} K_{p+1}, \qquad p \geqslant 1, \qquad D = \bigcup_{p=1}^{\infty} K_p.$$

Здесь символ «int» означает внутренность множества. В силу указанного вложения и определения опорной функции для каждого $p \geqslant 1$ найдется $\nu_p > 0$ такое, что

$$H_{K_p}(\varphi) + \nu_p \leqslant H_{K_{p+1}}(\varphi), \qquad \varphi \in [0, 2\pi], \qquad \nu_p > \nu_{p+1}. \tag{2.1}$$

Положим

$$Q_p(\Lambda) = \{d = \{d_{k,n}\} : \|d\|_p = \sup_{k,n} |d_{k,n}| p^n \exp(r_k H_{K_p}(-\varphi_k)) < \infty\}, \qquad \lambda_k = r_k e^{i\varphi_k},$$

$$Q(D,\Lambda) = \bigcap_{p=1}^{\infty} Q_p(\Lambda).$$

В пространстве $Q(D,\Lambda)$ определим метрику

$$\rho(d,b) = \sum_{s=1}^{\infty} 2^{-s} \frac{\|d-b\|_s}{1+\|d-b\|_s}.$$

С этой метрикой $Q(D,\Lambda)$ становится пространством Фреше.

В работе [14] доказаны следующие результаты (соответственно теорема 2.1, лемма 2.6).

Теорема 2.1. *Пусть D — выпуклая область и $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$. Предположим, что $\sigma(\Lambda) = 0$, $m(\Lambda) < \infty$ и $m(\Lambda,\mu) = 0$ при $\mu \in \Xi(\Lambda) \setminus \overline{J(D)}$. Тогда эквивалентны утверждения:*

1) *Ряд (1.1) сходится в (каждой точке) области D.*
2) *Имеет место включение $d = \{d_{k,n}\} \in Q(D,\Lambda)$.*

Лемма 2.1. *Пусть D — выпуклая область, $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ и $\sigma(\Lambda) = 0$. Тогда для каждого $p \geqslant 1$ найдутся $C_p > 0$ и номер $m(p)$ такие, что*

$$\sum_{k=1,n=0}^{\infty,m_k-1} |d_{k,n}| \sup_{z\in K_p} |z^n e^{z\lambda_k}| \leqslant C_p \|d\|_{m(p)}, \qquad d = \{d_{k,n}\} \in Q(D,\Lambda). \tag{2.2}$$

Приведем теперь результат из работы [16], где устанавливается двойственность проблемы фундаментального принципа и интерполяционной задачи в пространстве целых функций экспоненциального типа.

Пусть $\mathbb{E}$ — оператор, который элементу $d = \{d_{k,n}\} \in Q(D,\Lambda)$ ставит в соответствие сумму ряда (1.1), который сходится равномерно на компактах в области D.

Введем еще пространства комплексных последовательностей

$$\mathcal{R}_s(\Lambda) = \{b = \{b_{k,n}\} : \|b\|^s = \sup_{k,n} |b_{k,n}| s^{-n} \exp(-r_k H_{K_s}(-\varphi_k)) < \infty\}, \quad s \geqslant 1.$$

Пусть $\mathcal{R}(D,\Lambda)$ — индуктивный предел банаховых пространств $\mathcal{R}_s(\Lambda)$. Тогда имеет место равенство множеств

$$\mathcal{R}(D,\Lambda) = \bigcup_{s=1}^{\infty} \mathcal{R}_s(\Lambda).$$

Рассмотрим кратную интерполяционную задачу:

$$f^{(n)}(\lambda_k) = b_{k,n}, \qquad n = \overline{0, n_k - 1}, \qquad k \geqslant 1. \tag{2.3}$$

Пусть $\widehat{\mu}$ обозначает преобразование Лапласа линейного непрерывного функционала $\mu \in H^*(D) : \widehat{\mu}(\lambda) = \mu(e^{\lambda z})$. Функция $\widehat{\mu}$ является целой и имеет экспоненциальный тип, т.е. для некоторых $A, B > 0$ верно неравенство

$$|\widehat{\mu}(\lambda)| \leqslant A e^{B|\lambda|}, \qquad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{2.4}$$

Известно (см. [21, гл. III, §12, теорема 12.3]), что преобразование Лапласа устанавливает алгебраический и топологический изоморфизм между пространствами $H^*(D)$ и P_D, где P_D — индуктивный предел банаховых пространств

$$P_s = \left\{ f \in H(\mathbb{C}) : \|f\|_s = \sup_{re^{i\varphi}\in\mathbb{C}} |f(re^{i\varphi})| \exp\left(-r H_{K_s}(-\varphi)\right) < \infty \right\}.$$

На пространстве P_D определим линейный оператор Σ так, что каждой функции f он ставит в соответствие последовательность $b = \{b_{k,n}\} = \{f^{(n)}(\lambda_k)\}$.

Пусть D — выпуклая область, $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$, система $\mathcal{E}(\Lambda)$ не полна в $H(D)$ и $I(\Lambda, D)$ — ядро оператора

$$\Sigma : P_D \to \mathcal{R}(D, \Lambda).$$

Это замкнутое подпространство в P_D. Из теоремы Хана — Банаха следует, что оно нетривиально тогда и только тогда, когда система $\mathcal{E}(\Lambda)$ не полна в $H(D)$. Подпространство $I(\Lambda, D) \subset P_D$ состоит из тех и только тех функций, которые обращаются в нуль (по крайней мере) в точках λ_k с кратностью не меньшей чем n_k.

Символом $\mathbb{F}(\Lambda)$ обозначим множество всех целых функций экспоненциального типа f таких, что f обращается в ноль (по крайней мере) в точках λ_k с кратностью не меньшей чем n_k. Тогда $I(\Lambda, D) = P_D \cap \mathbb{F}(\Lambda)$.

Фактор–пространство $P_D/I(\Lambda, D)$ как и P_D представляет собой объединение возрастающей последовательности банаховых пространств $P_{s,0}$. Элемент $[f] \in P_D/I(\Lambda, D)$ принадлежит $P_{s,0}$ тогда и только тогда, когда некоторый представитель $g \in P_D$ класса эквивалентности $[f]$ принадлежит P_s. При этом норма $\|[f]\|_s$ равна инфимуму норм $\|g\|_s$ по всем представителям $g \in P_s$ класса $[f]$. Оператор Σ обычным образом порождает оператор

$$\Sigma_0 : P_D/I(\Lambda, D) \to \mathcal{R}(D, \Lambda).$$

Он является инъективным. Имеет место утверждение (см. [16, теорема 4.2]).

Теорема 2.2. *Пусть D — выпуклая область и $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ и система $\mathcal{E}(\Lambda)$ не полна в $H(D)$. Следующие утверждения эквивалентны:*

1) *в подпространстве $W(\Lambda, D)$ имеет место фундаментальный принцип;*
2) *оператор $\mathbb{E} : Q(D, \Lambda) \to W(\Lambda, D)$ — изоморфизм;*
3) *оператор $\Sigma_0 : P_D/I(\Lambda, D) \to \mathcal{R}(D, \Lambda)$ — изоморфизм;*
4) *интерполяционная задача (2.3) разрешима в пространстве P_D для любой правой части $b = \{b_{k,n}\} \in \mathcal{R}(D, \Lambda)$.*

Сформулируем теперь результаты, в которых приводится полное решение проблемы фундаментального принципа для ограниченных областей, а также для неограниченных выпуклых областей I–III типа.

Символами $B(z, r)$ и $S(z, r)$ обозначим соответственно открытый круг и окружность с центром в точке $z \in \mathbb{C}$ и радиуса $r > 0$. Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ и $n(r, \Lambda)$ обозначает число точек λ_k с учетом их кратностей n_k в круге $B(0, r)$. Положим

$$\overline{n}(\Lambda) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{n(r,\Lambda)}{r}, \qquad \overline{n}_0(\Lambda, \delta) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{n(r,\Lambda) - n((1-\delta)r, \Lambda)}{\delta r}, \qquad \overline{n}_0(\Lambda) = \overline{\lim_{\delta\to 0}} \, \overline{n}_0(\Lambda, \delta).$$

Величины $\overline{n}(\Lambda)$ и $\overline{n}_0(\Lambda)$ называются соответственно верхней и максимальной плотностью последовательности Λ. Говорят, что Λ имеет плотность $n(\Lambda)$, если существует предел

$$n(\Lambda) = \lim_{r\to\infty} \frac{n(r,\Lambda)}{r}.$$

В этом случае, как нетрудно заметить, верно равенство $\overline{n}(\Lambda) = \overline{n}_0(\Lambda)$. Положим

$$q_\Lambda^m(z, \delta) = \prod_{\lambda_k \in B(\lambda_m, \delta|\lambda_m|), k \neq m} \left(\frac{z - \lambda_k}{3\delta|\lambda_k|} \right)^{n_k}, \qquad m \geqslant 1.$$

Модуль функции $q_\Lambda^m(z, \delta)$ можно интерпретировать как меру сгущения точек $\lambda_k \in B(\lambda_m, \delta|\lambda_m|)$ около z. Отметим, что

$$|q_\Lambda^m(z, \delta)| \leqslant 1, \qquad z \in B(\lambda_m, \delta|\lambda_m|), \qquad m \geqslant 1.$$

В случае, когда в круге $B(\lambda_m, \delta|\lambda_m|)$ нет точек λ_k, полагаем $q_\Lambda^m(z,\delta) \equiv 1$. Следуя [5], введем величину

$$S_\Lambda = \lim_{\delta\to 0} \varliminf_{m\to\infty} \frac{\ln|q_\Lambda^m(\lambda_m,\delta)|}{|\lambda_m|}.$$

Положим еще

$$S_\Lambda(\mu) = \inf_{\{\lambda_{k(j)}\}} \lim_{\delta\to 0} \varliminf_{j\to\infty} \frac{\ln|q_\Lambda^{k(j)}(\lambda_{k(j)},\delta)|}{|\lambda_{k(j)}|},$$

где инфимум берется по всем подпоследовательностям $\{\lambda_{k(j)}\}$ последовательности $\{\lambda_k\}$ таким, что $\overline{\lambda_{k(j)}}/|\lambda_{k(j)}| \to \mu$, $j \to \infty$. Если $\mu \notin \Xi(\Lambda)$, то полагаем $S_\Lambda(\mu) = 0$. Отметим, что $S_\Lambda \leqslant 0$ и $S_\Lambda(\mu) \leqslant 0$, $\mu \in \Xi(\Lambda)$.

Пусть D — выпуклая область. Для каждого $\varphi \in [0, 2\pi)$ такого, что $H_D(\varphi) < +\infty$, пересечение $T(\varphi) = \partial D \cap L(\varphi, D)$ границы области D с опорной прямой

$$L(\varphi, D) = \{z : \mathrm{Re}(ze^{-i\varphi}) = H_D(\varphi)\}$$

является либо точкой $z_D(\varphi)$, либо отрезком, либо пустым множеством. Множество $\Phi(D)$ направлений φ, для которых $T(\varphi)$ — отрезок или пустое множество, не более чем счетное.

Пусть множество $S(0,1) \setminus \overline{J(D)}$ не пусто. Тогда возможны два случая.

1. D — ограниченная область и $\mathrm{int}(S(0,1) \setminus J(D)) = S(0,1)$.
2. D — неограниченная область IV типа и найдутся ψ_1, ψ_2 такие, что $0 < \psi_2 - \psi_1 \leqslant \pi$ и

$$\mathrm{int}(S(0,1) \setminus J(D)) = \{e^{i\varphi} : \varphi \in (\psi_1, \psi_2)\}.$$

В последнем случае будем писать $D \in \mathcal{D}(\psi_1, \psi_2)$.

Пусть $0 < \varphi_2 - \varphi_1 < \pi$, $\varphi_1, \varphi_2 \notin \Phi(D)$. Если $D \in \mathcal{D}(\psi_1, \psi_2)$, то дополнительно считаем, что $\psi_1 < \varphi_1 < \varphi_2 < \psi_2$. Символом $\Upsilon_D(\varphi_1, \varphi_2)$ обозначим длину дуги границы области D, которая соединяет точки $z_D(\varphi_1)$ и $z_D(\varphi_2)$, а движение от $z_D(\varphi_1)$ к $z_D(\varphi_2)$ по этой дуге осуществляется в положительном направлении.

Символом $\Lambda(\varphi_1, \varphi_2)$ обозначим последовательность, состоящую из всех пар λ_k, n_k таких, что λ_k лежит в угле

$$\Gamma(\varphi_1, \varphi_2) = \{te^{i\varphi} : \varphi \in (\varphi_1, \varphi_2), t > 0\}.$$

В работе [10, теорема 3.2] доказан следующий результат.

Теорема 2.3. *Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$, D — ограниченная выпуклая область и $\mathcal{E}(\Lambda)$ не полна в $H(D)$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) *в пространстве $W(\Lambda, D)$ имеет место фундаментальный принцип;*
2) *$S_\Lambda = 0$ и существует $\gamma > 0$ такое, что для всех $\varphi_1, \varphi_2 \notin \Phi(D)$ с условием $0 < \varphi_2 - \varphi_1 < \gamma$ выполнено неравенство*

$$\overline{n}_0(\Lambda(-\varphi_2, -\varphi_1)) \leqslant \frac{\Upsilon_D(\varphi_1, \varphi_2)}{2\pi}.$$

Замечание 2.1. *Предположим , что пункт 2) теоремы 2.3 выполнен для некоторого $\gamma > 0$. Тогда из определения максимальной плотности и аддитивности длины дуги следует, что он выполнен и для любого $\gamma \in (0, \pi]$.*

Пусть $\varphi \in \mathbb{R}$ и $a \leqslant +\infty$. Положим

$$\Pi(a, \varphi) = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(ze^{-i\varphi}) < a\}.$$

Множество $\Pi(a, \varphi)$ является полуплоскостью, когда $a \in \mathbb{R}$. Если $a = +\infty$, то $\Pi(a, \varphi) = \mathbb{C}$.

Пусть D — неограниченная выпуклая область и $D \neq \Pi(a, \varphi)$, $\varphi \in \mathbb{R}$, $a \leqslant +\infty$. Тогда $\partial J(D) = \{e^{i\varphi_1}, e^{i\varphi_2}\}$ — двухэлементное множество.

Следующий результат получен в работе [23, теорема 3.2].

Теорема 2.4. *Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$, D — выпуклая область, и система $\mathcal{E}(\Lambda)$ не полна в $H(D)$. Следующие утверждения эквивалентны:*

1) *Каждая функция $g \in W(\Lambda, D)$ представляется рядом (1.1), который сходится равномерно на компактах из области $D_0 = \Pi(H_D(\varphi_1), \varphi_1) \cap \Pi(H_D(\varphi_2), \varphi_2)$;*
2) $\Xi(\Lambda) \subseteq \overline{J(D)}$, $\partial J(D) \subseteq \{e^{i\varphi_1}, e^{i\varphi_2}\}$, $S_\Lambda > -\infty$ *и* $S_\Lambda(\mu) = 0$, $\mu \in \partial J(D) \setminus J(D)$.

Замечание 2.2. *Любая неограниченная выпуклая область I–III типа представляется в виде $\Pi(a_1, \varphi_1) \cap \Pi(a_2, \varphi_2)$. Таким образом, в теореме 2.4 проблема фундаментального принципа для областей I–III типа полностью решена.*

Нам понадобятся еще некоторые необходимые и достаточные условия для фундаментального принципа, полученные ранее в указанных выше работах.

Следующие два результата доказаны в работе [11, соответственно лемма 3.4 и теорема 4.1]. Последовательность $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ будем называть почти вещественной, если $\operatorname{Re}\lambda_k > 0$ и $\operatorname{Im}\lambda_k / \operatorname{Re}\lambda_k \to 0$, когда $k \to \infty$.

