ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 18 № 1 (2026). С. 3-38.

УДК 517.956

О ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРАХ НЕДИВЕРГЕНТНОГО ВИДА В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

С.А. ИСХОКОВ

Аннотация. В работе доказываются некоторые неравенства, в которых снизу оценивается норма значения эллиптического оператора недивергентного вида в ограниченной области со степенным вырождением вдоль всей границы. Подобные операторы ранее изучались в случае, когда они изначально задавались в дивергентной форме или приводились к такой форме. В отличие от этого, коэффициенты исследуемых нами операторов, в общем случае, недифференцируемы и их нельзя привести к дивергентному виду. Только в заключительной части работы с целью изучения разрешимости соответствующих дифференциальных уравнений допускается дифференцируемость коэффициентов оператора и изучается соответствующий сопряжённый оператор.

Сначала в работе изучаются вырождающиеся эллиптические операторы общего вида и для них доказывается неравенство, в котором сумма нормы значения оператора и норма самой функции с некоторым степенным весом в пространстве L_2 снизу оценивается через норму самой функции в весовом пространстве типа Соболева. Затем рассматривается случай, когда исследуемые эллиптические операторы являются слабо позитивными. Для таких операторов доказано неравенство, в котором снизу оценивается реальная часть скалярного произведения значения оператора и самой функции. В последнем разделе работы допускается, что слабо позитивные эллиптические операторы имеют сильное вырождение вдоль всей границы области. Для таких операторов, содержащих параметр λ, сначала доказывается неравенство, в котором норма значения оператора снизу оценивается через норму самой функции в основном функциональном пространстве, затем такое неравенство доказывается для сопряжённого оператора и как следствие выводится результат об однозначной разрешимости соответствующего дифференциального уравнения.

Разработанная в работе техника основана на распространении некоторых известных результатов для эллиптических операторов с постоянными коэффициентами на случай операторов с вырождением с помощью вспомогательных интегральных неравенств.

Ключевые слова: эллиптический оператор, степенное вырождение, недивергентный вид, ограниченная область.

Mathematics Subject Classification: 35J70, 46E35, 47F10

Iskhokov S.A., On degenerate elliptic operators of non–divergent form in bounded domain.

Поступила 15 ноября 2024 г.

1. Введение

В работе изучаются эллиптические операторы недивергентного вида со степенным вырождением вдоль всей границы ограниченной области. Сначала доказываются некоторые неравенства, которые содержат оценку снизу нормы исследуемого оператора. При выводе этих неравенств никакие предположения о дифференцируемости коэффициентов оператора не делаются. Только в заключительной части работы в случае сильно вырождающихся слабо позитивных операторов с целью изучения разрешимости соответствующих дифференциальных уравнений допускается дифференцируемость коэффициентов оператора и изучается соответствующий сопряжённый оператор.

Отметим, что в настоящее время хорошо разработана методика изучения подобных операторов в случае, когда оператор имеет дивергентный вид, или сводится к такому виду.

В этом случае хорошо работает аппарат полуторалинейных форм в гильбертовом пространстве и различные обобщения теоремы Лакса — Мильграмма (см., например, теорему 2.0.1 из [11]), применяются результаты теории весовых пространств дифференцируемых функций многих вещественных переменных (теоремы вложения, прямые и обратные теоремы о следах и т.д.). Эти исследования начинались в работе Л.Д. Кудрявцева [8] и затем продолжились многими советскими и зарубежными математиками (см. [2], [5], [6], [10], [11] и имеющиеся в них ссылки). Отметим, что все эти работы относятся к случаю эллиптических операторов дивергентного вида.

Наша цель в этой работе заключается в изучении вырождающихся эллиптических операторов недивергентного вида, коэффициенты которых недифференцируемы и в связи с этим их нельзя привести к дивергентному виду. Разработанная в работе специальная техника позволяет обобщить некоторые известные результаты для регулярных (т.е. без вырождения) эллиптических операторов недивергентного вида на случай эллиптических операторов такого вида с вырождением.

Отметим, что регулярные эллиптические дифференциальные операторы недивергентного вида хорошо изучены в работах [3], [9, глава 2], [14, глава 5], [16].

2. Формулировка результатов

Пусть Ω — ограниченная область в n–мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ с замкнутой $(n-1)$–мерной границей $\partial\Omega$. Обозначим через $\rho(x)$ регуляризованное расстояние от точки $x \in \Omega$ до $\partial\Omega$, т.е. функцию класса $C^\infty(\Omega)$ со следующими свойствами

$$\frac{1}{\varkappa}\operatorname{dist}\{x,\partial\Omega\} \leqslant \rho(x) \leqslant \varkappa \operatorname{dist}\{x,\partial\Omega\}, \qquad x \in \Omega, \tag{2.1}$$

$$\left|\rho^{(k)}(x)\right| \leqslant \varkappa \rho^{1-|k|}(x), \qquad x \in \Omega, \qquad |k| \leqslant 2r. \tag{2.2}$$

Пусть r — натуральное и α, β — вещественные числа. Вводим следующие функциональные пространства $L_{2;\beta}(\Omega)$, $W^{2r}_{2;\alpha}(\Omega)$ соответственно со следующими конечными нормами

$$\|u; L_{2;\beta}(\Omega)\| = \left\{ \int\limits_\Omega \rho^{2\beta}(x)|u(x)|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$\left\|u; W^{2r}_{2;\alpha}(\Omega)\right\| = \left\{ \left\|u; L^{2r}_{2;\alpha}(\Omega)\right\|^2 + \int\limits_{\Omega} |u(x)|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}, \tag{2.3}$$

где

$$\left\|u; L^{2r}_{2;\alpha}(\Omega)\right\| = \left\{ \sum_{|k|=2r} \int\limits_{\Omega} \rho^{2\alpha}(x) |u^{(k)}(x)|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Отметим, что $L_{2;0}(\Omega) = L_2(\Omega)$. Замыкание класса $C_0^\infty(\Omega)$ по норме (2.3) обозначим через $\mathring{W}^{2r}_{2;\alpha}(\Omega)$.