Лемма 2.2. *Пусть D — выпуклая область такая, что $1 \notin J(D)$, $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ — почти вещественная последовательность и $\mathcal{E}(\Lambda)$ не полна в $H(D)$. Предположим, что в $W(\Lambda, D)$ имеет место фундаментальный принцип. Тогда $S_\Lambda = 0$.*

Теорема 2.5. *Пусть D — выпуклая область такая, что $1 \in S(0,1) \setminus \overline{J(D)}$, $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ — почти вещественная последовательность и $\mathcal{E}(\Lambda)$ не полна в $H(D)$. Предположим, что в $W(\Lambda, D)$ имеет место фундаментальный принцип. Тогда $m(\Lambda) = 0$.*

В работе [15, теорема 3.1] приводится необходимое условие для фундаментального принципа. Сформулируем его.

Теорема 2.6. *Пусть D — выпуклая область, $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ и система $\mathcal{E}(\Lambda)$ не полна в $H(D)$. Предположим, что в $W(\Lambda, D)$ имеет место фундаментальный принцип. Тогда для любых $\varphi_1, \varphi_2 \notin \Phi(D)$ таких, что $0 < \varphi_2 - \varphi_1 < \pi$ и $\{e^{i\varphi} : \varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]\} \subset S(0,1) \setminus \overline{J(D)}$ верна оценка*

$$\overline{n}_0(\Lambda(-\varphi_2, -\varphi_1)) \leqslant \frac{\Upsilon_D(\varphi_1, \varphi_2)}{2\pi}.$$

Сформулируем еще один результат [12, теорема 4.3], который легко преобразуется в необходимое условие для фундаментального принципа.

Теорема 2.7. *Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$, $S_\Lambda = -\infty$. Тогда существуют числа $\{d_{k,n}\}$ и номера k_s, $1 = k_1 < k_2 < \ldots$, такие, что ряд*

$$\sum_{s=1}^{\infty} \left(\sum_{k=k_s}^{k=k_{s+1}-1} \sum_{n=0}^{n_k-1} d_{k,n} z^n e^{\lambda_k z} \right) \tag{2.5}$$

сходится равномерно на компактах в плоскости, а ряд (1.1) расходится в каждой точке плоскости.

Нам понадобится также одно достаточное условие для фундаментального принципа. Оно является непосредственным следствием теоремы 3.6 и предложения 2.10 из работы [12].

Теорема 2.8. *Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$, D — выпуклая область, $\mathcal{K}(D) = \{K_p\}$ и система $\mathcal{E}(\Lambda)$ не полна в $H(D)$. Предположим, что $\Xi(\Lambda) \subset S(0,1) \setminus \overline{J(D)}$, $S_\Lambda = 0$ и для любых $p \geqslant 1$, $\delta \in (0,1)$ существуют $f \in I(\Lambda, D)$ и $R > 0$ такие, что*

$$\lambda_k \in \bigcup_{\ln|f(z)| \geqslant r H_{K_p}(-\varphi)} B(z, \delta r), \qquad z = re^{i\varphi}, \qquad |\lambda_k| > R.$$

Тогда $m(\Lambda) = 0$ *и каждая функция* $g \in W(\Lambda, D)$ *представляется рядом* (1.1), *сходящимся в каждой точке области* D.

3. Построение специальной целой функции

Пусть f — целая функция экспоненциального типа. Индикатором f называется функция

$$h_f(\varphi) = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\ln|f(te^{i\varphi})|}{t}, \qquad \varphi \in [0, 2\pi].$$

Она является выпуклой и положительно однородной порядка один, т.к. совпадает с опорной функцией некоторого выпуклого компакта $L \subset \mathbb{C}$, называемого индикаторной диаграммой f. Символом $\gamma(t, f)$ обозначим функцию, ассоциированную по Борелю с f [20, гл. I, §5]. Сопряженной диаграммой K функции f называется выпуклая оболочка множества особых точек $\gamma(t, f)$. Таким образом, $\gamma(t, f)$ является аналитической вне компакта K. По теореме Полиа [20, гл. I, §5, теорема 5.4]

$$h_f(\varphi) = H_L(\varphi) = H_K(-\varphi), \qquad \varphi \in [0, 2\pi]. \tag{3.1}$$

Следовательно, K является компактом комплексно сопряженным к компакту L.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$, D — выпуклая область и система $\mathcal{E}(\Lambda)$ не полна в $H(D)$. Тогда последовательность Λ является частью нулевого множества любой целой функции экспоненциального типа из пространства $I(\Lambda, D) \neq \emptyset$. Поэтому [18, гл. I, §1, теорема 1.1.5] верхняя плотность $\overline{n}(\Lambda)$ конечна.

Линейной плотностью множества $E = \cup B(z_i, \rho_i)$ называется величина

$$p_E = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{1}{r} \sum_{|z_i|<r} \rho_i.$$

Лемма 3.1. *Пусть* f — *целая функция экспоненциального типа. Для каждого* $\delta \in (0, 1)$ *существует множество* $E = \cup B(z_i, \rho_i)$ *и число* $C > 0$ *такое, что* $p_E \leqslant \delta$ *и*

$$\ln|f(\xi)| \geqslant -C|\xi|, \qquad \xi \in \mathbb{C} \setminus E. \tag{3.2}$$

Доказательство. Представим функцию f в виде

$$f(z) = az^m f_1(z),$$

где $f_1(0) = 1$. Так как f_1 имеет экспоненциальный тип, найдутся $B > 0$, $R > 1$ такие, что

$$\ln|f_1(z)| \leqslant B|z|, \qquad z \in \mathbb{C} \setminus B(0, R).$$

Отсюда для каждого $\mu \in (0, 1)$ по теореме об оценке снизу модуля аналитической функции [17, гл. I, теорема 11] следует неравенство

$$\ln|f_1(\lambda)| \geqslant -2eH(\mu)BR_l, \qquad H(\mu) = 3 + \ln\frac{3}{2\mu}, \qquad R_l = 2^l R, l \geqslant 1.$$

Оно выполнено в круге $B(0, R_l)$, но вне объединения V_l (конечного числа) исключительных кружков с суммой радиусов меньшей, чем $4\mu R_l$. Имеем:

$$\ln|f_1(\lambda)| \geqslant -4eH(\mu)B|\lambda|, \qquad \lambda \in B(0, R_l) \setminus (B(0, R_{l-1}) \cup V_{l,0}), \qquad l \geqslant 1,$$

где $V_{l,0}$ — объединение всех кругов из множества V_l, которые пересекают кольцо $B(0, R_l) \setminus B(0, R_{l-1})$. Положим

$$C = 4eH(\mu)B + 1, \qquad E = \bigcup_i B(z_i, \rho_i) = B(0, R_0) \cup \left(\bigcup_l V_{l,0}\right), \qquad R_{0,0} = R.$$

Тогда из последнего неравенства, увеличивая при необходимости $R_{0,0}$, получаем (3.2). Оценим сверху линейную плотность множества E.

Пусть $\mu \in (0, 1/16)$ и $B(z_i, \rho_i) \in V_{s,0}$, $s \geqslant l+1$. Тогда по построению $\rho_i \leqslant 4\mu R_s$. Так как $B(z_i, \rho_i)$ пересекает кольцо $B(0, R_s) \setminus B(0, R_{s-1})$, тогда $|z_i| \geqslant R_{s-1} - 4\mu R_s$. Следовательно,

$$|z_i| \geqslant R_{s-1} - 8\mu R_{s-1} > \frac{R_{s-1}}{2} \geqslant R_l.$$

Таким образом, если $|z_i| < R_l$, то

$$B(z_i, \rho_i) \subset \bigcup_{s=1}^{l+1} V_{s,0}.$$

Пусть $\delta \in (0, 1)$, $\mu = \delta/32$ и $R_{l-1} < r < R_l$. Тогда

$$\frac{1}{r} \sum_{|z_i|<r} \rho_i \leqslant \frac{1}{R_{l-1}} \sum_{s=1}^{l+1} 4\mu R_s = \sum_{s=1}^{l+1} 4\mu \frac{R_s}{R_{l-1}} = \frac{\delta}{2} \sum_{s=1}^{l+1} 2^{s-l-1} < \delta.$$

Лемма доказана. □

Доказательство следующего утверждения опирается на доказательство леммы 4.3 в работе [7].

Лемма 3.2. *Пусть $0 < \psi_2 - \psi_1 \leqslant \pi$, $D \in \mathcal{D}(\psi_1, \psi_2)$, $\mathcal{K}(D) = \{K_p\}$, $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ и система $\mathcal{E}(\Lambda)$ не полна в $H(D)$. Предположим, что для любых $\varphi_1, \varphi_2 \notin \Phi(D)$ таких, что $\psi_1 < \varphi_1 < \varphi_2 < \psi_2$ верно неравенство*

$$\overline{n}_0(\Lambda(-\varphi_2, -\varphi_1)) \leqslant \frac{\Upsilon_D(\varphi_1, \varphi_2)}{2\pi}. \tag{3.3}$$

Тогда для любых $p \geqslant 1$, $\delta \in (0, 1)$ существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для любых α_1, α_2, $\psi_1 < \alpha_1 < \alpha_2 < \psi_2$, найдутся множество $E = \cup B(z_i, \rho_i)$ с линейной плотностью $p_E \leqslant \delta$ и функция $f_0 \in I(\Lambda(-\alpha_2, -\alpha_1), D)$, удовлетворяющая условиям

$$h_{f_0}(\varphi) \leqslant H_D(-\varphi) - \varepsilon_0, \qquad \varphi \in [0, 2\pi], \tag{3.4}$$

$$\ln |f_0(re^{i\varphi})| \geqslant rH_{K_p}(-\varphi), \qquad re^{i\varphi} \in \Gamma(-\alpha_2, -\alpha_1) \setminus E. \tag{3.5}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$f_{0,0}(\lambda) = \prod_{\lambda_k \in \Gamma(-\alpha_2, -\alpha_1)} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}\right)^{n_k} e^{n_k \frac{\lambda}{\lambda_k}}.$$

Требуемую функцию f_0 будем искать в виде произведения $f_0 = f_{0,0}\varphi$. Для этого нам необходимо вначале построить специальную субгармоническую функцию, затем аппроксимировать ее логарифмом модуля целой функции, которая и будет играть роль φ.

Искомую субгармоническую функцию определим равенством

$$\psi_\beta(\lambda) = \beta \ln |\omega_1(\lambda)| + (1 - \beta) \ln |\omega_2(\lambda)|, \qquad \lambda \in \mathbb{C}, \qquad \beta \in (0, 1),$$

где $\omega_j = f_j/f_{0,0}$, $j = 1, 2$, $f_1 \in I(\Lambda, D)$, $f_2 \in \mathbb{F}(\Lambda(-\alpha_2, -\alpha_1))$. Перейдем к определению f_j.

Так как $\mathcal{E}(\Lambda)$ не полна в $H(D)$, имеем $I(\Lambda, D) \neq \emptyset$. Пусть $f_1 \in I(\Lambda, D)$. Последовательность Λ является частью нулевого множества целой функции экспоненциального типа f_1. Поэтому [18, см. гл. I, теоремы 2.2, 3.1 и 3.3] f_Λ — целая функция порядка не выше первого (возможно, бесконечного типа при порядке один), обращающаяся в ноль лишь в точках λ_k с кратностью n_k, $k \geqslant 1$. Тогда по следствию из теоремы 12 в гл. I книги [17] целая функция $\omega_1 = f_1/f_{0,0}$ имеет первый порядок роста.

Определим теперь f_2. Пусть $\alpha_{1,0}, \alpha_{2,0} \notin \Phi(D)$, $\psi_1 < \alpha_{1,0} < \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_{2,0} < \psi_2$, и K — выпуклая оболочка дуги $\gamma(\alpha_{1,0}, \alpha_{2,0})$ границы ∂D, которая соединяет точки $z_D(\alpha_{1,0})$ и

$z_D(\alpha_{2,0})$ (движение по $\gamma(\alpha_{1,0},\alpha_{2,0})$ от $z_D(\alpha_{1,0})$ к $z_D(\alpha_{2,0})$ осуществляется в положительном направлении). Граница ∂K состоит из дуги $\gamma(\alpha_{1,0},\alpha_{2,0})$ и интервала $(z_D(\alpha_{2,0}), z_D(\alpha_{1,0}))$. Нетрудно заметить, что имеют место соотношения

$$H_K(\varphi) \leqslant H_D(\varphi), \quad \varphi\in[0,2\pi], \tag{3.6}$$

$$H_K(\varphi) = \begin{cases} H_D(\varphi), & \varphi\in[\alpha_{1,0},\alpha_{2,0}] \\ \max\limits_{j=1,2} \operatorname{Re}(z_D(\alpha_{j,0})e^{-i\varphi}), & \varphi\in[\alpha_{2,0},\alpha_{1,0}+2\pi]. \end{cases} \tag{3.7}$$

Так как последовательность $\Lambda_0 = \Lambda(-\alpha_{2,0},-\alpha_{1,0})$ состоит из пар λ_k, n_k таких, что $\lambda_k\in\Gamma(-\alpha_{2,0},-\alpha_{1,0})$, а граница области $D_0 = \operatorname{int} K$ содержит дугу $\gamma(\alpha_{1,0},\alpha_{2,0})$, из (3.3) следует неравенство

$$\overline{n}_0(\Lambda_0(-\varphi_2,-\varphi_1)) \leqslant \frac{\Upsilon_{D_0}(\varphi_1,\varphi_2)}{2\pi}, \qquad \varphi_1,\varphi_2\notin\Phi(D_0), \qquad 0<\varphi_2-\varphi_1<\pi.$$

Тогда по теореме 2.1 из работы [10] (здесь мы учитываем, что определение опорной функции в работе [10] отличается от определения опорной функции в данной работе) существует пополнение $\Lambda_{0,0}$ последовательности Λ_0, которое является правильно распределенным множеством [17, гл. II, §1], и при этом верно равенство

$$n(\Lambda_{0,0}(-\varphi_2,-\varphi_1)) = \frac{\Upsilon_{D_0}(\varphi_1,\varphi_2)}{2\pi}, \qquad \varphi_1,\varphi_2\notin\Phi(D_0), \qquad 0<\varphi_2-\varphi_1<\pi, \tag{3.8}$$

где $n(\Lambda_{0,0}(\varphi,\psi))$ — угловая плотность последовательности $\Lambda_{0,0}$:

$$n(\Lambda_{0,0}(\varphi,\psi)) = \lim_{r\to\infty}\frac{n(r,\Lambda_{0,0}(\varphi,\psi))}{r}.$$

В силу (3.8) каноническая функция $f_{2,0}$ последовательности $\Lambda_{0,0}$ имеет экспоненциальный тип и вполне регулярный рост, и для некоторого $a\in\mathbb{C}$ сопряженная диаграмма функции $f_2(z) = f_{2,0}(z)e^{az}$ совпадает с $K = \overline{D_0}$ (см. [17, гл. II, §1, формула (2.07)]). Как и выше, функция $\omega_2 = f_2/f_{0,0}$ имеет первый порядок роста. В силу теоремы 5 из работы [22] найдется целая функция φ_β, $C(\beta)>0$ и $E_\beta\subset\mathbb{C}$ такие, что

$$|\ln|\varphi_\beta(\lambda)| - \psi_\beta(\lambda)| \leqslant C(\beta)\ln|\lambda|, \qquad \lambda\in\mathbb{C}\setminus E_\beta. \tag{3.9}$$

Причем E_β покрывается кружками $B(z_l(\beta),\rho_l(\beta))$, $l\geqslant 1$, где $|z_l(\beta)|\to\infty$, $l\to\infty$ и

$$\sum_{l=1}^{\infty}\rho_l(\beta) = r(\beta) < \infty.$$

Положим $f_\beta = \varphi_\beta f_{0,0}$. Покажем, что в качестве $f_0\in I(\Lambda(-\alpha_2,-\alpha_1),D)$ можно взять f_β с подходящим параметром β.