Сформулируем основные результаты нашей работы:

Теорема 2.1. *Пусть все коэффициенты $b_k(x)$ оператора*

$$L[u](x) = \sum_{|k|\leqslant 2r} \rho^{\alpha|k|}(x) b_k(x) u^{(k)}(x), \quad u \in C_0^\infty(\Omega), \tag{2.4}$$

ограничены и удовлетворяют следующим условиям:

I) *(условия эллиптичности)*

$$M_0^{-1} |\xi|^{2r} \leqslant \left| \sum_{|k|=2r} b_k(x) \xi^k \right| \quad (x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^n)\,; \tag{2.5}$$

II) *для любого достаточно малого положительного числа ν существует натуральное число $m(\nu) > 0$ такое, что*

$$|b_k(y) - b_k(z)| < \nu, \quad |k| = 2r, \tag{2.6}$$

для любого $y \in \Omega$ и любого

$$z \in J_{1,m}(y) = \left\{ z \in \mathbb{R}^n : |z-y| < \frac{1}{m^2 \varkappa} \rho(y) \right\}, \qquad m \in \mathbb{N}, \qquad m \geqslant m(\nu), \tag{2.7}$$

где $\varkappa$ — постоянная из условия (2.1);

III) *числа $\alpha = \alpha_{2r}$, α_j, $0 \leqslant \alpha_j \leqslant 2r-1$ такие, что*

$$\alpha_j \geqslant \alpha - 2r + j \quad \text{для всех} \quad j : 0 \leqslant j \leqslant 2r-1. \tag{2.8}$$

Тогда существуют положительные числа c, K такие, что

$$c \left\|v; L^{2r}_{2,\alpha}(\Omega)\right\|^2 \leqslant \int\limits_{\Omega} |L[v(z)]|^2 dz + K \left\|v; L_{2,\alpha-2r}(\Omega)\right\|^2 \tag{2.9}$$

для всех $v \in C_0^\infty(\Omega)$.

Назовём вырождающийся дифференциальный оператор (2.4) *слабо позитивным*, если выполняется условие

$$\operatorname{Re} \sum_{|k|=2r} b_k(x) \xi^k \geqslant 0, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n, \qquad x \in \Omega. \tag{2.10}$$

Теорема 2.2. *Пусть оператор*

$$L_0[u(x) = \sum_{|k|=2r} \rho^{\alpha}(x) b_k(x) u^{(k)}(x), \quad u \in C_0^{\infty}(\Omega), \tag{2.11}$$

является слабо позитивным и его коэффициенты $b_k(x)$ удовлетворяют условиям теоремы 2.1.

Тогда для всех $v \in C_0^{\infty}(\Omega)$ выполняется неравенство

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \int\limits_{\Omega} L_0\left[v(z)\right] \cdot \overline{v(z)} dz \geqslant &- \varepsilon \left\|v; L^{2r}_{2,\alpha}(\Omega)\right\| \|v; L_2(\Omega)\| \\ &- \delta \left\|v; L_{2,\alpha-2r}(\Omega)\right\| \|v; L_2(\Omega)\| - K_1(\varepsilon,\delta) \left\|v; L_{2,\alpha-2r}(\Omega)\right\|^2, \end{aligned} \tag{2.12}$$

где ε, δ — достаточно малые положительные числа, и $K_1(\varepsilon,\delta)$ — некоторое положительное число, зависящее от ε, δ.

Теорема 2.3. *Пусть $\alpha - 2r \geqslant 0$ (случай сильного вырождения) и пусть все коэффициенты $b_k(x)$ оператора (2.4) удовлетворяют условиям теорем 2.1 и 2.2.*

Тогда существуют числа $\varkappa_0 > 0$, $\lambda_0 \geqslant 0$ такие, что при $\lambda \geqslant \lambda_0$ выполняется неравенство

$$\|L[v] + \lambda v; L_2(\Omega)\| \geqslant \varkappa_0 \left\|v; W^{2r}_{2,\alpha}(\Omega)\right\| \tag{2.13}$$

для всех $v \in C_0^{\infty}(\Omega)$.

Для оператора (2.4) вводим формально сопряжённый оператор $L'[v]$ равенством

$$L'[v](x) = \sum_{|k|\leqslant 2r} \left(\rho^{\alpha_{|k|}}(x)\overline{b_k(x)}v(x)\right)^{(k)}, \qquad v \in C_0^{\infty}(\Omega).$$

Теорема 2.4. *Пусть все коэффициенты $b_k(x)$ оператора (2.4) удовлетворяют условиям теоремы 2.3 и пусть*

IV) *коэффициенты $b_k(x)$, $|k| \leqslant 2r$, имеют все производные до $|k|$-го порядка, которые удовлетворяют условию*

$$\left|b_k^{(l)}(x)\right| \leqslant C_l \rho^{-|l|}(x), \quad x \in \Omega, \quad |l| \leqslant |k|, \tag{2.14}$$

где C_l — некоторое положительное число.

Тогда существуют числа $\varkappa_0 > 0$, $\lambda_0 \geqslant 0$ такие, что при $\lambda \geqslant \lambda_0$ выполняется неравенство

$$\|L'[v] + \lambda v; L_2(\Omega)\| \geqslant \varkappa_0 \left\|v; W^{2r}_{2,\alpha}(\Omega)\right\| \tag{2.15}$$

для всех $v \in C_0^{\infty}(\Omega)$.