Отметим вначале, что по построению $f_\beta\in\mathbb{F}(\Lambda(-\alpha_2,-\alpha_1))$, $\beta\in(0,1)$. Пусть $\beta\in(0,1)$. Положим

$$v_\beta(\lambda) = \beta\ln|f_1(\lambda)| + (1-\beta)\ln|f_2(\lambda)|.$$

Так как индикатор равномерно непрерывен на отрезке $[0,2\pi]$, (см. [17, гл. I, теорема 28]) для $\tau>0$ найдутся $\alpha, R>0$ такие, что

$$\frac{v_\beta(te^{i\varphi})}{t} \leqslant \beta h_{f_1}(\theta) + (1-\beta)h_{f_2}(\theta) + \tau, \qquad \varphi\in[\theta-\alpha,\theta+\alpha], \quad t\geqslant R, \quad \theta\in[0,2\pi]. \tag{3.10}$$

В силу (3.9)

$$|\ln|f_\beta(\lambda)| - v_\beta(\lambda)| = |\ln|\varphi_\beta(\lambda)| - \psi_\beta(\lambda)| \leqslant C(\beta)\ln|\lambda|, \qquad \lambda\in\mathbb{C}\setminus E_\beta. \tag{3.11}$$

Поскольку $r(\beta) < \infty$, используя (3.10), (3.11) и применяя принцип максимума для субгармонической функции, нетрудно получить оценку

$$\frac{\ln|f_\beta(te^{i\varphi})|}{t} \leqslant \beta h_{f_1}(\varphi) + (1-\beta)h_{f_2}(\varphi) + 2\tau, \qquad \varphi \in [0, 2\pi], \quad t \geqslant R_1,$$

для некоторого числа $R_1 \geqslant R$. Отсюда в силу произвольности $\tau > 0$ получаем

$$h_{f_\beta}(\varphi) \leqslant \beta h_{f_1}(\varphi) + (1-\beta)h_{f_2}(\varphi), \qquad \varphi \in [0, 2\pi]. \tag{3.12}$$

Так как $f_1 \in P_D$, найдется $a > 0$ такое, что

$$h_{f_1}(\varphi) \leqslant H_D(-\varphi) - a, \qquad \varphi \in [0, 2\pi].$$

По построению K — сопряженная диаграмма функции f_2. Поэтому согласно (3.1)

$$h_{f_2}(\varphi) = H_K(-\varphi), \qquad \varphi \in [0, 2\pi]. \tag{3.13}$$

Отсюда с учетом предыдущего неравенства, (3.12) и (3.6) получаем:

$$h_{f_\beta}(\varphi) \leqslant \beta(H_D(-\varphi) - a) + (1-\beta)H_D(-\varphi) = H_D(-\varphi) - \beta a, \qquad \varphi \in [0, 2\pi]. \tag{3.14}$$

Это означает, что $f_\beta \in P_D$. Таким образом, $f_\beta \in I(\Lambda(-\alpha_2, -\alpha_1), D)$, $\beta \in (0, 1)$.

Нам остается выбрать число $\beta \in (0, 1)$, при котором будут верны соотношения (3.4) и (3.5). Отметим вначале, что в силу (3.14) для функции $f_0 = f_\beta$ и $\varepsilon_0 = \beta a$ неравенство (3.4) выполнено при любом $\beta \in (0, 1)$ и любых α_1, α_2, $\psi_1 < \alpha_1 < \alpha_2 < \psi_2$. Для получения (3.5) мы должны оценить снизу функции $|f_1|$ и $|f_2|$.

Фиксируем $p \geqslant 1$ и $\delta \in (0, 1)$. По лемме 3.1 существует множество E_1 и число $C > 0$ такое, что $p_{E_1} \leqslant \delta$ и

$$\ln|f_1(\xi)| \geqslant -C|\xi|, \qquad \xi \in \mathbb{C} \setminus E_1. \tag{3.15}$$

Оценим теперь $|f_2|$. Так как f_2 имеет вполне регулярный рост, с учетом (3.13) верно равенство (см. [17, гл. II, теорема 2 и гл. III, теорема 4])

$$\ln|f_2(re^{i\varphi})| = rH_K(-\varphi) + \alpha(r), \qquad re^{i\varphi} \in \mathbb{C} \setminus E_0, \quad \frac{\alpha(r)}{r} \to 0, \quad r \to \infty, \tag{3.16}$$

где $E_0 = \cup B(w_l, r_l)$ — множество нулевой линейной плотности.

Пусть $\nu_p > 0$ — число из неравенства (2.1). Выберем $\beta \in (0, 1)$ такое, что

$$C\beta \leqslant \frac{\nu_p}{4}, \qquad \beta \max_{\varphi \in [0, 2\pi]} H_{K_{p+1}}(\varphi) \leqslant \frac{\nu_p}{4}. \tag{3.17}$$

Отметим, что выбор числа β зависит лишь от номера p и δ.

Согласно (3.16) и (3.17) найдется $R_0 > 0$ такое, что

$$\ln|f_2(re^{i\varphi})| \geqslant rH_{K_{p+1}}(-\varphi) - \frac{\nu_p r}{4}, \qquad re^{i\varphi} \in \Gamma(-\alpha_2, -\alpha_1) \setminus (E_0 \cup B(0, R_0)). \tag{3.18}$$

При этом можно считать, что

$$C(\beta)\ln r \leqslant \frac{\nu_p r}{4}, \qquad r \geqslant R_0. \tag{3.19}$$

Покажем, что для выбранного β функция $f_0 = f_\beta$ обладает необходимыми свойствами. Как уже отмечалось выше, f_0 удовлетворяет (3.4) при $\varepsilon_0 = \beta a$ (ε_0 зависит лишь от p и δ). Положим $E = E_\beta \cup E_1 \cup E_0 \cup B(0, R_0)$. В силу (3.11), (3.15), (3.18), (3.19) и (2.1) имеем:

$$\begin{aligned} \ln|f_0(z)| &\geqslant \beta \ln|f_1(z)| + (1-\beta)\ln|f_2(z)| - C(\beta)\ln r \\ &\geqslant (1-\beta)\left(rH_{K_{p+1}}(-\varphi) - \frac{\nu_p r}{4}\right) - C\beta r - \frac{\nu_p r}{4} \geqslant -\nu_p r + rH_{K_{p+1}}(-\varphi) \geqslant rH_{K_p}(-\varphi), \end{aligned}$$

где $z = re^{i\varphi} \in \Gamma(-\alpha_2, -\alpha_1) \setminus E$. Поскольку $p_{E_0} = 0$ и $p_{E_\beta} = 0$, получим $p_E \leqslant \delta$. Лемма доказана. $\square$

Пусть $\tau \in (0,1)$. Положим

$$\Gamma(\tau) = \{t\lambda : \lambda \in B(1,\tau), t \in \mathbb{R}\}, \qquad \Gamma_\varphi(\tau) = \{t\lambda : \lambda \in B(e^{i\varphi},\tau), t > 0\}.$$

Следующее утверждение доказано в работе [11, теорема 2.2]. Мы сформулируем его в более простой форме и для последовательностей более частного вида, чем в работе [11].

Лемма 3.3. *Пусть $\Lambda^0 = \{\lambda_k, n_k\}$ — последовательность такая, что $\lambda_k > 0$, $k \geqslant 1$, и $\overline{n}(\Lambda) < +\infty$. Тогда для любых $\varepsilon > 0$, $\tau \in (0,1)$ существуют $\gamma \in (0,1)$, $f \in \mathbb{F}(\Lambda^0)$ и $R > 0$ такие, что*

$$\left| \ln|f(\lambda)| - \frac{\pi|\Im\lambda|}{\gamma}) \right| \leqslant \varepsilon|\lambda|, \qquad \lambda \in (\mathbb{C} \setminus (\Gamma(\tau) \cup B(0,R))),$$

$$h_f(\varphi) \leqslant \frac{\pi|\sin\varphi|}{\gamma} + \varepsilon, \qquad \varphi \in [0,2\pi].$$

Замечание 3.1. *Функция $f \in \mathbb{F}(\Lambda^0)$ в теореме 2.2 работы [11] строится следующим образом. Вначале строится последовательность $\Lambda^{0,0} = \{\lambda_{j,0}, n_{j,0}\}$ положительных чисел, пополняющая последовательность Λ^0. Затем функция f определяется в виде произведения*

$$f = \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{|\lambda_{j,0}|^2}\right)^{n_{j,0}}. \tag{3.20}$$

Таким образом, нулевое множество функции f не содержит ноль, является вещественным и симметричным относительно начала координат.

Пусть $d > 0$. Следуя [2] будем говорить, что последовательность $\{\varsigma_l\}$ является асимптотически d — близкой к $\{\xi_l\}$, если

$$\varlimsup_{l\to\infty} \frac{|\varsigma_l - \xi_l|}{|\xi_l|} \leqslant d.$$

Будем также говорить, что множество кругов $\cup B_i$ центрировано с последовательностью $\{\xi_l\}$, если каждая точка ξ_l принадлежит хотя бы одному из кругов B_i, и каждый круг B_i содержит, по крайней мере, одну точку ξ_l.

Лемма 3.4. *Пусть $0 < \psi_2 - \psi_1 \leqslant \pi$, $D \in \mathcal{D}(\psi_1,\psi_2)$, $\mathcal{K}(D) = \{K_p\}$, $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$, система $\mathcal{E}(\Lambda)$ не полна в $H(D)$, и $\Xi(\Lambda) \subseteq S(0,1) \setminus \mathrm{int}J(D)$. Предположим, что для любых $\varphi_1, \varphi_2 \notin \Phi(D)$ таких, что $\psi_1 < \varphi_1 < \varphi_2 < \psi_2$ верно неравенство (3.3). Тогда для любых $s \geqslant 1$, $\delta \in (0,1)$ и θ_1, θ_2, $\psi_1 < \theta_1 < \theta_2 < \psi_2$, существует множество E_0 с линейной плотностью $p_{E_0} \leqslant \delta$ и функция $f \in I(\Lambda, D)$ такая, что*

$$\ln|f(re^{i\varphi})| \geqslant rH_{K_s}(-\varphi), \quad re^{i\varphi} \in \Gamma(-\theta_2, -\theta_1) \setminus E_0. \tag{3.21}$$

Доказательство. Фиксируем $s \geqslant 1$, $\delta \in (0,1)$ и θ_1, θ_2, $\psi_1 < \theta_1 < \theta_2 < \psi_2$. Выберем $\tau \in (0, \frac{1}{2})$ такое, что

$$\Gamma_{\psi_1}(\tau) \cap \Gamma(\theta_1,\theta_2) = \emptyset, \qquad \Gamma_{\psi_2}(\tau) \cap \Gamma(\theta_1,\theta_2) = \emptyset. \tag{3.22}$$

По лемме 3.2 для $p = s+1$ и δ найдем $\varepsilon_0 > 0$. Пусть

$$0 < \varepsilon < \min\left\{\frac{\varepsilon_0}{17}, \frac{\nu_s}{5}\right\},$$

где $\nu_s > 0$ — число из неравенства (2.1).

Пусть $\Lambda^j = \{\lambda_{l,j}, n_{l,j}\}$, $j = 1,2$, — последовательность, состоящая из точек $|\lambda_k|e^{-i\psi_j}$, $\lambda_k \neq 0$. При этом $n_{l,j}$ совпадает с суммой n_m всех точек λ_m таких, что $|\lambda_m| = |\lambda_{l,j}|$. По лемме 3.3 для ε и τ существуют $\gamma_j \in (0,1)$, $f_j \in \mathbb{F}(\Lambda^j)$ и $R_j > 0$ такие, что

$$\left| \ln|f_j(e^{-i\psi_j})\lambda| - \frac{\pi|\operatorname{Im}\lambda|}{\gamma_j} \right| \leqslant \varepsilon|\lambda|, \quad \lambda \in (\mathbb{C} \setminus (\Gamma(\tau) \cup B(0,R_j))), \tag{3.23}$$

$$h_{f_j}(\varphi) \leqslant \frac{\pi|\sin(\varphi+\psi_j)|}{\gamma_j}+\varepsilon, \quad \varphi\in[0,2\pi], \quad j=1,2. \tag{3.24}$$

При этом согласно замечанию 3.1 к лемме 3.3 нулевое множество функции f_j является симметричным относительно начала координат и лежит на прямой $\{te^{-i\psi_j}, t\in\mathbb{R}\}$.

Пусть $\Lambda_0^j=\{\lambda_{l,j,0}, n_{l,j,0}\}$ — кратное нулевое множество функции f_j. Так как $f_j\in\mathbb{F}(\Lambda^j)$, для любого $\lambda_k\neq 0$ точка $|\lambda_k|e^{-i\psi_j}$ является членом Λ_0^j с кратностью не ниже чем сумма кратностей n_m всех точек λ_m таких, что $|\lambda_m|=|\lambda_k|$. В силу симметричности последовательности Λ_0^j точка $-|\lambda_k|e^{-i\psi_j}$ также является ее членом с той же кратностью, что и $|\lambda_k|e^{-i\psi_j}$.

Построим функцию $f_{j,0}$ при помощи функции f_j, используя лишь сдвиги некоторых ее нулей. Пусть $d\in(0,1)$ и $\psi>0$ такое, что

$$|1-e^{i\psi}|=d. \tag{3.25}$$

Определим вначале последовательность $\Lambda_{0,+}^j$, точки которой лежат в угле

$$\Gamma_j=\Gamma(-\psi_j-\psi,-\psi_j+\psi).$$

Пусть $\lambda_{l,j,0}$ лежит на луче

$$\{te^{-i\psi_j}, t>0\}.$$

Если $|\lambda_{l,j,0}|\neq|\lambda_k|$ для любого $\lambda_k\in\Gamma_j$, то пару $\lambda_{l,j,0}, n_{l,j,0}$ считаем элементом последовательности $\Lambda_{0,+}^j$. В противном случае элементом последовательности $\Lambda_{0,+}^j$ считаем пару λ_k, n_k для любого $\lambda_k\in\Gamma_j$ такого, что $|\lambda_{l,j,0}|=|\lambda_k|$. При этом, если сумма n_0 кратностей n_k всех этих точек $\lambda_k\in\Gamma_j$ строго меньше $n_{l,j,0}$, то элементом последовательности $\Lambda_{0,+}^j$ считаем также пару $\lambda_{l,j,0}$, $n_{l,j,0}-n_0$.

Таким образом, мы построили последовательность $\Lambda_{0,+}^j$. Используя ее, как и в (3.20), построим целую функцию $f_{j,0}$. Ее нулевое множество является объединением $\Lambda_{0,+}^j\cup\Lambda_{0,-}^j$ ($\Lambda_{0,-}^j$ симметрично $\Lambda_{0,+}^j$ относительно начала координат) и лежит в объединении углов $\Gamma_j\cup(-\Gamma_j)=\Gamma_j\cup e^{i\pi}\Gamma_j$. В частности, $f_{j,0}\in\mathbb{F}(\Lambda(-\psi_j-\psi,-\psi_j+\psi))$.

В силу построения и (3.25) нетрудно установить взаимно однозначное соответствие между точками последовательностей Λ_0^j и $\Lambda_{0,+}^j\cup\Lambda_{0,-}^j$ (с учетом кратностей) так, что эти последовательности становятся асимптотически d–близкими друг к другу.

Последовательность Λ_0^j является нулевым множеством целой функции экспоненциального типа f_j и не содержит ноль (замечание к лемме 3.3) . Поэтому Λ_0^j имеет конечную верхнюю плотность, и конечна также величина

$$C=\sup_r\frac{n(r,\Lambda_0^j)}{r}.$$

Тогда по теореме B из работы [2] (учитывая симметричность нулей функций f_j и $f_{j,0}$ относительно начала координат) для каждого $d\in(0,\frac{1}{2})$ найдется $C_1>0$ (которое зависит только от C) и множество $E_j(d)=\cup B(y_{m,j},q_{m,j})$ такие, что $E_j(d)$ центрировано с $\Lambda_0^j\cup\Lambda_{0,+}^j\cup\Lambda_{0,-}^j$ имеет линейную плотность $p_{E_j(d)}\leqslant\sqrt[4]{d}$ и

$$\left|\ln|f_j(\lambda)|-\ln|f_{j,0}(\lambda)|\right|\leqslant C_1\sqrt{d}|\lambda|, \qquad \lambda\in\mathbb{C}\setminus E_j(d), \qquad j=1,2. \tag{3.26}$$

В силу (3.24) и свойства индикатора [17, гл. I, §18, теорема 28] найдется $\mu\in(0,\frac{\tau}{2})$ и $r_0>0$ такие, что верно неравенство

$$\ln|f_j(t\lambda)|\leqslant 2\varepsilon|t|, \qquad \lambda\in B(e^{-i\psi_j},2\mu), \qquad |t|\geqslant r_0, \qquad j=1,2. \tag{3.27}$$

Выберем $d\in(0,\frac{1}{2})$ так, что

$$C_1\sqrt{d}\leqslant\varepsilon, \qquad \sqrt[4]{d}\leqslant\frac{\mu}{6}. \tag{3.28}$$

Поскольку $p_{E_j(d)} \leqslant \sqrt[4]{d}$, для некоторого числа $r_1 > r_0$ верно неравенство

$$\sum_{|y_{m,j}|<r} q_{m,j} \leqslant \frac{\mu r}{5}, \qquad r \geqslant r_1, \qquad j = 1,2. \tag{3.29}$$

Пусть $r \geqslant r_1$ и $B(y_{m,j}, q_{m,j})$ пересекает $B(0,r)$. Если $|y_{m,j}| \geqslant r$, то согласно (3.29) $q_{m,j} \leqslant \frac{\mu|y_{m,j}|}{5}$. Поэтому $(1-\frac{\mu}{5})|y_{m,j}| < r$. Отсюда имеем: $|y_{m,j}| < \frac{5r}{4}$. Таким образом, в силу (3.29) сумма радиусов всех кругов $B(y_{m,j}, q_{m,j})$, которые пересекают $B(0,r)$ не превышает $\frac{\mu r}{4}$.

Пусть $\lambda \in E_j(d) \setminus B(0,r_1)$ и круг $B(y_{m,j}, q_{m,j})$ содержит λ. Тогда $B(y_{m,j}, q_{m,j})$ пересекает $B(0,|\lambda|)$. Поэтому $q_{m,j} \leqslant \frac{\mu|\lambda|}{4}$. Так как $E_j(d)$ центрировано с множеством $\Lambda_0^j \cup \Lambda_{0,+}^j \cup \Lambda_{0,-}^j$, в этом множестве найдется точка λ_0 такая, что

$$|\lambda - \lambda_0| \leqslant |\lambda - y_{m,j}| + |y_{m,j} - \lambda_0| \leqslant \frac{\mu|\lambda|}{4} + \frac{\mu|\lambda|}{4} = \frac{\mu|\lambda|}{2}.$$

Следовательно,

$$|\lambda| \leqslant \frac{|\lambda_0|}{(1-\frac{\mu}{2})} \leqslant \frac{4|\lambda_0|}{3}$$

Поскольку все точки множества $\Lambda_0^j \cup \Lambda_{0,+}^j \cup \Lambda_{0,-}^j$ лежат в объединении углов $\Gamma_j \cup (-\Gamma_j)$, с учетом предыдущего и (3.25), (3.28) получаем:

$$|\lambda - |\lambda_0|e^{-i\psi_j}| \leqslant |\lambda - \lambda_0| + |\lambda_0 - |\lambda_0|e^{-i\psi_j}| \leqslant \frac{\mu|\lambda|}{2} + \frac{\mu|\lambda_0|}{6} \leqslant \frac{4\mu|\lambda_0|}{6} + \frac{\mu|\lambda_0|}{6} = \frac{5\mu|\lambda_0|}{6}.$$

Таким образом, верны вложения

$$E_j(d) \setminus B(0,r_1) \subset \Gamma_{-\psi_j}\left(\frac{5\mu}{6}\right) \cup \Gamma_{\pi-\psi_j}\left(\frac{5\mu}{6}\right) \subset \Gamma_{-\psi_j}(\tau) \cup \Gamma_{\pi-\psi_j}(\tau). \tag{3.30}$$

Отсюда с учетом (3.23), (3.26) и (3.28) имеем:

$$\ln|f_{j,0}(\lambda)| \geqslant \frac{\pi|\operatorname{Im}(\lambda e^{i\psi_j})|}{\gamma_j} - 2\varepsilon|\lambda|, \qquad \lambda \in \mathbb{C} \setminus (\Gamma_{-\psi_j}(\tau) \cup \Gamma_{\pi-\psi_j}(\tau) \cup B(0,r_2)), \tag{3.31}$$

где $j = 1,2$ и $r_2 = \max\{r_1, R_1, R_2\}$. Кроме того, в силу (3.26) и (3.28)

$$\ln|f_{j,0}(\lambda)| \leqslant \ln|f_j(\lambda)| + \varepsilon|\lambda|, \qquad \lambda \in \mathbb{C} \setminus E_j(d), \qquad j = 1,2. \tag{3.32}$$

Пусть $\lambda \in E_j(d) \setminus B(0,2r_1)$. В силу (3.30) найдется $t \in \mathbb{R}$ такое, что $\lambda \in B\Big(te^{-i\psi_j}, \frac{5\mu|t|}{6}\Big)$. Тогда

$$2r_1 \leqslant |\lambda| \leqslant |t| + \frac{5\mu|t|}{6} \leqslant 2|t|, \qquad |\lambda| \geqslant |t| - \frac{5\mu|t|}{6} \geqslant \frac{|t|}{2}.$$

Следовательно, $|t| \geqslant r_1$. Как показано выше, сумма диаметров кругов $B(y_{m,j}, q_{m,j})$, которые пересекают круг $B(te^{-i\psi_j}, 2\mu|t|)$ не превышает

$$2\frac{\mu(|t| + 2\mu|t|)}{4} \leqslant \mu|t|.$$

Следовательно, найдется $\mu_0 \in \left(\frac{5\mu}{6}, 2\mu\right)$ такое, что окружность $S(te^{-i\psi_j}, \mu_0|t|)$ не пересекает множество $E_j(d)$. Тогда согласно (3.32) и (3.27)

$$\ln|f_{j,0}(\xi)| \leqslant 2\varepsilon|t| + \varepsilon|\xi| \leqslant 2\varepsilon|t| + \varepsilon|t|(1+\mu_0) \leqslant 4\varepsilon|t|, \qquad \xi \in S(te^{-i\psi_j}, \mu_0|t|).$$

Отсюда по принципу максимума модуля получаем:

$$\ln|f_{j,0}(\lambda)| \leqslant 4\varepsilon|t| \leqslant 8\varepsilon|\lambda|, \qquad \lambda \in E_j(d) \setminus B(0,2r_1).$$

Тогда с учетом (3.32) и (3.24) имеем:

$$h_{f_{j,0}}(\varphi) \leqslant \frac{\pi|\sin(\varphi+\psi_j)|}{\gamma_j} + 8\varepsilon, \qquad \varphi \in [0, 2\pi], \quad j = 1, 2. \tag{3.33}$$

Рассмотрим функцию

$$g(\lambda) = f_{1,0}(\lambda) f_{2,0}(\lambda) e^{a_1\lambda} e^{a_2\lambda}, \qquad a_1 = \frac{-i\pi}{\gamma_1} e^{i\psi_1}, \qquad a_2 = \frac{i\pi}{\gamma_1} e^{i\psi_2}.$$

В силу (3.33) для каждого $\varphi \in [0, 2\pi]$ имеем:

$$h_g(\varphi) \leqslant \frac{\pi|\sin(\varphi+\psi_1)|}{\gamma_1} + \frac{\pi|\sin(\varphi+\psi_2)|}{\gamma_2} + \frac{\pi\sin(\varphi+\psi_1)}{\gamma_1} - \frac{\pi\sin(\varphi+\psi_2)}{\gamma_2} + 16\varepsilon.$$

Следовательно,

$$h_g(\varphi) \leqslant 16\varepsilon, \qquad \varphi \in [-\psi_2, -\psi_1]. \tag{3.34}$$

Точно также, используя (3.31), получаем:

$$\ln|g(\lambda)| \geqslant -4\varepsilon|\lambda|, \qquad \lambda \in \Gamma(-\psi_2, -\psi_1) \setminus (\Gamma_{-\psi_1}(\tau) \cup \Gamma_{-\psi_2}(\tau) \cup B(0, r_2)). \tag{3.35}$$

Выберем α_1, α_2 такие, что

$$\psi_1 < \alpha_1 < \theta_1 < \theta_2 < \alpha_2 < \psi_2, \qquad \alpha_1 < \psi_1 + \psi, \qquad \alpha_2 > \psi_2 - \psi. \tag{3.36}$$

По лемме 3.2 найдутся множество E с линейной плотностью $p_E \leqslant \delta$ и функция $f_0 \in I(\Lambda(-\alpha_2, -\alpha_1), D)$, удовлетворяющая условиям (3.4) и (3.5).

Так как $D \in \mathcal{D}(\psi_1, \psi_2)$ и $\Xi(\Lambda) \subseteq S(0, 1) \setminus \operatorname{int} J(D)$, в силу двух последних неравенств в (3.36) вне угла $\Gamma(-\alpha_2, -\alpha_1) \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ имеется лишь конечное число точек λ_k. Пусть это будут точки λ_k, $k = \overline{1, k_0}$. Положим

$$f(\lambda) = g(\lambda) f_0(\lambda) G(\lambda), \qquad G(\lambda) = \prod_{k=1}^{k_0} (\lambda - \lambda_k)^{n_k}.$$

По построению $f \in \mathbb{F}(\Lambda)$. Поскольку $h_G \equiv 0$, в силу (3.34), (3.4), выбора числа $\varepsilon > 0$ и определения множества $J(D)$ имеем:

$$h_f(\varphi) \leqslant h_g(\varphi) + h_{f_0}(\varphi) \leqslant H_D(-\varphi) - \varepsilon, \qquad \varphi \in [0, 2\pi].$$

Это означает, что $f \in P_D$. Таким образом, $f \in I(\Lambda, D)$. Выберем $R_0 \geqslant r_2$ такое, что

$$\ln|G(\lambda)| \geqslant -\varepsilon|\lambda|, \qquad \lambda \in \mathbb{C} \setminus B(0, R_0)$$

и положим $E_0 = E \cup B(0, R_0)$. Тогда $p_{E_0} \leqslant \delta$, а в силу (3.35), (3.22), (3.5), выбора числа $\varepsilon > 0$ и (2.1) получаем (3.24). Лемма доказана. □

4. Разложение инвариантного подпространства

Для представления функций из инвариантных подпространств в виде суммы функций из других инвариантных подпространств нам необходима интерполирующая функция А.Ф. Леонтьева.

Пусть f — целая функция экспоненциального типа, $\gamma(t, f)$ — функция, ассоциированная по Борелю с f, K — сопряженная диаграмма функции f и $0 \in K$. Предположим, что D — выпуклая область, $g \in H(D)$, и $\sigma \in \mathbb{C}$ такое, что сдвиг $K + \sigma$ лежит в области D. Интерполирующей функцией для функции g называется [19, гл. I, §2]

$$\omega_f(\lambda, \sigma, g) = e^{-\sigma\lambda} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Omega} \gamma(t, f) \left(\int_0^t g(t + \sigma - \eta) e^{\lambda\eta} d\eta \right) dt, \tag{4.1}$$

где Ω — контур (простая замкнутая непрерывная спрямляемая кривая), охватывающий компакт K и лежащий в области $D-\sigma$.

Снимем ограничение $0 \in K$. Выберем произвольную точку $w \in K$. Пусть

$$f_w(z) = f(z)e^{-wz}.$$

Тогда [20, гл. I, теорема 5.3] верно равенство $\gamma(t, f_w) = \gamma(t+w, f)$. Сопряженная диаграмма функции $f_w(z)$ совпадает с компактом $K_w = K - w$, который содержит начало координат. Тогда по формуле (4.1) определяется функция $\omega_{f_w}(\lambda, \sigma, g)$ для всех $\sigma \in \mathbb{C}$ таких, что компакт $K_w + \sigma$ лежит в области D. Если $K \subset D$, то для любого $w \in K$ компакт $K_w + w$ лежит в области D. Поэтому в этом случае для любого $w \in K$ определена функция $\omega_{f_w}(\lambda, w, g)$.

Отметим некоторые свойства функции $\omega_{f_w}(\lambda, \sigma, g)$. Из (4.1) следует, что она является целой и линейна по третьему аргументу. Пусть $K(\varepsilon) = K + B(0, \varepsilon)$ — ε–расширение компакта K, $\omega(\varepsilon) = \partial(K(\varepsilon)) - w$ и $\omega_\sigma(\varepsilon) = \omega(\varepsilon) + \sigma \subset D$. Так как

$$H_{\omega(\varepsilon)}(\varphi) = H_K(\varphi) + \varepsilon - \operatorname{Re}(we^{i\varphi}),$$

в силу (4.1) имеем:

$$\begin{aligned}
|\omega_{f_w}(\lambda, \sigma, g)| &\leqslant \frac{1}{2\pi}|e^{-\sigma\lambda}| \sup_{z \in \omega(\varepsilon)} |e^{\lambda z}| \sup_{z \in \omega_\sigma(\varepsilon)} |g(z)| \int\limits_{\omega(\varepsilon)} |\gamma(t, f_w)||t||dt| \\
&\leqslant \frac{\tau_\varepsilon}{2\pi} \exp\big(rH_{\omega(\varepsilon)}(-\varphi) - \operatorname{Re}(\sigma\lambda)\big) \sup_{z \in \omega_\sigma(\varepsilon)} |g(z)| \int\limits_{\partial K(\varepsilon)} |\gamma(t, f)||dt| \\
&= A(f, \varepsilon) \exp\left(rH_K(-\varphi) + \varepsilon r - \operatorname{Re}((w+\sigma)\lambda)\right) \sup_{z \in \omega_\sigma(\varepsilon)} |g(z)|, \qquad \lambda = re^{i\varphi},
\end{aligned}$$

где $A(f, \varepsilon) = (2\pi)^{-1}\tau_\varepsilon(f)d_\varepsilon$, d_ε — диаметр области $K(\varepsilon)$ и $\tau_\varepsilon(f)$ — последний интеграл. Отсюда с учетом равенства (4.1) для всех $\lambda \in \mathbb{C}$ получаем:

$$|\omega_{f_w}(\lambda, \sigma, g)| \leqslant A(f, \varepsilon) \exp((h_f(\varphi) + \varepsilon)r - \operatorname{Re}((w+\sigma)\lambda)) \sup_{z \in \omega_\sigma(\varepsilon)} |g(z)|. \tag{4.2}$$

В случае, когда $\sigma = w$, имеем: $\omega_\sigma(\varepsilon) = \partial(K(\varepsilon))$.