В условиях теоремы 2.4 имеют места также следующие неравенства

$$\|L[u]; L_2(\Omega)\| \leqslant M_9 \left\|u; W^{2r}_{2;\alpha}(\Omega)\right\|, \qquad \|L^*[u]; L_2(\Omega)\| \leqslant M_{10} \left\|u; W^{2r}_{2;\alpha}(\Omega)\right\|$$

для всех $v \in C_0^{\infty}(\Omega)$. Поэтому по непрерывности можно определить операторы $\mathbb{L}$, $\mathbb{L}^*$ с областями определения $D(\mathbb{L}) = \mathring{W}^{2r}_{2;\alpha}(\Omega)$, $D(\mathbb{L}^*) = \mathring{W}^{2r}_{2;\alpha}(\Omega)$, соответственно, и такие, что

$$\mathbb{L}[u] = L[u], \quad \mathbb{L}^*[u] = L'[u] \quad \text{для всех} \quad u \in C_0^{\infty}(\Omega).$$

Следствие 2.1. *Пусть выполнены все условия теоремы 2.4. Тогда для любого заданного $f \in L_2(\Omega)$ уравнение*

$$\mathbb{L}[u] + \lambda u = f$$

имеет единственное решение из пространства $\mathring{W}^{2r}_{2;\alpha}(\Omega)$ и при этом справедливо неравенство

$$\left\| u; W^{2r}_{2,\alpha}(\Omega) \right\| \leqslant \frac{1}{\varkappa_0} \| f; L_2(\Omega) \| ,$$

где $\varkappa_0$ такое же число как в теореме 2.4.

3. Вспомогательные леммы

В этом разделе докажем некоторые вспомогательные леммы, которые используются при доказательстве основных теорем в других разделах.

Обозначим через $B_m(0)$ открытый шар пространства $\mathbb{R}^n$ с центром в начале координат и радиусом $\frac{1}{m}$, где $m = 1, 2, \ldots$.

Лемма 3.1. *Для любого натурального числа m существует функция φ_m со следующими свойствами:*

1. $\varphi_m(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$;
2. $\varphi_m(x) = 1$, *если* $x \in B_{m+1}(0)$;
3. $\varphi_m(x) = 0$, *если* $|x| \geqslant \frac{1}{m}$;
4. $0 \leqslant \varphi_m(x) \leqslant 1$ *для всех* $x \in \mathbb{R}^n$;
5. $\left| \varphi_m^{(k)}(x) \right| \leqslant C_3 [2m(m+1)]^{|k|}$, *где C_3 — некоторое положительное число, которое не зависит от k.*

Доказательство. Для построения функции с нужными нам свойствами мы используем технику усреднения функций (см., например, [12, с. 311–327]). Пусть $\omega(x)$ — некоторое усредняющее ядро, то есть некоторая неотрицательная функция $\omega(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ такая, что

$$\operatorname{supp} \omega(x) \subset \overline{B_1} = \{ x \in \mathbb{R}^n : |x| \leqslant 1 \} , \qquad \int\limits_{\mathbb{R}^n} \omega(x) dx = 1.$$

Пусть $u \in L_p(\Omega)$, $1 \leqslant p < \infty$. Продолжим её нулём вне Ω. Средней функцией для $u(x)$ называется функция $u_h(x)$, определенная равенством

$$u_h(x) = \frac{1}{h^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \omega\left(\frac{x-y}{h} \right) u(y) dy = \frac{1}{h^n} \int\limits_{I_h(x)} \omega\left(\frac{x-y}{h} \right) u(y) dy,$$

где $I_h(x)$ — открытый шар радиуса h в $\mathbb{R}^n$ с центром в точке x.

Пусть γ — некоторое положительное число. Обозначим через $I_\gamma(0)$ — открытый шар радиуса γ в $\mathbb{R}^n$ с центром в начале координат и через $\theta_\gamma(x)$ обозначим, характеристическую функцию шара $I_\gamma(0)$. Пусть h — достаточно малое положительное число. Построим усреднения для функции $\theta_\gamma(x)$ с радиусом усреднения h:

$$v_{h,\gamma}(x) = \frac{1}{h^n} \int\limits_{I_h(x)} \omega\left(\frac{x-y}{h} \right) \theta_\gamma(y) dy.$$

Определим функцию $\varphi_m(x)$ равенством $\varphi_m(x) = v_{h,\gamma}(x)$, где

$$\gamma = \frac{2m+1}{2m(m+1)}, \quad h = \frac{1}{2m(m+1)},$$

то есть

$$\varphi_m(x) = 2^n m^n (m+1)^n \int\limits_{2m(m+1)|x-y|<1} \omega\left(2m(m+1)(x-y)\right)\chi_m(y)dy,$$

где $\chi_m(y)$ — характеристическая функция шара радиуса $\dfrac{2m+1}{2m(m+1)}$ с центром в начале координат. Далее, легко можно проверить, что эта функция обладает всеми свойствами, приведёнными в лемме 3.1. □

Лемма 3.2. *Пусть m — натуральное число и $\chi_{2,m}(x,y)$ — характеристическая функция шара*

$$J_{2,m}(y) = \left\{x \in \mathbb{R}^n : |x-y| < \frac{1}{m(m+1)\varkappa}\rho(y)\right\}. \tag{3.1}$$

Тогда

$$\frac{1}{(m^2+1)^n} \leqslant \rho^{-n}(x)\varkappa^n\omega_n^{-1}\left(1+\frac{1}{m}\right)^n \int\limits_{\Omega} \chi_{2,m}(x,y)dy \leqslant \frac{1}{(m^2-1)^n}, \tag{3.2}$$

где ω_n — площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Пусть $x, y \in \Omega$. Используя равенство

$$\rho(x) - \rho(y) = \int\limits_0^1 \frac{d}{dt}\rho(y+t(x-y))dt, \tag{3.3}$$

в силу неравенства (см. (2.2)) $|\nabla\rho(x)| \leqslant \varkappa$, имеем

$$|\rho(x) - \rho(y)| \leqslant \varkappa|x-y|.$$

Если (см. (2.7)) $x \in J_{1,m}(y)$, то

$$|\rho(x) - \rho(y)| \leqslant \frac{1}{m^2}\rho(y).$$

Поэтому

$$\left(1-\frac{1}{m^2}\right)\rho(y) < \rho(x) < \left(1+\frac{1}{m^2}\right)\rho(y) \quad \text{при} \quad y \in \Omega, x \in J_{1,m}(y). \tag{3.4}$$

Пусть

$$G_{2,m}(x) = \left\{y \in \mathbb{R}^n : |x-y| < \frac{\rho(y)}{m(m+1)\varkappa}\right\}.$$