Отметим теперь главное свойство интерполирующей функции. Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ — кратное нулевое множество функции f и

$$P(z) = \sum_{k=1}^{p} \sum_{n=0}^{n_k - 1} a_{k,n} z^n e^{\lambda_k z}.$$

Тогда имеют место равенства [19, гл. I, §2, теорема 1.2.4]:

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S(\lambda_k, b_k)} \frac{\omega_{f_w}(\lambda, \sigma, P)}{f_w(\lambda)} e^{\lambda z} d\lambda = \sum_{n=0}^{n_k - 1} a_{k,n} z^n e^{\lambda_k z}, \qquad \sigma \in \mathbb{C}, \qquad k = \overline{1, p}, \tag{4.3}$$

где $S(\lambda_k, b_k)$ — окружность, внутри которой нет точек λ_s, $s \neq k$. Нетрудно заметить, что равенство (4.3) верно и для любой функции $f \in \mathbb{F}(\Lambda)$.

Следующие утверждения являются частными случаями соответственно теорем 2.1.1 и 2.1.2 из книги [19].

Лемма 4.1. *Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$, D — выпуклая область и система $\mathcal{E}(\Lambda)$ не полна в пространстве $H(D)$. Предположим, что*

$$g(z) = \lim_{\mu \to \infty} P_\mu(z), \qquad P_\mu(z) = \sum_{k=1}^{\mu} \sum_{n=0}^{n_k - 1} a_{k,n,\mu} z^n e^{\lambda_k z}, \tag{4.4}$$

причем сходимость равномерная на компактах из области D. Тогда существуют пределы

$$a_{k,n} = \lim_{\mu\to\infty} a_{k,n,\mu}, \qquad n = \overline{0, n_k - 1}, \qquad k \geqslant 1.$$

Лемма 4.2. *Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$, D — выпуклая область и система $\mathcal{E}(\Lambda)$ не полна в пространстве $H(D)$. Предположим, что верно (4.4) и*

$$g(z) = \lim_{\mu\to\infty} Q_\mu(z), \qquad Q_\mu(z) = \sum_{k=1}^{\mu}\sum_{n=0}^{n_k-1} b_{k,n,\mu} z^n e^{\lambda_k z},$$

причем сходимость равномерная на компактах из области D. Тогда

$$\lim_{\mu\to\infty} a_{k,n,\mu} = \lim_{\mu\to\infty} b_{k,n,\mu}, \qquad n = \overline{0, n_k - 1}, \qquad k \geqslant 1.$$

Обратно, если последовательности $\{P_\mu\}$ и $\{Q_\mu\}$ сходятся равномерно на компактах из области D и верны последние равенства, то эти последовательности сходятся к одной и той же функции.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$, $\Lambda_1 = \{\xi_p, m_p\}$ и $\Lambda_2 = \{\varsigma_j, l_j\}$. Будем писать $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$, если для каждого $k \geqslant 1$ существует $p \geqslant 1$ такое, что $\lambda_k = \xi_p$ и $n_k = m_p$, либо существует $j \geqslant 1$ такое, что $\lambda_k = \varsigma_j$ и $n_k = l_j$. При помощи интерполирующей функции в работе [12, теорема 3.4)] доказан следующий результат.

Теорема 4.1. *Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$, D — выпуклая область и система $\mathcal{E}(\Lambda)$ не полна в пространстве $H(D)$. Тогда существуют последовательности Λ_1 и Λ_2 такие, что $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$, $\Xi(\Lambda_2) \subset S(0,1) \setminus \operatorname{int} J(D)$ и для каждой функции $g \in W(\Lambda, D)$ верно представление $g = g_1 + g_2$, где $g_1 \in W(\Lambda_1, \mathbb{C})$ и $g_2 \in W(\Lambda_2, D)$. В частности, $\Lambda_1 = \emptyset$ и $g_1 = 0$, когда $\Xi(\Lambda) \cap \operatorname{int} J(D) = \emptyset$, и $\Lambda_2 = \emptyset$ и $g_2 = 0$, когда $\Xi(\Lambda) \cap \operatorname{int} J(D)$.*

Лемма 4.3. *Пусть $0 < \psi_2 - \psi_1 \leqslant \pi$, $D \in \mathcal{D}(\psi_1, \psi_2)$, $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$, система $\mathcal{E}(\Lambda)$ не полна в пространстве $H(D)$. Предположим, что $S_\Lambda(\mu) = 0$, $\mu \in S(0,1) \setminus \overline{J(D)}$, и для любых $\varphi_1, \varphi_2 \notin \Phi(D)$ таких, что $\psi_1 < \varphi_1 < \varphi_2 < \psi_2$ верно неравенство (3.3). Тогда для любых θ_1, θ_2, $\psi_1 < \theta_1 < \theta_2 < \psi_2$, в пространстве $W(\Lambda(-\theta_2, -\theta_1), D)$ имеет место фундаментальный принцип и $m(\Lambda(-\theta_2, -\theta_1)) = 0$.*

Доказательство. Пусть $\psi_1 < \theta_1 < \theta_2 < \psi_2$ и $\Lambda_0 = \Lambda(-\theta_2, -\theta_1)$. Тогда $\Xi(\Lambda_0) \subset S(0,1) \setminus \overline{J(D)}$. Из условия следует, что $S_{\Lambda_0} = 0$. Пусть $\mathcal{K}(D) = \{K_p\}$. Фиксируем $p \geqslant 1$, $\delta \in (0,1)$ и $\delta_0 \in \left(0, \frac{\delta}{16}\right)$. По лемме 3.4 существует множество $E_0 \cup B(z_i, \rho_i)$ с линейной плотностью $p_{E_0} \leqslant \delta_0$ и функция $f \in I(\Lambda_0, D)$ такая, что

$$\ln |f(re^{i\varphi})| \geqslant r H_{K_p}(-\varphi), \qquad re^{i\varphi} \in \Gamma(-\theta_2, -\theta_1) \setminus E_0.$$

Выберем $R > 0$ такое, что

$$\sum_{|z_i| < r} \rho_i < 2\delta_0 r, \qquad r \geqslant R.$$

Как и в лемме 3.4 показывается, что сумма радиусов всех кругов $B(z_i, \rho_i)$, которые пересекают $B(0, r)$, строго меньше $\frac{8\delta_0 r}{3}$.

Пусть $\lambda_k \in \Gamma(-\theta_2, -\theta_1) \setminus B(0, R)$. Тогда сумма диаметров всех кругов $B(z_i, \rho_i)$, которые пересекают $B(\lambda_k, 8\delta_0|\lambda_k|)$, строго меньше $8\delta_0|\lambda_k|$. Следовательно, найдется $\mu \in (0, 8)$ такое, что окружность $S(\lambda_k, \mu\delta_0|\lambda_k|)$ не имеет общих точек с множеством E_0, т.е.

$$\ln |f(z)| \geqslant r H_{K_p}(-\varphi), \qquad z = re^{i\varphi} \in \Gamma(-\theta_2, -\theta_1) \cap S(\lambda, \mu\delta_0|\lambda_k|).$$

Пусть $z \in \Gamma(-\theta_2, -\theta_1) \cap S(\lambda_k, \mu\delta_0|\lambda_k|)$. Тогда $\lambda_k \in B(z, 2\mu\delta_0 r) \subset B(z, \delta r)$.

Таким образом, все условия теоремы 2.8 выполнены для последовательности Λ_0. Поэтому согласно этой теореме $m(\Lambda_0) = 0$ и каждая функция $g \in W(\Lambda_0, D)$ представляется рядом

$$g(z) = \sum_{\lambda_k, n_k \in \Lambda_0} d_{k,n} z^n e^{\lambda_k z}, \qquad z \in D. \tag{4.5}$$

Так как система $\mathcal{E}(\Lambda)$ не полна в $H(D)$, имеем $\overline{n}(\Lambda_0) \leqslant \overline{n}(\Lambda) < \infty$. Отсюда следует, что $\sigma(\Lambda_0) = 0$. Тогда по теореме 2.1 верно включение $d = \{d_{k,n}\} \in Q(D, \Lambda_0)$. Поэтому согласно лемме 2.1 для каждого $p \geqslant 1$ найдутся $C_p > 0$ и номер $m(p)$ такой, что

$$\sum_{\lambda_k, n_k \in \Lambda_0} |d_{k,n}| \sup_{z \in K_p} |z^n e^{z\lambda_k}| \leqslant C_p \|d\|_{m(p)}, \qquad d = \{d_{k,n}\} \in Q(D, \Lambda).$$

В частности, это означает, что ряд (4.5) сходится равномерно на компактах в области D для любой функции $g \in W(\Lambda_0, D)$, т.е. в пространстве $W(\Lambda_0, D)$ имеет место фундаментальный принцип. Лемма доказана. □

Теорема 4.2. *Пусть $0 < \psi_2 - \psi_1 \leqslant \pi$, $D \in \mathcal{D}(\psi_1, \psi_2)$, $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$, система $\mathcal{E}(\Lambda)$ не полна в пространстве $H(D)$. Предположим, что $S_\Lambda(\mu) = 0$, $\mu \in S(0,1) \setminus \overline{J(D)}$, и для любых $\varphi_1, \varphi_2 \notin \Phi(D)$ таких, что $\psi_1 < \varphi_1 < \varphi_2 < \psi_2$ верно неравенство (3.3). Тогда для любой функции $g \in W(\Lambda, D)$ верно представление $g = g_1 + g_2 + g_3$, где $g_1 \in W(\Lambda_1, \mathbb{C})$, $g_2 \in W(\Lambda_2, D)$ и $g_3 \in W(\Lambda_3, D)$. При этом $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \Lambda_3$, $\Xi(\Lambda_2) \subseteq \partial J(D)$ и g_3 представляется рядом (1.1), который сходится равномерно на компактах из области D.*

В частности, $\Lambda_1 = \emptyset$ и $g_1 = 0$, когда $\Xi(\Lambda) \cap \overline{\operatorname{int} J(D)} = \emptyset$, $\Lambda_2 = \emptyset$ и $g_2 = 0$, когда $\Xi(\Lambda) \subseteq \operatorname{int} J(D)$, $\Lambda_3 = \emptyset$ и $g_3 = 0$, когда $\Xi(\Lambda) \subseteq \overline{J(D)}$.

Доказательство. По теореме 4.1 существуют последовательности Λ_1 и $\Lambda_{2,0}$ такие, что $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_{2,0}$, $\Xi(\Lambda_{2,0}) \subset S(0,1) \setminus \operatorname{int} J(D)$ и для каждой функции $g \in W(\Lambda, D)$ верно представление $g = g_1 + g_{2,0}$, где $g_1 \in W(\Lambda_1, \mathbb{C})$ и $g_{2,0} \in W(\Lambda_{2,0}, D)$. Если $\Xi(\Lambda_{2,0}) \subseteq \partial J(D)$, то теорема доказана. В противном случае мы должны представить $g_{2,0}$ в виде суммы $g_2 + g_3$. Для этого нам необходимо представить $\Lambda_{2,0}$ в виде объединения $\Lambda_{2,1} \cup \Lambda_{3,1}$, где $\Lambda_{2,1}$ удовлетворяет условию $\Xi(\Lambda_{2,1}) \subseteq \partial J(D)$, а последовательность $\Lambda_{3,1}$ разбита на специальные конечные группы.

Пусть $g_{2,0} \in W(\Lambda_{2,0}, D)$. Тогда

$$g_{2,0}(z) = \lim_{\mu \to \infty} P_\mu(z), \qquad P_\mu(z) = \sum_{k=1}^{\mu} \sum_{n=0}^{n_k - 1} a_{k,n,\mu} z^n e^{\lambda_k z},$$

причем сходимость равномерная на компактах из области D. Если пара λ_k, n_k является элементом последовательности Λ_1, то $a_{k,n,\mu} = 0$. Положим еще $a_{k,n,\mu} = 0$, $k > \mu$.

Выберем последовательности $\{\theta_{1,l}\}$, $\{\theta_{2,l}\}$ такие, что

$$\begin{gathered} \psi_1 < \dots < \theta_{1,l} < \dots < \theta_{1,1} < \theta_{2,1} < \dots < \theta_{2,l} < \ldots < \psi_2, \\ (\psi_1, \psi_2) = \bigcup_{l=1}^{\infty} (\theta_{1,l}, \theta_{2,l}). \end{gathered} \tag{4.6}$$

Так как $\mathcal{K}(D) = \{K_p\}_{p=1}^{\infty}$ исчерпывает область D, найдется подпоследовательность натуральных чисел $\{p(l)\}$, удовлетворяющая условиям

$$p(l) \geqslant l + 1, \qquad H_{K_{p(l)}}(\varphi) + \frac{\nu_l}{4} \geqslant H_D(\varphi), \qquad \varphi \in [\theta_{1,l+1}, \theta_{2,l+1}], \qquad l \geqslant 1, \tag{4.7}$$

где ν_l — число из (2.1). Выберем теперь числа $\delta_l \in \left(0, \frac{1}{30}\right)$ такие, что

$$\Gamma_{\theta_{1,l}}(18\delta_l) \cup \Gamma(\theta_{1,l}, \theta_{2,l}) \cup \Gamma_{\theta_{2,l}}(18\delta_l) \subset \Gamma(\theta_{1,l+1}, \theta_{2,l+1}), \qquad \delta_l > \delta_{l+1}, \qquad l \geqslant 1. \tag{4.8}$$

По лемме 3.4 для каждого $l \geqslant 1$ существует множество $E_l = \cup B(z_{j,l}, r_{j,l})$ с линейной плотностью $p_{E_l} \leqslant \delta_l$ и функция $f_l \in I(\Lambda_{2,0}, D)$ такая, что

$$\ln|f_l(re^{i\varphi})| \geqslant rH_{K_p(l)}(-\varphi), \qquad re^{i\varphi} \in \Gamma(-\theta_{2,l+1}, -\theta_{1,l+1}) \setminus E_l. \tag{4.9}$$

Так как $f_l \in I(\Lambda_{2,0}, D)$, существует $\varepsilon_l > 0$ такое, что

$$h_{f_l}(\varphi) + \varepsilon_l < H_D(-\varphi), \qquad \varphi \in [0, 2\pi], \qquad l \geqslant 1. \tag{4.10}$$

Пусть T_l — сопряженная диаграмма функции f_l. Из (4.10) с учетом (3.1) следует, что $T_l \subset D$. Более того, замыкание области $T_{l,0} = T_l + B(0, \varepsilon_l)$ также лежит в области D. Если $T_l = K$, то граница $\partial T_{l,0}$ совпадает с множеством $\omega_w(\varepsilon_l)$ из неравенства (4.2). В силу (4.10) найдется $R_l > 0$ такое, что

$$A(f_l, \varepsilon_l)\exp((h_{f_l}(\varphi) + \varepsilon_l)r) \leqslant \exp(H_D(-\varphi)r), \qquad r \geqslant R_l, \qquad l \geqslant 1, \tag{4.11}$$

где $A(f_l, \varepsilon_l)$ — число, которое определяется также как в (4.2). Так как P_μ сходится равномерно на каждом компакте из области D, можно считать, что

$$\begin{gathered} \max_{z \in \partial T_{l,0}} |g_{2,0}(z)| \leqslant \exp\left(r\frac{\nu_l}{6}\right), \qquad \max_{z \in \partial T_{l,0}} |P_\mu(z)| \leqslant \exp\left(r\frac{\nu_l}{6}\right), \\ r \geqslant R_l, \qquad \mu \geqslant 1, \qquad l \geqslant 1. \end{gathered} \tag{4.12}$$

Отметим, что первое неравенство здесь следует из второго. Можно также считать, что

$$\frac{1}{r}\sum_{|z_{j,l}|<r} r_{j,l} < \frac{6\delta_l}{5}, \qquad r \geqslant R_l, \qquad 2R_l \leqslant R_{l+1}, \qquad l \geqslant 1, \tag{4.13}$$

$$n(r+1, \Lambda) \leqslant (\overline{n}(\Lambda) + 1)r, \qquad r \geqslant R_1, \tag{4.14}$$

$$\pi(\overline{n}(\Lambda) + 1)r^2 \leqslant \exp\left(r\frac{\nu_l}{6}\right), \qquad r \geqslant R_l, \qquad l \geqslant 1. \tag{4.15}$$

Пусть $r \geqslant R_l$ и $B(z_{j,l}, r_{j,l})$ пересекает $B(0, r)$. Тогда, как и в лемме 3.4, имеем: $|z_{j,l}| < \dfrac{10r}{9}$. Поэтому в силу (4.13) сумма радиусов всех кругов $B(z_{j,l}, r_{j,l})$, которые пересекают $B(0, r)$, не превышает $\dfrac{4\delta_l r}{3}$.

Построим по индукции области $\Omega_{l,m}$, $m = \overline{1, m(l)}$, $l \geqslant 1$. Отметим, что для некоторых номеров l наборы $\Omega_{l,m}$, $m = \overline{1, m(l)}$, могут отсутствовать. В этих случаях для удобства будем считать, что $m(l) = 0$ и $\cup_m \Omega_{l,m} = \emptyset$. Положим

$$\Gamma_l = \Gamma(-\theta_{2,l}, -\theta_{1,l}) \cap B(0, R_{l+2}) \setminus B(0, R_{l+1}).$$

Пусть $l = 1$. Если множество Γ_1 не содержит точек λ_k, то набор $\Omega_{1,m}$, $m = \overline{1, m(1)}$, отсутствует. В противном случае пусть $\lambda_{k(1,1)} \in \Gamma_1$ одна из точек λ_k такая, что

$$|\lambda_{k(1,1)}| = \min\{|\lambda_k| : \lambda_k \in \Gamma_1\}.$$

Так как $9\delta_l < \dfrac{1}{2}$, из сказанного выше следует, что сумма диаметров всех кругов $B(z_{j,1}, r_{j,1})$ и $B(z_{j,2}, r_{j,2})$, которые пересекают круг $B(\lambda_{k(1,1)}, 9\delta_1|\lambda_{k(1,1)}|)$, не превосходит

$$2\frac{4\delta_1|\lambda_{k(1,1)}|}{3}\frac{3}{2} + 2\frac{4\delta_2|\lambda_{k(1,1)}|}{3}\frac{3}{2} < 8\delta_1|\lambda_{k(1,1)}|.$$

Следовательно, существует $\mu_{1,1} \in (0, 9)$ такое, что

$$S(\lambda_{k(1,1)}, \mu_{1,1}\delta_1|\lambda_{k(1,1)}|) \cap E_1 = \emptyset, \qquad S(\lambda_{k(1,1)}, \mu_{1,1}\delta_1|\lambda_{k(1,1)}|) \cap E_2 = \emptyset.$$

Положим $\Omega_{1,1} = B(\lambda_{k(1,1)}, \mu_{1,1}\delta_1|\lambda_{k(1,1)}|)$. Предположим, что мы построили области $\Omega_{1,1}, \ldots, \Omega_{1,m-1}$. Если множество $\Gamma_1 \setminus \cup_{s=1}^{m-1}\Omega_{1,s}$ не содержит точек λ_k, то полагаем $m(1) =$

$m-1$. В противном случае определим $\Omega_{1,m}$. Пусть $\lambda_{k(1,m)} \in \Gamma_1 \setminus \cup_{s=1}^{m-1}\Omega_{1,s}$ одна из точек λ_k такая, что
$$|\lambda_{k(1,m)}| = \min\{|\lambda_k| : \lambda_k \in \Gamma_1 \setminus \cup_{s=1}^{m-1}\Omega_{1,s}\}.$$
Как и выше, найдем $\mu_{1,m} \in (0,9)$ из условий
$$S(\lambda_{k(1,m)}, \mu_{1,m}\delta_1|\lambda_{k(1,m)}|) \cap E_1 = \emptyset, \qquad S(\lambda_{k(1,1)}, \mu_{1,1}\delta_1|\lambda_{k(1,1)}|) \cap E_2 = \emptyset.$$
Положим
$$\Omega_{1,m} = B(\lambda_{k(1,m)}, \mu_{1,m}\delta_1|\lambda_{k(1,m)}|) \setminus \bigcup_{s=1}^{m-1} \Omega_{1,s}.$$
Предположим, что мы построили области $\Omega_{i,m}$, $m = \overline{1, m(i)}$, $i = \overline{1, l-1}$. Если множество Γ_l не содержит точек λ_k, то набор $\Omega_{l,m}$, $m = \overline{1, m(l)}$, отсутствует. В противном случае, как и выше, построим области $\Omega_{l,m}$, $m = \overline{1, m(l)}$ в виде
$$\begin{aligned} \Omega_{l,1} &= B(\lambda_{k(l,1)}, \mu_{l,1}\delta_l|\lambda_{k(l,1)}|) \setminus \left(\bigcup_{s=1}^{m(l-1)} \Omega_{l-1,s}\right), \\ \Omega_{l,m} &= B(\lambda_{k(l,m)}, \mu_{l,m}\delta_l|\lambda_{k(l,m)}|) \setminus \left(\bigcup_{s=1}^{m-1} \Omega_{l,s} \bigcup_{s=1}^{m(l-1)} \Omega_{l-1,s}\right), \qquad m = \overline{2, m(l)}, \end{aligned} \tag{4.16}$$
где $\mu_{l,m} \in (0,9)$, $m = \overline{1, m(l)}$, удовлетворяет условиям
$$S(\lambda_{k(l,m)}, \mu_{l,m}\delta_l|\lambda_{k(l,m)}|) \cap E_l = \emptyset, \qquad S(\lambda_{k(l,m)}, \mu_{l,m}\delta_l|\lambda_{k(l,m)}|) \cap E_{l+1} = \emptyset. \tag{4.17}$$
Таким образом, области $\Omega_{l,m}$, $m = \overline{1, m(l)}$, $l \geqslant 1$, определены. Пусть $\Lambda_{3,1}$ состоит из всех пар λ_k, n_k таких, что
$$\lambda_k \in \Omega = \bigcup_{l=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{m(l)\neq 0} \Omega_{l,m},$$
и $\Lambda_{2,1}$ — последовательность, дополняющая $\Lambda_{3,1}$ до $\Lambda_{2,0}$ ($\Lambda_{2,0} = \Lambda_{2,1} \cup \Lambda_{3,1}$). По построению каждая точка
$$\lambda_k \in \bigcup_{l=1}^{\infty} (\Gamma(-\theta_{2,l}, -\theta_{1,l}) \setminus B(0, R_{l+1}))$$
принадлежит множеству Ω. Следовательно, в силу равенства из (4.6) имеем:
$$\Xi(\Lambda_{2,1}) \subseteq \partial J(D).$$
Также по построению с учетом (4.8) имеем:
$$R_{l+1} \leqslant |\lambda_{k(l,m)}| \leqslant R_{l+2}, \qquad l \geqslant 1, \qquad m(l) \neq 0, \tag{4.18}$$
$$|\lambda_{k(l,m)} - z| < 9\delta_l|\lambda_{k(l,m)}|, \qquad z \in \Omega_{l,m}, \qquad m = \overline{1, m(l)}, \qquad l \geqslant 1, \qquad m(l) \neq 0, \tag{4.19}$$
$$\overline{\Omega_{l,m}} \subset \Gamma(\theta_{1,l+1}, \theta_{2,l+1}), \qquad m = \overline{1, m(l)}, \qquad l \geqslant 1, \qquad m(l) \neq 0. \tag{4.20}$$
Так как $\delta_l \in \left(0, \frac{1}{30}\right)$, в силу второго соотношения в (4.6) круги $B(\lambda_{k(l,m)}, \mu_{l,m}\ \delta_l|\lambda_{k(l,m)}|)$ и $B(\lambda_{k(s,j)}, \mu_{s,j}\delta_l|\lambda_{k(s,j)}|)$ не пересекаются для всех $s < l-1$ и $l \geqslant 3$. Следовательно, области $\Omega_{l,m}$ и $\Omega_{s,j}$ не пересекаются для всех $s < l-1$ и $l \geqslant 3$. По построению области $\Omega_{l,m}$, $m = \overline{1, m(l)}$, $\Omega_{l-1,j}$, $j = \overline{1, m(l-1)}$, попарно не пересекаются. Таким образом, области $\Omega_{l,m}$, $m = \overline{1, m(l)}$, $l \geqslant 1$, попарно не пересекаются.

По построению $\partial\Omega_{l,m}$ состоит из дуг некоторых окружностей из набора
$$S(\lambda_{k(l,m)}, \mu_{l,m}\delta_l|\lambda_{k(l,m)}|), \qquad m = \overline{1, m-1},$$

$$S(\lambda_{k(l-1,m)}, \mu_{l-1,m}\delta_{l-1}|\lambda_{k(l-1,m)}|), \qquad m = \overline{1, m(l-1)}.$$

При этом все центры окружностей разные и

$$|\lambda_{k(l-1,m)}| \leqslant \ldots \leqslant |\lambda_{k(l-1,m(l-1))}| \leqslant |\lambda_{k(l,1)}| \leqslant \ldots \leqslant |\lambda_{k(l,m)}|.$$

Таким образом, число окружностей, из дуг которых состоит граница $\partial\Omega_{l,m}$, не превосходит $n(|\lambda_{k(l,m)}| + 1, \Lambda)$. Следовательно, с учетом включения $\delta_l \in \left(0, \frac{1}{30}\right)$ получаем:

$$b_{l,m} \leqslant \pi n(|\lambda_{k(l,m)}| + 1, \Lambda)|\lambda_{k(l,m)}|, \qquad m = \overline{1, m(l)}, \qquad l \geqslant 1, \qquad m(l) \neq 0, \tag{4.21}$$

где $b_{l,m}$ — длина границы $\partial\Omega_{l,m}$. В силу (4.17), (4.20) и (4.9) имеем:

$$\begin{gathered} \ln |f_l(re^{i\varphi})| \geqslant rH_{K_{p(l)}}(-\varphi), \qquad re^{i\varphi} \in \partial\Omega_{l,m}, \\ m = \overline{1, m(l)}, \qquad l \geqslant 1, \qquad m(l) \neq 0. \end{gathered} \tag{4.22}$$

Пусть $w \in T_l$ и $f_{l,w}(z) = f_l(z)e^{-wz}$. По формуле (4.1) определяется интерполирующая функция $\omega_{f_{l,w}}(\lambda, w, P_\mu)$ для всех $\mu \geqslant 1$. Из (4.3) следует, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S(\lambda_k, b_k)} \frac{\omega_{f_{l,w}}(\lambda, w, P_\mu)}{f_{l,w}(\lambda)} e^{\lambda z} d\lambda = \sum_{n=0}^{n_k-1} a_{k,n,\mu} z^n e^{\lambda_k z}, \qquad w \in T_l, \qquad k \geqslant 1, \qquad l \geqslant 1,$$

где $S(\lambda_k, b_k)$ — окружность, внутри которой нет точек λ_s, $s \neq k$,

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S(\xi_s, c_s)} \frac{\omega_{f_{l,w}}(\lambda, w, P_\mu)}{f_{l,w}(\lambda)} e^{\lambda z} d\lambda = 0,$$

где ξ_s — нуль функции $f_{l,w}$ отличный от всех λ_k, и $S(\xi_s, c_s)$ — окружность, внутри которой нет нулей функции $f_{l,w}$ за исключением точки ξ_s.

Фиксируем $l \geqslant 1$, $m(l) \neq 0$, $w \in T_l$. По теореме о вычетах получаем:

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial\Omega_{l,m}} \frac{\omega_{f_{l,w}}(\lambda, w, P_\mu)}{f_{l,w}(\lambda)} e^{\lambda z} d\lambda = \sum_{\lambda_k \in \Omega_{l,m}} \sum_{n=0}^{n_k-1} a_{k,n,\mu} z^n e^{\lambda_k z} = p_{l,m,\mu}(z), \qquad m = \overline{1, m(l)}. \tag{4.23}$$

Так как $\delta_l \in \left(0, \frac{1}{30}\right)$, согласно (4.18) и (4.19) имеем: $\partial\Omega_{l,m} \cap B(0, R_l) = \emptyset$. Поэтому в силу (4.2), (4.11) и (4.22) получаем:

$$|p_{l,m,\mu}(z)| \leqslant \frac{b_{l,m}}{2\pi} \max_{\lambda \in \partial\Omega_{l,m}} \left(\frac{\exp(rH_D(-\varphi) - \mathrm{Re}((2w - z)\lambda))}{\exp(rH_{K_{p(l)}}(-\varphi) - \mathrm{Re}(w\lambda))} \right) \max_{z \in \partial T_{l,0}} |P_\mu(z)|,$$

где $\lambda = re^{i\varphi}$. Отсюда с учетом (4.7), (4.20), (4.14), (4.15), (4.21) и (4.12) имеем:

$$\begin{aligned} |p_{l,m,\mu}(z)| &\leqslant b_{l,m} \max_{\lambda \in \partial\Omega_{l,m}} \left(\exp\left(\frac{\nu_l}{4} r - \mathrm{Re}((w - z)\lambda) \right) \right) \max_{z \in \partial T_{l,0}} |P_\mu(z)| \\ &\leqslant \max_{\lambda \in \partial\Omega_{l,m}} \left(\exp\left(\frac{\nu_l}{4} r - \mathrm{Re}((w - z)\lambda) \right) \right) \exp\left(\frac{\nu_l}{3} |\lambda_{k(l,m)}| \right), \\ m &= \overline{1, m(l)}, \quad \mu \geqslant 1. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Выберем $w \in T_l$ такое, что

$$\mathrm{Re}(w\lambda) = rH_{T_l}(-\varphi).$$

Отсюда с учетом (3.1) и (4.22) получаем:

$$\mathrm{Re}(w\lambda) \geqslant rH_{K_{p(l)}}(-\varphi), \qquad \lambda \in re^{i\varphi} \in \Omega_{l,m}, \qquad m = \overline{1, m(l)}, \qquad m(l) \neq 0. \tag{4.25}$$

Пусть $\sigma \geqslant 1$. С учетом (2.1) и первого неравенства в (4.7) имеем:

$$\operatorname{Re}(z\lambda) = \operatorname{Re}(zre^{i\varphi}) \leqslant rH_{K_\sigma}(-\varphi) \leqslant rH_{K_{p(l)}}(-\varphi) - \nu_\sigma r, \qquad z \in K_\sigma, \qquad l \geqslant \sigma. \tag{4.26}$$

Таким образом, в силу (4.24)—(4.26), (4.19) и (2.1) имеем:

$$\begin{aligned}
|p_{l,m,\mu}(z)| &\leqslant \max_{\lambda\in\partial\Omega_{l,m}} \left(\exp(\frac{\nu_l}{4}r - \nu_\sigma r)\right) \exp\left(\frac{\nu_l}{3}|\lambda_{k(l,m)}|\right)\\
&\leqslant \max_{\lambda\in\partial\Omega_{l,m}} \left(\exp(\frac{\nu_\sigma}{4}r - \nu_\sigma r)\right) \exp\left(\frac{\nu_\sigma}{3}|\lambda_{k(l,m)}|\right)\\
&\leqslant \exp\left(\left(\frac{\nu_\sigma}{3} - \frac{\nu_\sigma}{2}\right)|\lambda_{k(l,m)}|\right) = \exp\left(-\frac{\nu_\sigma}{6}|\lambda_{k(l,m)}|\right),\\
z \in K_\sigma, \qquad & m = \overline{1, m(l)}, \qquad l \geqslant \sigma, \qquad m(l) \neq 0, \qquad \mu \geqslant 1,
\end{aligned} \tag{4.27}$$

$$\begin{aligned}
|p_{l,m,\mu}(z)| &\leqslant \max_{\lambda\in\partial\Omega_{l,m}} \left(\exp\left(\frac{\nu_l}{4}r - \left(H_{K_{p(l)}}(-\varphi) - H_{K_\sigma}(-\varphi)\right) r\right)\right)\\
&\quad\cdot \exp\left(\frac{\nu_l}{3}|\lambda_{k(l,m)}|\right) \leqslant C(\sigma),\\
z \in K_\sigma, \qquad & m = \overline{1, m(l)}, \qquad l = \overline{1, \sigma - 1}, \qquad m(l) \neq 0, \qquad \mu \geqslant 1.
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Представим многочлены P_μ в виде

$$P_\mu(z) = P_{\mu,1}(z) + P_{\mu,2}(z), \qquad \mu \geqslant 1,$$

$$P_{\mu,1}(z) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{n_k-1} a_{k,n,\mu,1} z^n e^{\lambda_k z}, \qquad a_{k,n,\mu,1} = 0, \qquad k > \mu,$$

$$a_{k,n,\mu,1} = a_{k,n,\mu}, \qquad n = \overline{0, n_k - 1}, \qquad \lambda_k \in \Omega, \qquad a_{k,n,\mu,1} = 0, \qquad n = \overline{0, n_k - 1}, \qquad \lambda_k \notin \Omega.$$