Тогда

$$\int\limits_{\Omega} \chi_{2,m}(x,y)dy = \int\limits_{G_{2,m}(x)} 1 \cdot dy = |G_{2,m}(x)|. \tag{3.5}$$

Так как $J_{2,m}(y) \subset J_{1,m}(y)$, используя (3.4) для всех $y \in G_{2,m}(x)$, имеем

$$|x-y| < \frac{\rho(y)}{m(m+1)\varkappa} < \frac{m\rho(x)}{\varkappa(m+1)(m^2-1)}.$$

Следовательно, множество $G_{2,m}(x)$ содержится в шаре радиуса $R = \dfrac{m\rho(x)}{\varkappa(m+1)(m^2-1)}$. Поэтому

$$|G_{2,m}(x)| \leqslant \omega_n \left(\frac{m\rho(x)}{\varkappa(m+1)(m^2-1)}\right)^n,$$

т.е.

$$\rho^{-n}(x)\varkappa^n\omega_n^{-1}\left(1+\frac{1}{m}\right)^n |G_{2,m}(x)| \leqslant \left(\frac{1}{m^2-1}\right)^n.$$

Отсюда и из (3.5) следует правое неравенство в (3.2).

Рассмотрим множество

$$Q_{2,m}(x) = \left\{y \in \mathbb{R}^n : |x-y| < \frac{\varepsilon_m\rho(x)}{\varkappa}\right\},$$

где $\varepsilon_m = \dfrac{m}{(m+1)(m^2+1)}$. Из равенства (3.3) с учётом неравенства (см. (2.2)) $|\nabla\rho(x)| \leqslant \varkappa$ для всех $y \in Q_{2,m}(x)$ имеем

$$|\rho(x) - \rho(y)| \leqslant \varkappa|x-y| < \varepsilon_m\rho(x).$$

Следовательно,

$$(1-\varepsilon_m)\rho(x) \leqslant \rho(y) \leqslant (1+\varepsilon_m)\rho(x), \qquad y \in Q_{2,m}(x).$$

Далее, используя это неравенство для $y \in Q_{2,m}(x)$, имеем

$$|x-y| < \varepsilon_m\rho(x)\varkappa^{-1} \leqslant \varepsilon_m\varkappa^{-1}(1-\varepsilon_m)^{-1}\rho(y).$$

Так как $\varepsilon_m(1-\varepsilon_m)^{-1} < [m(m+1)]^{-1}$, отсюда следует, что

$$|x-y| \leqslant \frac{\rho(y)}{m(m+1)\varkappa},$$

то есть $y \in G_{2,m}(x)$. Поэтому $|Q_{2,m}(x)| \leqslant |G_{2,m}(x)|$. Далее в силу равенства

$$|Q_{2,m}(x)| = \omega_n\left(\frac{\varepsilon_m\rho(x)}{\varkappa}\right)^n = \omega_n\left(\frac{m}{\varkappa(m+1)(m^2+1)}\right)^n \rho^n(x)$$

имеем

$$\omega_n\left(\frac{m}{\varkappa(m+1)(m^2+1)}\right)^n \rho^n(x) \leqslant |G_{2,m}(x)|,$$

то есть

$$\left(\frac{1}{m^2+1}\right)^n \leqslant \omega_n^{-n}\varkappa^n\left(1+\frac{1}{m}\right)^n \rho^{-n}(x)\,|G_{2,m}(x)|.$$

Отсюда, учитывая равенство (3.5) получим левое неравенство в (3.2). □

Аналогично лемме 3.2 доказывается следующая

Лемма 3.3. *Пусть m — натуральное число и $\chi_{1,m}(x,y)$ — характеристическая функция шара $J_{1,m}(y)$. Тогда*

$$\frac{1}{(m^2+1)^n} \leqslant \rho^{-n}(x)\varkappa^n\omega_n^{-1}\int\limits_\Omega \chi_{1,m}(x,y)dy \leqslant \frac{1}{(m^2-1)^n}.$$

Лемма 3.4. *Пусть m — натуральное число и $\chi^{(m)}(z,y)$ — характеристическая функция множества*

$$J^{(m)}(y) = \left\{ z \in \mathbb{R}^n : \frac{1}{m(m+1)\varkappa}\rho(y) \leqslant |z-y| < \frac{1}{m^2\varkappa}\rho(y) \right\}. \tag{3.6}$$

Тогда

$$\int\limits_{\Omega} \chi^{(m)}(z,y)dy \leqslant \frac{\sigma_1(m)}{(m^2-1)^n}\rho^n(z), \tag{3.7}$$

где

$$\sigma_1(m) = \omega_n \varkappa^{-n}\left[1 - \left(\frac{m^2-m}{m^2+1}\right)^n\right]. \tag{3.8}$$

Доказательство. Сначала отметим, что $\sigma_1(m) > 0$ при $m \geqslant 2$ и

$$\lim_{m\to\infty} \sigma_1(m) = 0. \tag{3.9}$$

Для удобства чтения вводим обозначение

$$F_m(z) = \int\limits_{\Omega} \chi^{(m)}(z,y)\,dy. \tag{3.10}$$

Для всех $y \in \Omega$ и всех $z \in J_{1,m}(y)$, используя неравенство (3.4), имеем

$$\rho(y) \leqslant \left(1 - \frac{1}{m^2}\right)^{-1}\rho(z), \qquad \left(1 + \frac{1}{m^2}\right)^{-1}\rho(z) \leqslant \rho(y) \qquad (z \in J_{1,m}(y), y \in \Omega). \tag{3.11}$$

Пусть $z \in J^{(m)}(y)$. Тогда

$$\frac{1}{m(m+1)\varkappa}\rho(y) \leqslant |z-y| < \frac{1}{m^2\varkappa}\rho(y).$$

Теперь, используя неравенства (3.11), заменим $\rho(y)$ через $\rho(z)$. В результате получим

$$\frac{m}{(m+1)(m^2+1)\varkappa}\rho(z) \leqslant |z-y| < \frac{1}{\varkappa(m^2-1)}\rho(z).$$

В силу этих неравенств из (3.10) следует

$$F_m(z) \leqslant \int\limits_{\frac{m}{(m+1)(m^2+1)\varkappa}\rho(z)\leqslant|z-y|<\frac{1}{\varkappa(m^2-1)}\rho(z)} dy \rightleftharpoons F_m^0(z). \tag{3.12}$$

Правая часть этого неравенства равна объёму шарового слоя с радиусами

$$r_1 = \frac{m}{(m+1)(m^2+1)\varkappa}\rho(z), \qquad r_2 = \frac{1}{\varkappa(m^2-1)}\rho(z).$$

Поэтому она равна

$$\begin{aligned} F_m^0(z) &= \omega_n\left(r_2^n - r_1^n\right) = \omega_n\left(\frac{1}{\varkappa(m^2-1)}\rho(z)\right)^n - \omega_n\left(\frac{m}{(m+1)(m^2+1)\varkappa}\rho(z)\right)^n \\ &= \omega_n \frac{1}{(m^2-1)^n\varkappa^n}\rho^n(z)\left[1 - \left(\frac{m^2-m}{m^2+1}\right)^n\right]. \end{aligned} \tag{3.13}$$

В силу (3.12), (3.13) из равенства (3.10) следует оценка (3.7). □

Лемма 3.5. *Для любого вещественного числа θ и всех $y \in \Omega$, $z \in J_{1,m}(y)$ справедливо неравенство*

$$\left(\frac{m^2}{m^2+\operatorname{sgn}\theta}\right)^{\theta}\rho^{\theta}(z) \leqslant \rho^{\theta}(y) \leqslant \left(\frac{m^2}{m^2-\operatorname{sgn}\theta}\right)^{\theta}\rho^{\theta}(z). \tag{3.14}$$

Доказательство. Используя неравенство (3.4), имеем

$$\frac{m^2}{m^2+1}\rho(z) \leqslant \rho(y) \leqslant \frac{m^2}{m^2-1}\rho(z) \tag{3.15}$$

для всех $y \in \Omega$, $z \in J_{1,m}(y)$. Отсюда следует, что

$$\left(\frac{m^2-1}{m^2}\right)\rho^{-1}(z) \leqslant \rho^{-1}(y) \leqslant \left(\frac{m^2+1}{m^2}\right)\rho^{-1}(z). \tag{3.16}$$

Теперь, возведя неравенства (3.15), (3.16) в степени $\theta > 0$ имеем

$$\left(\frac{m^2}{m^2+1}\right)^{\theta}\rho^{\theta}(z) \leqslant \rho^{\theta}(y) \leqslant \left(\frac{m^2}{m^2-1}\right)^{\theta}\rho^{\theta}(z),$$

$$\left(\frac{m^2}{m^2-1}\right)^{-\theta}\rho^{-\theta}(z) \leqslant \rho^{-\theta}(y) \leqslant \left(\frac{m^2}{m^2+1}\right)^{-\theta}\rho^{-\theta}(z).$$

Из этих двух последних неравенств следует неравенство (3.14). □

Лемма 3.6. *Пусть m — натуральное число и $y \in \Omega$. Тогда для любого действительного числа θ и для любого $z \in J_{2,m}(y)$ имеет место неравенство*

$$\left|\rho^{\theta}(y) - \rho^{\theta}(z)\right| \leqslant \frac{1}{m^2}N_1(m,\theta)\rho^{\theta}(z), \tag{3.17}$$

где

$$N_1(m,\theta) = n|\theta|\left(1+\frac{1}{m^2}\right)^{2|\theta|+1}.$$

Доказательство. Так как (см. (2.2)) $|\nabla\rho(x)| \leqslant \varkappa$, $x \in \Omega$, используя равенство

$$\rho^{\theta}(y) - \rho^{\theta}(z) = \int_0^1 \frac{d}{dt}\left\{\rho^{\theta}(y+t(z-y))\right\}dt,$$

имеем

$$\left|\rho^{\theta}(y) - \rho^{\theta}(z)\right| \leqslant n\varkappa|\theta|\int_0^1 \rho^{\theta-1}(y+t(z-y))dt \leqslant n\varkappa|\theta||z-y|\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\rho^{\theta-1}(y+t(z-y)). \tag{3.18}$$

Далее заметим, что $z \in J_{2,m}(y)$ и поэтому при $\xi = y + t(z-y)$, $0 < t < 1$, имеем

$$|\xi - y| = t|z-y| \leqslant |z-y| < \frac{1}{m(m+1)\varkappa}\rho(y) < \frac{1}{m^2\varkappa}\rho(y).$$

В силу этого неравенства из (3.15) следует, что

$$\left(1+\frac{1}{m^2}\right)^{-1}\rho(\xi) \leqslant \rho(y) \leqslant \left(1-\frac{1}{m^2}\right)^{-1}\rho(\xi).$$

Далее из этого неравенства находим

$$\left(1-\frac{1}{m^2}\operatorname{sgn}(\theta-1)\right)^{\theta-1}\rho^{\theta-1}(y) \leqslant \rho^{\theta-1}(\xi) \leqslant \left(1+\frac{1}{m^2}\operatorname{sgn}(\theta-1)\right)^{\theta-1}\rho^{\theta-1}(y).$$

Отсюда и из (3.18) следует

$$\left|\rho^\theta(y)-\rho^\theta(z)\right| \leqslant n|\theta| \frac{1}{m^2}\left(1+\frac{1}{m^2}\operatorname{sgn}(\theta-1)\right)^{\theta-1}\rho^\theta(y).$$

Теперь, применяя неравенство (3.14) приходим к неравенству

$$\left|\rho^\theta(y)-\rho^\theta(z)\right| \leqslant n|\theta| \frac{1}{m^2}\left(1+\frac{1}{m^2}\operatorname{sgn}(\theta-1)\right)^{\theta-1}\left(1-\frac{1}{m^2}\operatorname{sgn}\theta\right)^{-\theta}\rho^\theta(z).$$