Так как области $\Omega_{l,m}$ попарно не пересекаются, верно равенство

$$P_{\mu,1}(z) = \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{m(l)\neq 0}\sum_{\lambda_k\in\Omega_{l,m}}\sum_{n=0}^{n_k-1} a_{k,n,\mu,1} z^n e^{\lambda_k z} = \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{m(l)\neq 0} p_{l,m,\mu}(z), \qquad \mu \geqslant 1.$$

В силу (4.27) и (4.28) имеем:

$$|P(\mu,1)(z)| \leqslant \sum_{l=1}^{\sigma-1}\sum_{m=1}^{m(l)\neq 0} C(\sigma) + \sum_{l=\sigma}^{\infty}\sum_{m=1}^{m(l)\neq 0} \exp\left(-\frac{\nu_\sigma}{6}|\lambda_{k(l,m)}|\right), \qquad z \in K_\sigma, \qquad \mu \geqslant 1.$$

Так как $\overline{n}(\Lambda) < +\infty$, последний ряд сходится. Таким образом, последовательность функций $\{|P_{\mu,1}|\}$ равномерно ограничена на любом компакте K_σ. Так как последовательность $\{K_\sigma\}$ исчерпывает область D, по теореме Монтеля найдется подпоследовательность $\{P_{\mu(j),1}\}_{j=1}^{\infty}$, которая сходится равномерно на каждом компакте области D. Пусть

$$g_{3,1}(z) = \lim_{j\to\infty} P_{\mu(j),1}(z), \quad z \in D. \tag{4.29}$$

Поскольку $\{P_\mu\}$ сходится равномерно на компактах из области D, равенство $P_{\mu(j),2} = P_{\mu(j)} - P_{\mu(j),1}$ также сходится равномерно на компактах из области D к некоторой функции $g_{2,1}$. Очевидно, что $g_{2,0} = g_{2,1} + g_{3,1}$ и $g_{2,1} \in W(\Lambda_{2,1}, D)$, $g_{3,1} \in W(\Lambda_{3,1}, D)$.

Пусть $l \geqslant 1$, $m(l) \neq 0$, $m = \overline{1, m(l)}$, $w \in T_l$. Используя вычеты, получаем:

$$\begin{aligned}
p_{l,m}(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega_{l,m}} \frac{\omega_{f_{l,w}}(\lambda, w, g_{2,0})}{f_{l,w}(\lambda)} e^{\lambda z} d\lambda\\
&= \sum_{\lambda_k\in\Omega_{l,m}}\sum_{n=0}^{n_{k,0}-1} a_{k,n,0} z^n e^{\lambda_k z} + \sum_{\xi_s\in\Omega_{l,m}}\sum_{n=0}^{q_s-1} b_{s,n} z^n e^{\xi_s z},
\end{aligned} \tag{4.30}$$

где $n_{k,0} \geqslant n_k$ — кратность нуля λ_k функции $f_{l,w}$ и ξ_s — нуль функции $f_{l,w}$ кратности q_s отличный от всех λ_k. По лемме 4.1 существуют пределы

$$a_{k,n} = \lim_{\mu\to\infty} a_{k,n,\mu} = \lim_{\mu\to\infty} a_{k,n,\mu,1}, \qquad n = \overline{0, n_k - 1}, \qquad \lambda_k \in \Omega, \tag{4.31}$$

Отсюда с учетом (4.29), (4.2), (4.23) и (4.30) следует, что

$$\begin{aligned} p_{l,m}(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial\Omega_{l,m}} \frac{\omega_{f_{l,w}}(\lambda, w, g_{2,0})}{f_{l,w}(\lambda)} e^{\lambda z} d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{j\to\infty} \int\limits_{\partial\Omega_{l,m}} \frac{\omega_{f_{l,w}}(\lambda, w, P_{\mu(j),1})}{f_{l,w}(\lambda)} e^{\lambda z} d\lambda \\ &= \lim_{j\to\infty} p_{l,m,\mu(j)}(z) = \sum_{\lambda_k \in \Omega_{l,m}} \sum_{n=0}^{n_k-1} a_{k,n} z^n e^{\lambda_k z}, \qquad z \in \mathbb{C}. \end{aligned} \tag{4.32}$$

Это означает, что

$$a_{k,n,0} = a_{k,n}, \qquad n = \overline{0, n_k - 1}, \qquad a_{k,n,0} = 0, \qquad n \geqslant n_k, \qquad \lambda_k \in \Omega, \qquad b_{s,n} = 0.$$

Используя (4.30), (4.24)—(4.26), (4.19) и (2.1), как и в (4.27), (4.28), получаем для $\sigma \geqslant 1$:

$$|p_{l,m}(z)| \leqslant \exp\left(-\frac{\nu_\sigma}{6}|\lambda_{k(l,m)}|\right), \qquad z \in K_\sigma, \qquad m = \overline{1, m(l)}, \qquad l \geqslant \sigma, \qquad m(l) \neq 0, \tag{4.33}$$

$$|p_{l,m}(z)| \leqslant C_0(\sigma), \qquad z \in K_\sigma, \qquad m = \overline{1, m(l)}, \qquad l = \overline{1, \sigma - 1}, \qquad m(l) \neq 0. \tag{4.34}$$

Отсюда с учетом (4.32) следует, что ряд

$$\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{m(l)\neq 0} \sum_{\lambda_k \in \Omega_{l,m}} \sum_{n=0}^{n_k-1} a_{k,n} z^n e^{\lambda_k z} = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{m(l)\neq 0} p_{l,m}(z) \tag{4.35}$$

сходится равномерно на каждом компакте из области D. Тогда согласно (4.29), (4.31) и лемме 4.2 он сходится к функции $g_{3,1}$.

Представим $g_{3,1}$ в виде суммы $g_{2,2}+g_3$. Для этого нам необходимо представить $\Lambda_{3,1}$ в виде объединения $\Lambda_{2,2}\cup\Lambda_3$, где $\Lambda_{2,2}$ удовлетворяет условию $\Xi(\Lambda_{2,2}) \subseteq \partial J(D)$, а g_3 представляется в виде

$$g_3(z) = \sum_{\lambda_k, n_k \in \Lambda_3} a_{k,n} z^n e^{\lambda_k z}, \quad z \in D, \tag{4.36}$$

причем ряд сходится равномерно на компактах в области D.

Для каждого $l \geqslant 2$ символом Ω_l обозначим объединение всех областей $\Omega_{s,m}$, каждая из которых содержит хотя бы одну точку $\lambda_k \in \Gamma(-\theta_{2,l-1}, -\theta_{1,l-1})$. В силу (4.8) и (4.1) верны вложения $\Omega_l \subset \Gamma(-\theta_{2,l}, -\theta_{1,l})$, $l \geqslant 2$. По построению каждая точка

$$\lambda_k \in \bigcup_{l=1}^{\infty} (\Gamma(-\theta_{2,l-1}, -\theta_{1,l-1}) \setminus B(0, R_l))$$

принадлежит множеству Ω_l. Рассмотрим функции

$$g_{3,l}(z) = \sum_{\Omega_{s,m}\subset\Omega_l} \sum_{\lambda_k \in \Omega_{s,m}} \sum_{n=0}^{n_k-1} a_{k,n} z^n e^{\lambda_k z} = \sum_{\Omega_{s,m}\subset\Omega_l} p_{s,m}(z), \quad l \geqslant 2. \tag{4.37}$$

Согласно (4.33) и (4.34) имеем:

$$\sum_{\substack{\Omega_{s,m},\\ 1\leqslant s\leqslant\sigma-1}} |p_{s,m}(z)| + \sum_{\substack{\Omega_{s,m},\\ s\geqslant\sigma}} |p_{s,m}(z)| \leqslant \sum_{\substack{\Omega_{s,m},\\ 1\leqslant s\leqslant\sigma-1}} C_0(\sigma) + \sum_{\substack{\Omega_{s,m},\\ s\geqslant\sigma}} \exp\left(-\frac{\nu_\sigma}{6}|\lambda_{k(l,m)}|\right), \quad z \in K_\sigma, \quad \sigma \geqslant 1.$$

Так как $\overline{n}(\Lambda) < +\infty$, последний ряд сходится. Таким образом, ряд (4.37) сходится равномерно на компактах из области D. Следовательно, $g_{3,l} \in W(\Lambda(-\theta_{2,l}, -\theta_{1,l}), D)$, $l \geqslant 2$.

По лемме 4.3 для любого $l \geqslant 2$ в пространстве $W(\Lambda(-\theta_{2,l}, -\theta_{1,l}), D)$ имеет место фундаментальный принцип и $m(\Lambda(-\theta_{2,l}, -\theta_{1,l})) = 0$. Поэтому

$$g_{3,l}(z) = \sum_{k=1,n=0}^{\infty,n_k-1} d_{k,n,l} z^n e^{\lambda_k z}, \qquad z \in D, \qquad l \geqslant 2,$$

Причем ряд сходится равномерно на компактах в области D. Отметим, что $d_{k,n,l} = 0$, если $\lambda_k \notin \Omega_l$, и по лемме 4.2

$$d_{k,n,l} = a_{k,n}, \qquad \lambda_k \in \Omega_l, \qquad l \geqslant 2. \tag{4.38}$$

Так как $\overline{n}(\Lambda) < +\infty$, выполняется $\sigma(\Lambda(-\theta_{2,l}, -\theta_{1,l})) \leqslant \sigma(\Lambda) = 0$. Тогда по теореме 2.1 верно включение $d_l = \{d_{k,n,l}\} \in Q(D, \Lambda)$, $l \geqslant 2$. Следовательно,

$$\sup_{k,n} |d_{k,n,l}| p^n \exp(r_k H_{K_p}(-\varphi_k)) < C_{p,l}, \qquad p \geqslant 1, \qquad l \geqslant 2.$$

Отсюда с учетом (2.1) получаем:

$$\begin{aligned} |d_{k,n,l}| l^n \exp(r_k H_{K_l}(-\varphi_k)) &\leqslant |d_{k,n,l}|(l+1)^n \exp(r_k(H_{K_{l+1}}(-\varphi_k) - \nu_l)) \\ &\leqslant C_{l+1,l} \exp(-r_k \nu_l), \qquad n = \overline{0, n-1}, \qquad k \geqslant 1, \qquad l \geqslant 2. \end{aligned}$$

Для каждого $l \geqslant 2$ выберем $R_{l,0} \geqslant R_l$ такое, что

$$|d_{k,n,l}| l^n \exp(r_k H_{K_l}(-\varphi_k)) \leqslant 1, \qquad n = \overline{0, n-1}, \qquad |\lambda_k| \geqslant \frac{1}{3} R_{l,0}. \tag{4.39}$$

Можно считать, что $R_{2,0} < \ldots < R_{l,0} < \ldots$. Для каждого $l \geqslant 2$ символом $\Omega_{l,0}$ обозначим объединение всех областей $\Omega_{s,m} \subset \Omega_l$, каждая из которых содержит хотя бы одну точку $\lambda_k \in \Gamma(-\theta_{2,l-1}, -\theta_{1,l-1}) \cap B(0, R_{l+1,0}) \setminus B(0, R_{l,0})$. Отметим, что согласно построению множества Ω_l каждая точка $\lambda_k \in \Gamma(-\theta_{2,l-1}, -\theta_{1,l-1}) \cap B(0, R_{l+1,0}) \setminus B(0, R_{l,0})$ принадлежит множеству $\Omega_{l,0}$.

Пусть $\Omega_{s,m} \subset \Omega_{l,0}$. Так как $\delta_l \in \left(0, \frac{1}{30}\right)$, в силу (4.19) имеем: $\Omega_{s,m} \cap B(0, R_{l,0}/3) = \emptyset$. Поэтому из (4.39) получаем:

$$|d_{k,n,l}| l^n \exp(r_k H_{K_l}(-\varphi_k)) \leqslant 1, \qquad n = \overline{0, n-1}, \qquad \lambda_k \in \Omega_{l,0}, \qquad l \geqslant 2. \tag{4.40}$$

Положим

$$\Omega_0 = \bigcup_{l=2}^{\infty} \Omega_{l,0}.$$

Пусть Λ_3 — последовательность всех пар λ_k, n_k таких, что $\lambda_k \in \Omega_0$ и $\Lambda_{2,2}$ — последовательность, дополняющая Λ_3 до $\Lambda_{3,1}$, т.е. $\Lambda_{3,1} = \Lambda_{2,2} \cup \Lambda_3$. Отметим, что $\Lambda_{2,2}$ состоит из всех пар λ_k, n_k таких, что $\lambda_k \in \Omega \setminus \Omega_0$. По построению $\Xi(\Lambda_{2,2}) \subseteq \partial J(D)$. Рассмотрим ряд

$$\sum_{\lambda_k \in \Omega_0} a_{k,n} z^n e^{\lambda_k z}. \tag{4.41}$$

В силу (4.38) и (4.40) имеем:

$$|a_{k,n,0}| l^n \exp(r_k H_{K_l}(-\varphi_k)) \leqslant 1, \qquad n = \overline{0, n-1}, \qquad \lambda_k \in \Omega_{l,0}, \qquad l \geqslant 2.$$

Отсюда с учетом (2.1) следует, что

$$\sup_{k,n} |a_{k,n}| p^n \exp(r_k H_{K_p})(-\varphi_k) \leqslant 1, \qquad \lambda_k \in \Omega_0, \qquad l > p, \qquad p \geqslant 1.$$

Таким образом, $\{a_{k,n}\} \in Q(D, \Lambda_3)$. Так как $\sigma(\Lambda_3) \leqslant \sigma(\Lambda) = 0$, в силу леммы 2.1 ряд (4.41) сходится равномерно на компактах в области D. Пусть g_3 — сумма ряда (4.41). Тогда функция $g_3 \in W(\Lambda_3, D)$ представляется рядом (1.1), сходящимся равномерно на компактах из области D.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{\Omega_{s,m}\subset\Omega_0} \sum_{\lambda_k\in\Omega_{s,m}} \sum_{n=0}^{n_k-1} a_{k,n} z^n e^{\lambda_k z} = \sum_{\Omega_{s,m}\subset\Omega_0} p_{s,m}(z).$$

Из (4.33) и (4.34) следует, что последний ряд сходится равномерно на компактах в области D. По лемме 4.2 его сумма совпадает с суммой ряда (4.41), т.е. равна g_3. Положим $g_{2,2} = g_{3,1} - g_3$. Тогда

$$g_{2,2}(z) = \sum_{\Omega_{s,m}\subset\Omega} p_{s,m}(z) - \sum_{\Omega_{s,m}\subset\Omega_0} p_{s,m}(z) = \sum_{\Omega_{s,m}\subset\Omega\setminus\Omega_0} p_{s,m}(z).$$