Отсюда после несложных преобразований следует неравенство (3.17). □

Лемма 3.7. *Для любого вещественного β и любого $m \geqslant 2$ справедливо неравенство*

$$\begin{aligned}\frac{1}{m^{2n}}M_{11}(\beta)\left\|f;L_{2,\beta}(\Omega)\right\|^2 &\leqslant \int\limits_\Omega \rho^{2\beta-n}(y)\left(\int\limits_{J_{2,m}(y)}|f(z)|^2\,dz\right)dy \\ &\leqslant \frac{1}{m^{2n}}M_{12}(\beta)\left\|f;L_{2,\beta}(\Omega)\right\|^2,\end{aligned} \tag{3.19}$$

где

$$M_{11}(\beta)=\omega_n\varkappa^{-n}2^{-|\beta|}3^{-n}, \qquad M_{12}(\beta)=\omega_n\varkappa^{-n}2^{|\beta|}2^n. \tag{3.20}$$

Доказательство. Используя неравенство (3.14) и лемму 3.2, получим:

$$\begin{aligned}\int\limits_\Omega \rho^{2\beta-n}(y)\left(\int\limits_{J_{2,m}(y)}|f(z)|^2\,dz\right)dy &= \int\limits_\Omega \rho^{2\beta-n}(y)\left(\int\limits_\Omega \chi_{2,m}(z,y)\,|f(z)|^2\,dz\right)dy \\ &\geqslant \left(\frac{m^2}{m^2-1}\right)^{-n}\left(\frac{m^2}{m^2+\operatorname{sgn}\beta}\right)^{2\beta}\int\limits_\Omega \rho^{2\beta-n}(z)\left(\int\limits_\Omega \chi_{2,m}(z,y)dy\right)|f(z)|^2\,dz \\ &\geqslant \omega_n\left(\frac{m^2}{m^2+\operatorname{sgn}\beta}\right)^{2\beta}\left(\frac{m-1}{\varkappa m(m^2+1)}\right)^n\int\limits_\Omega \rho^{2\beta}(z)\,|f(z)|^2\,dz.\end{aligned} \tag{3.21}$$

Далее заметим, что

$$\omega_n\left(\frac{m^2}{m^2+\operatorname{sgn}\beta}\right)^{2\beta}\left(\frac{m-1}{\varkappa m(m^2+1)}\right)^n \geqslant \frac{1}{m^{2n}}M_{11}(\beta)$$

при $m \geqslant 2$ и любого вещественного β. Поэтому из (3.21) следует левое неравенство в (3.19).

Переходим к доказательству правого неравенства в (3.19). Также как и выше, используя неравенство (3.14) и лемму 3.2, получим:

$$\int\limits_\Omega \rho^{2\beta-n}(y)\left(\int\limits_{J_{2,m}(y)}|f(z)|^2\,dz\right)dy \leqslant \frac{1}{m^{2n}}M_{12}(\beta,m)\left\|v;L_{2,\beta}(\Omega)\right\|^2, \tag{3.22}$$

где

$$M_{12}(\beta,m)=\frac{\omega_n}{\varkappa^n}\left(\frac{m^2}{m^2-\operatorname{sgn}\beta}\right)^{2\beta}\left(\frac{m^2+1}{m^2-1}\right)^n.$$

Далее непосредственной проверкой можно убедиться в том, что $M_{12}(\beta,m) \leqslant M_{12}(\beta)$ при $m \geqslant 2$ и любого вещественного β. Поэтому из (3.22) следует правое неравенство в (3.19). □

Лемма 3.8. *Имеет место следующее неравенство*

$$\int\limits_{\Omega} \rho^{2\beta-n}(y)\left(\int\limits_{J^{(m)}(y)} |f(z)|^2\,dz\right)dy \leqslant \frac{1}{m^{2n}} M_2(m,\beta)\left\|f; L_{2,\beta}(\Omega)\right\|^2, \tag{3.23}$$

где

$$M_2(m,\beta) = 2^n 4^{|\beta|}\sigma_1(m), \tag{3.24}$$

где величина $\sigma_1(m)$ *определяется равенством* (3.8).

Доказательство. Используя неравенство (3.14) и лемму 3.4, получим:

$$\int\limits_{\Omega} \rho^{2\beta-n}(y)\left(\int\limits_{J^{(m)}(y)} |f(z)|^2\,dz\right)dy = \int\limits_{\Omega} \rho^{2\beta-n}(y)\left(\int\limits_{\Omega} \chi^{(m)}(z,y)\,|f(z)|^2\,dz\right)dy$$

$$\leqslant \frac{1}{m^{2n}}\left(\frac{m^2+1}{m^2-1}\right)^n\left(\frac{m^2}{m^2-\operatorname{sgn}\beta}\right)^{2\beta}\sigma_1(m)\int\limits_{\Omega}\rho^{2\beta}(z)\,|f(z)|^2\,dz.$$

Отсюда при $m \geqslant 2$ следует

$$\int\limits_{\Omega} \rho^{2\beta-n}(y)\left(\int\limits_{J^{(m)}(y)} |f(z)|^2\,dz\right)dy \leqslant \frac{1}{m^{2n}} 2^n 4^{|\beta|}\sigma_1(m)\int\limits_{\Omega}\rho^{2\beta}(z)\,|f(z)|^2\,dz.$$

Далее, вводя обозначение (3.24), получим неравенство (3.23). □

Отметим, что $M_2(m,\beta) > 0$ при $m \geqslant 2$ и

$$\lim_{m\to\infty} M_2(m,\beta) = 0 \tag{3.25}$$

в силу равенства (3.9).

Лемма 3.9. *Справедливо неравенство*

$$\int\limits_{\Omega} \rho^{2\beta-n}(y)\left(\int\limits_{J_{1,m}(y)} |f(z)|^2\,dz\right)dy \leqslant \frac{1}{m^{2n}} M_3(\beta)\left\|f; L_{2,\beta}(\Omega)\right\|^2, \tag{3.26}$$

где

$$M_3(\beta) = \omega_n \varkappa^{-n} 4^{|\beta|} 2^n. \tag{3.27}$$

Доказательство. Используя неравенство (3.14) и лемму 3.3, получим:

$$\int\limits_{\Omega} \rho^{2\beta-n}(y)\left(\int\limits_{J_{1,m}(y)} |f(z)|^2\,dz\right)dy$$

$$\leqslant \left(\frac{m^2}{m^2+1}\right)^{-n}\left(\frac{m^2}{m^2-\operatorname{sgn}\beta}\right)^{2\beta}\int\limits_{\Omega}\rho^{2\beta-n}(z)\left(\int\limits_{\Omega}\chi_{1,m}(z,y)dy\right)|f(z)|^2\,dz$$

$$\leqslant \omega_n\varkappa^{-n}\frac{1}{m^{2m}}\left(\frac{m^2+1}{m^2-1}\right)^n\left(\frac{m^2}{m^2-\operatorname{sgn}\beta}\right)^{2\beta}\int\limits_{\Omega}\rho^{2\beta}(z)\,|f(z)|^2\,dz.$$

Отсюда следует неравенство (3.26), если заметим, что

$$\left(\frac{m^2+1}{m^2-1}\right)^n \leqslant 2^n \quad \text{и} \quad \left(\frac{m^2}{m^2-\operatorname{sgn}\beta}\right)^{2\beta} \leqslant 4^{|\beta|}.$$

□

Лемма 3.10. *Пусть вещественнозначная функция $\Phi(z)$ принадлежит пространству $L_1(\Omega)$. Тогда при натуральных $m \geqslant 3$ справедливо неравенство*

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega}\left(\int\limits_{J_{2,m}(y)} \rho^{-n}(z)\Phi(z)dz\right)dy \leqslant & \varkappa^{-n}\omega_n\left(\frac{m}{m+1}\right)^n \frac{1}{(m^2-1)^n}\int\limits_{\Omega}\Phi(z)dz \\ & + \varkappa^{-n}\omega_n\left[\frac{1}{(m^2-1)^n}-\frac{1}{(m^2+1)^n}\right]\int\limits_{\Omega}\Phi^-(z)dz,\end{aligned} \tag{3.28}$$

где $\Phi^-(z) = \dfrac{|\Phi(z)|-\Phi(z)}{2}$.

Доказательство. Вводим также вспомогательную функцию

$$\Phi^+(z) = \frac{|\Phi(z)|+\Phi(z)}{2}.$$

Заметим, что функции $\Phi^+(z)$, $\Phi^-(z)$ неотрицательны и $\Phi(z) = \Phi^+(z) - \Phi^-(z)$. Учитывая это, и применяя лемму 3.2, получим

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega}\left(\int\limits_{J_{2,m}(y)} \rho^{-n}(z)\Phi^+(z)dz\right)dy &= \int\limits_{\Omega}\left(\int\limits_{\Omega}\chi_{2,m}(z,y)\rho^{-n}(z)\Phi^+(z)dz\right)dy \\ &= \int\limits_{\Omega}\left(\int\limits_{\Omega}\chi_{2,m}(z,y)dy\right)\rho^{-n}(z)\Phi^+(z)dz \\ &\leqslant \varkappa^{-n}\omega_n\frac{1}{(m^2-1)^n}\left(\frac{m}{m+1}\right)^n\int\limits_{\Omega}\Phi^+(z)dz,\end{aligned}$$

$$\int\limits_{\Omega}\left(\int\limits_{J_{2,m}(y)} \rho^{-n}(z)\Phi^-(z)dz\right)dy = \int\limits_{\Omega}\left(\int\limits_{\Omega}\chi_{2,m}(z,y)\rho^{-n}(z)\Phi^-(z)dz\right)dy,$$

$$\int\limits_{\Omega}\left(\int\limits_{\Omega}\chi_{2,m}(z,y)dy\right)\rho^{-n}(z)\Phi^-(z)dz \geqslant \varkappa^{-n}\omega_n\frac{1}{(m^2+1)^n}\left(\frac{m}{m+1}\right)^n\int\limits_{\Omega}\Phi^-(z)dz.$$

В силу равенства $\Phi(z) = \Phi^+(z) - \Phi^-(z)$ из этих неравенств следует, что

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega}\left(\int\limits_{J_{2,m}(y)} \rho^{-n}(z)\Phi(z)dz\right)dy \leqslant & \varkappa^{-n}\omega_n\left(\frac{m}{m+1}\right)^n\frac{1}{(m^2-1)^n}\int\limits_{\Omega}\Phi^+(z)dz \\ & - \varkappa^{-n}\omega_n\left(\frac{m}{m+1}\right)^n\frac{1}{(m^2+1)^n}\int\limits_{\Omega}\Phi^-(z)dz.\end{aligned}$$

Подставляя в этом неравенстве $\Phi^+(z) = \Phi(z) + \Phi^-(z)$, получим неравенство ((3.28)). □

Лемма 3.11 ([15, §4.4, теорема 7]). *Пусть G — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющая условию конуса, целое число j такое, что $0 < j < 2r$ и пусть $\mu_0 > 0$.*

Тогда для любого $f \in W_2^{2r}(G)$ и любого $\mu \in (0, \mu_0]$ справедливо неравенство

$$\left\| f; L_2^j(G) \right\|^2 \leqslant \mu \left\| f; L_2^{2r}(G) \right\|^2 + K_1 \mu^{-\frac{j}{2r-j}} \left\| f; L_2(G) \right\|^2, \tag{3.29}$$

где число $K_1 > 0$ не зависит от f и μ.

Лемма 3.12 ([6, лемма 2.2]). *Пусть $\mu_0 > 0$ и целое число j такое, что $0 < j < 2r$. Тогда для любого $\mu \in (0, \mu_0]$ и всех $v \in C_0^\infty(\Omega)$ справедливо неравенство*

$$\left\| v; L^j_{2;\alpha-2r+j}(\Omega) \right\| \leqslant \mu \left\| v; L^{2r}_{2;\alpha}(\Omega) \right\| + K_2 \mu^{-\frac{j}{2r-j}} \left\| v; L_{2;\alpha-2r}(\Omega) \right\|, \tag{3.30}$$

где число $K_2 > 0$ не зависит от v и μ.