Следовательно, $g_{2,2} \in W(\Lambda_{2,2}, D)$. Положим $\Lambda_2 = \Lambda_{2,1} \cup \Lambda_{2,2}$ и $g_2 = g_{2,1} + g_{2,2}$. Тогда $\Xi(\Lambda_2) \subseteq \partial J(D)$ и $g_2 \in W(\Lambda_2, D)$. Теорема доказана. □

5. Критерий фундаментального принципа и интерполяционной задачи

Теорема 5.1. *Пусть D — выпуклая область, $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ и система $\mathcal{E}(\Lambda)$ не полна в пространстве $H(D)$. Следующие утверждения эквивалентны:*

1) *В пространстве $W(\Lambda, D)$ имеет место фундаментальный принцип.*
2) *$m(\Lambda, \mu) = 0$, $\mu \in \Xi(\Lambda) \setminus \overline{J(D)}$ и любая функция $g \in W(\Lambda, D)$ представляется рядом (1.1), сходящимся в каждой точке области D.*
3) *Любая функция $g \in W(\Lambda, D)$ представляется рядом (1.1). При этом $d = \{d_{k,n}\} \in Q(D, \Lambda)$ и для каждого $p \geqslant 1$ найдутся $C_p > 0$ и номер $m(p)$ такой, что верно (2.2).*
4) *Оператор $\mathbb{E} : Q(D, \Lambda) \to W(\Lambda, D)$ — изоморфизм.*
5) *Оператор Σ_0: $P_D/I(\Lambda, D) \to \mathcal{R}(D, \Lambda)$ — изоморфизм.*
6) *Интерполяционная задача (3.2) разрешима в пространстве P_D для любой правой части $b = \{b_{k,n}\} \in \mathcal{R}(D, \Lambda)$.*
7) *$S_\Lambda > -\infty$, $S_\Lambda(\mu) = 0$, $\mu \in \Xi(\Lambda) \setminus J(D)$ и для любых $\varphi_1, \varphi_2 \notin \Phi(D)$ таких, что $0 < \varphi_2 - \varphi_1 < \pi$ и $\{e^{i\varphi} : \varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]\} \subset S(0, 1) \setminus \overline{J(D)}$ верно неравенство*

$$\overline{n}_0(\Lambda(-\varphi_2, -\varphi_1)) \leqslant \frac{\Upsilon_D(\varphi_1, \varphi_2)}{2\pi}. \tag{5.1}$$

Доказательство. Пусть верно утверждение 1). Тогда любая функция $g \in W(\Lambda, D)$ представляется рядом (1.1), сходящимся в каждой точке области D. Предположим, что $m(\Lambda, \mu) > 0$ для некоторого $\mu \in \Xi(\Lambda) \setminus \overline{J(D)}$. Тогда существует подпоследовательность $\{\lambda_{k(j)}\}$ такая, что

$$\lambda_{j,0} = \lambda_{k(j)}\mu, \quad \operatorname{Re}\lambda_{j,0} > 0, \quad j \geqslant 1, \quad \lim_{j\to\infty} \frac{n_{k(j)}}{|\lambda_{k(j)}|} > 0. \tag{5.2}$$

Положим $\Lambda_1 = \{\lambda_{k(j)}, n_{k(j)}\}$, $\Lambda_0 = \{\lambda_{j,0}, n_{k(j)}\}$ и $D_0 = \{z\overline{\mu} : z \in D\}$. Тогда $\mu \in \Xi(\Lambda_1) \setminus \overline{J(D)}$ и Λ_0 — почти вещественная последовательность. По условию система $\mathcal{E}(\Lambda_1) \subset \mathcal{E}(\Lambda)$ не полна в пространстве $H(D)$. Поэтому система $\mathcal{E}(\Lambda_0)$ не полна в пространстве $H(D_0)$. Согласно утверждению 1) в пространстве $W(\Lambda_1, D) \subset W(\Lambda, D)$ имеет место фундаментальный принцип. Тогда, как нетрудно заметить, в пространстве $W(\Lambda_0, D_0)$ также имеет место фундаментальный принцип. Так как $\mu \in \Xi(\Lambda_1) \setminus \overline{J(D)}$, имеем $\mu\overline{\mu} = 1 \in \Xi(\Lambda_0) \setminus \overline{J(D_0)}$. Таким образом, все условия теоремы 2.5 выполнены. Следовательно, согласно этой теореме $m(\Lambda_0) = 0$. Это противоречит (5.2).

Мы показали, что $m(\Lambda, \mu) = 0$, $\mu \in \Xi(\Lambda) \setminus \overline{J(D)}$. Поэтому утверждение 2) верно.

Пусть теперь верно утверждение 2). Так как система $\mathcal{E}(\Lambda)$ не полна в пространстве $H(D)$, выполняется $\overline{n}(\Lambda) < \infty$. Отсюда следует, что $m(\Lambda) \leqslant \overline{n}(\Lambda) < \infty$ и $\sigma(\Lambda) = 0$. Тогда с учетом теоремы 2.1 любая функция $g \in W(\Lambda, D)$ представляется рядом (1.1), причем $d = \{d_{k,n}\} \in Q(D, \Lambda)$. Следовательно, согласно лемме 2.1 для каждого $p \geqslant 1$ найдутся $C_p > 0$ и номер $m(p)$ такие, что выполнено (2.2). Это означает, что утверждение 3) верно.

Пусть верно утверждение 3). Тогда любая функция $g \in W(\Lambda, D)$ представляется рядом (1.1) и выполнено неравенство (2.2). Из него следует, что ряд (1.1) сходится равномерно на компактах в области D. Другими словами верно утверждение 1).

Утверждения 1), 4), 5) и 6) эквивалентны согласно теореме 2.2. Остается доказать эквивалентность утверждений 1) и 7).

Пусть верно утверждение 1). Тогда согласно теореме 2.6 выполнено неравенство (5.1).

Предположим, что $S_\Lambda = -\infty$. Тогда по теореме 2.7 существуют числа $\{d_{k,n}\}$ и номера k_s, $1 = k_1 < k_2 < \ldots$, такие, что

а) ряд (2.5) сходится равномерно на компактах в плоскости,
б) ряд (1.1) расходится в каждой точке плоскости.

Из пункта а) следует, что сумма g ряда (2.5) принадлежит $W(\Lambda, D)$. Из пункта б) с учетом леммы 4.2 следует, что g не представляется рядом (1.1). Это противоречит утверждению 1). Таким образом, $S_\Lambda > -\infty$.

Предположим, что $S_\Lambda(\mu) \neq 0$ для некоторого $\mu \in \Xi(\Lambda) \setminus J(D)$. Тогда существует подпоследовательность $\{\lambda_{k(j)}\}$ такая, что

$$\lambda_{j,0} = \lambda_{k(j)}\mu, \qquad \operatorname{Re}\lambda_{j,0} > 0, \qquad j \geqslant 1, \qquad \lim_{\delta\to 0}\lim_{j\to\infty} \frac{\ln |q_\Lambda^{k(j)}(\lambda_{k(j)}, \delta)|}{|\lambda_{k(j)}|} \neq 0. \tag{5.3}$$

Как и выше, в пространстве $W(\Lambda_0, D_0)$ имеет место фундаментальный принцип. Тогда по лемме 2.2 верно равенство $S_{\Lambda_0} = 0$. Это противоречит (5.3). Таким образом, $S_\Lambda(\mu) = 0$, $\mu \in \Xi(\Lambda) \setminus J(D)$, и утверждение 7) верно.

Пусть, наконец, верно утверждение 7). Рассмотрим по отдельности разные классы выпуклых областей. Пусть D — ограниченная область. Тогда по теореме 2.3 в пространстве $W(\Lambda, D)$ имеет место фундаментальный принцип.

Пусть D — неограниченная выпуклая область I–III типа. Тогда для любого инвариантного подпространства $W(\Lambda, D)$ верно вложение $\Xi(\Lambda) \subseteq \overline{J(D)} = S(0,1)$. Следовательно, по теореме 2.3 в пространстве $W(\Lambda, D)$ имеет место фундаментальный принцип.

Пусть теперь $0 < \psi_2 - \psi_1 \leqslant \pi$ и $D \in \mathcal{D}(\psi_1, \psi_2)$. Тогда по теореме 4.2 для любой функции $g \in W(\Lambda, D)$ верно представление $g = g_1 + g_2 + g_3$, где $g_1 \in W(\Lambda_1, \mathbb{C})$, $g_2 \in W(\Lambda_2, D)$ и $g_3 \in W(\Lambda_3, D)$. При этом $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \Lambda_3$, $\Xi(\Lambda_2) \subseteq \partial J(D)$ и

$$g_3(z) = \sum_{k=1,n=0}^{\infty, n_k-1} d_{k,n,3} z^n e^{\lambda_k z}, \qquad z \in D, d_{k,n,3} = 0, \qquad \lambda_k, n_k \notin \Lambda_3,$$

и ряд сходится равномерно на компактах из области D. В частности, $\Lambda_1 = \emptyset$ и $g_1 = 0$, когда $\Xi(\Lambda) \cap \operatorname{int} J(D) = \emptyset$, $\Lambda_2 = \emptyset$ и $g_2 = 0$, когда $\Xi(\Lambda) \subseteq \operatorname{int} J(D)$, $\Lambda_3 = \emptyset$ и $g_3 = 0$, когда $\Xi(\Lambda) \subseteq \overline{J(D)}$.

Отметим, что в силу (5.1) верно равенство $m(\Lambda, \mu) = 0$, $\mu \in \Xi(\Lambda) \setminus \overline{J(D)}$. Кроме того, как и выше, $m(\Lambda) \leqslant \overline{n}(\Lambda) < \infty$ и $\sigma(\Lambda) = 0$. Тогда по теореме 2.1 имеем: $d_3 = \{d_{k,n,3}\} \in Q(D, \Lambda)$.

Если $g_1 \neq 0$, то по теореме 2.4

$$g_1(z) = \sum_{k=1,n=0}^{\infty, n_k-1} d_{k,n,1} z^n e^{\lambda_k z}, \qquad z \in \mathbb{C}, \qquad d_{k,n,1} = 0, \qquad \lambda_k, n_k \notin \Lambda_1,$$

и ряд сходится равномерно на любом компакте плоскости. По теореме 2.1 верно включение $d_1 = \{d_{k,n,1}\} \in Q(\mathbb{C}, \Lambda) \subset Q(D, \Lambda)$. Если $g_2 \neq 0$, то по теореме 2.4

$$g_2(z) = \sum_{k=1,n=0}^{\infty,n_k-1} d_{k,n,2} z^n e^{\lambda_k z}, \qquad z \in D_0 \supset D, \qquad d_{k,n,2} = 0, \qquad \lambda_k, n_k \notin \Lambda_2,$$

и ряд сходится равномерно на компактах из области D_0. По теореме 2.1 имеем: $d_1 = \{d_{k,n,2}\} \in Q(D_0, \Lambda) \subset Q(D, \Lambda)$.

Положим

$$d_{k,n} = d_{k,n,1} + d_{k,n,2} + d_{k,n,3}.$$

Тогда $d = \{d_{k,n}\} \in Q(D, \Lambda)$. Следовательно, с учетом леммы 2.1

$$g(z) = g_1(z) + g_2(z) + g_3(z) = \sum_{k=1,n=0}^{\infty,n_k-1} d_{k,n,3} z^n e^{\lambda_k z}, \qquad z \in D,$$

и ряд сходится равномерно на компактах из области D. Таким образом, верно утверждение 1). Теорема доказана. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А.А. Гольдберг, Б.Я. Левин, И.В. Островский. *Целые и мероморфные функции* // Итоги науки техн., Сер. Соврем. пробл. мат., Фундам. направления **85**, 5–186 (1991).
2. А.Ф. Красичков–Терновский. *Сравнение целых функций конечного порядка по распределению корней* // Мат. сб., Н. Сер. **70(112)**:2, 198–230 (1966).
3. А.Ф. Красичков–Терновский. *Инвариантные подпространства аналитических функций. I. Спектральный синтез на выпуклых областях* // Мат. сб., н. Сер. **87(129)**:4, 459–489 (1972).
4. А.Ф. Красичков–Терновский. *Инвариантные подпространства аналитических функций. II. Спектральный синтез на выпуклых областях* // Мат. сб., н. Сер. **88(130)**:1(5), 3–30 (1972).
5. А.С. Кривошеев. *Фундаментальный принцип для инвариантных подпространств в выпуклых областях* // Изв. росс. акад. наук Сер. мат. **68**:2, 71–136 (2004).
6. А.С. Кривошеев, О.А. Кривошеева. *Критерий справедливости фундаментального принципа для инвариантных подпространств в ограниченных выпуклых областях комплексной плоскости* // Функц. анал. Прилож. **46**:4, 14–30 (2012).
7. А.С. Кривошеев, О.А. Кривошеева. *Базис в инвариантном подпространстве аналитических функций* // Мат. сб. **204**:12, 49–104 (2013).
8. А.С. Кривошеев, О.А. Кривошеева. *Замкнутость множества сумм рядов Дирихле* // Уфим. мат. ж. **5**:3, 96–120 (2013).
9. А.С. Кривошеев, О.А. Кривошеева. *Базис в инвариантном подпространстве целых функций* // Алгебра анал. **27**:2, 132–195 (2015).
10. А.С. Кривошеев, О.А. Кривошеева. *Фундаментальный принцип и базис в инвариантном подпространстве* // Мат. заметки **99**:5, 684–697 (2016).
11. О.А. Кривошеева, А.С. Кривошеев. *Представление функций из инвариантного подпространства с почти вещественным спектром* // Алгебра анал. **29**:4, 82–139 (2017).
12. А.С. Кривошеев, О.А. Кривошеева. *Инвариантные подпространства в полуплоскости* // Уфим. мат. ж. **12**:3, 30–44 (2020).
13. А.С. Кривошеев, О.А. Кривошеева. *Инвариантные подпространства целых функций* // Мат. заметки **109**:3, 380–396 (2021).
14. А.С. Кривошеев, О.А. Кривошеева. *Сходимость рядов экспоненциальных мономов* // Уфим. мат. ж. **14**:4, 60–72 (2022).
15. А.С. Кривошеев, О.А. Кривошеева. *Необходимое условие выполнения фундаментального принципа для инвариантных подпространств в неограниченной выпуклой области* // Уфим. мат. ж. **15**:3, 71–81 (2023).

16. А.С. Кривошеев, О.А. Кривошеева. *Интерполяция и фундаментальный принцип* // Уфим. мат. ж. **16**:3, 58–68 (2024).
17. Б.Я. Левин. *Распределение корней целых функций.* М.: Гостехиздат. 1956.
18. А.Ф. Леонтьев. *Ряды экспонент.* М.: Наука. 1976.
19. А.Ф. Леонтьев. *Последовательности полиномов из экспонент.* М.: Наука. 1980.
20. А.Ф. Леонтьев. *Целые функции. Ряды экспонент.* М.: Наука. 1983.
21. В.В. Напалков. *Уравнения свертки в многомерных пространствах.* М.: Наука. 1982.
22. Р.С. Юлмухаметов. *Аппроксимация субгармонических функций* // Anal. Math. **11**, 257–282 (1985).
23. A.S. Krivosheev, O.A. Krivosheeva. *Invariant subspaces in unbounded domains* // Probl. Anal. Issues Anal. **10(28)**:3, 91–107 (2021).

Александр Сергеевич Кривошеев,
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: `kriolesya2006@yandex.ru`

Олеся Александровна Кривошеева,
ФГБОУ ВО «Уфимский университет науки и технологий»,
ул. Заки Валиди, 32,
450076, г. Уфа, Россия
E-mail: `kriolesya2006@yandex.ru`