4. Доказательство теоремы 1

Сначала докажем теорему 2.1 в случае, когда оператор (2.4) имеет нулевые младшие коэффициенты, т.е. рассмотрим оператор вида (2.11).

Пусть y — произвольная фиксированная точка области Ω. Замораживая коэффициенты оператора (2.11) в точке y, рассмотрим следующий оператор

$$L_{0,y}[u(x)] = \sum_{|k|=2r} b_k(y) u^{(k)}(x), \qquad u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{4.1}$$

Так как этот оператор является (см. (2.5)) эллиптическим оператором с постоянными коэффициентами, существует число $c_1 > 0$ (см., например, [4, стр. 75]) такое, что

$$c_1 \left\| u; W_2^{2r}(g) \right\| \leqslant \left\| L_{0,y} u; L_2(g) \right\|, \qquad u \in C_0^\infty(g), \tag{4.2}$$

если $\operatorname{diam} g$ достаточно мал.

Далее считаем число m_0 настолько большим, что при $g = B_{m_0}(0)$ имеет место неравенство (4.2). Так как $B_m(0) \subset B_{m_0}(0)$ при $m \geqslant m_0$, неравенство (4.2) имеет место при $g = B_m(0)$ для всех $m \geqslant m_0$.

Рассмотрим произвольную функцию $u(x) \in C^\infty(B_m(0))$. Так как $\varphi_m \in C_0^\infty(B_m(0))$, получим $v_m(x) = \varphi_m(x) u(x) \in C_0^\infty(B_m(0))$. Теперь, используя неравенство (4.2) для функции $v_m(x)$, в силу равенства $v_m(x) = u(x)$, $x \in B_{m+1}(0)$, имеем

$$\sum_{|k|=2r} \int\limits_{B_{m+1}(0)} \left| u^{(k)}(x) \right|^2 dx + \int\limits_{B_{m+1}(0)} |u(x)|^2 \, dx \leqslant C_5 \left\{ \int\limits_{B_m(0)} |L_{0,y} v_m(x)|^2 \, dx \right\} \tag{4.3}$$

Применяя правило Лейбница дифференцирования произведения функций, представим выражение $L_{0,y} v_m(x)$ в виде

$$L_{0,y}[v_m](x) = L_y^{(1)}[v_m](x) + L_y^{(2)}[v_m](x), \tag{4.4}$$

где

$$L_y^{(1)}[v_m](x) = \sum_{|k|=2r} b_k(y) \varphi_m(x) u^{(k)}(x), \tag{4.5}$$

$$L_y^{(2)}[v_m](x) = \sum_{|k|=2r} \sum_{0\neq\nu\leqslant k} C_{k,\nu} b_k(y) u^{(k-\nu)}(x)\varphi_m^{(\nu)}(x), \tag{4.6}$$

$C_{k,\nu}$ — некоторые постоянные числа. Отметим, что в равенстве (4.6) мультииндексы k, ν удовлетворяют условию $0 \leqslant |k-\nu| \leqslant 2r-1$.

Так как $\varphi_m(x) = 1$ для всех $x \in B_{m+1}(0)$, получим

$$\int\limits_{B_m(0)} \left|L_y^{(1)}[v_m](x)\right|^2 dx = \int\limits_{B_{m+1}(0)} |L_{0,y}[u](x)|^2\, dx + \int\limits_{B^{(m)}(0)} |\varphi_m(x) L_{0,y}[u](x)|^2\, dx, \tag{4.7}$$

где

$$B^{(m)}(0) = B_m(0) \setminus B_{m+1}(0) = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \frac{1}{m+1} \leqslant |x| < \frac{1}{m}\right\}. \tag{4.8}$$

Из ограниченности коэффициентов $b_k(x)$ и из (4.1) следует, что

$$\int\limits_{B^{(m)}(0)} |\varphi_m(x) L_{0,y}[u](x)|^2\, dx \leqslant C_6 \sum_{|k|=2r} \int\limits_{B^{(m)}(0)} \left|u^{(k)}(x)\right|^2 dx. \tag{4.9}$$

Применяя неравенства (4.7), (4.9), имеем

$$\int\limits_{B_m(0)} \left|L_y^{(1)}[v_m](x)\right|^2 dx \leqslant \int\limits_{B_{m+1}(0)} |L_{0,y}[u](x)|^2\, dx + C_6 \sum_{|k|=2r} \int\limits_{B^{(m)}(0)} \left|u^{(k)}(x)\right|^2 dx. \tag{4.10}$$

Далее, используя равенство (4.6) в силу ограниченности коэффициентов $b_k(x)$ и неравенство 5 леммы 3.1, получим

$$\begin{aligned} \int\limits_{B_m(0)} \left|L_y^{(2)}[v_m](x)\right|^2 dx &\leqslant C_7 \sum_{|k|=2r} \sum_{0\neq\nu\leqslant k} \int\limits_{B_m(0)} \left|u^{(k-\nu)}(x)\right|^2 \left|\varphi^{(\nu)}(x)\right|^2 dx \\ &\leqslant C_8 \sum_{|k|=2r} \sum_{0\neq\nu\leqslant k} [2m(m+1)]^{2|\nu|} \int\limits_{B_m(0)} \left|u^{(k-\nu)}(x)\right|^2 dx. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Теперь для оценки интегралов в правой части этого неравенства применяем лемму 3.11. Используя неравенство (3.29) этой леммы при $G = B_m(0)$, $0 \neq |\nu| \leqslant 2r$, $j = |k-\nu|$, $|k| = 2r$, получим

$$\int\limits_{B_m(0)} \left|u^{(k-\nu)}(x)\right|^2 dx \leqslant \mu \sum_{|l|=2r} \int\limits_{B_m(0)} \left|u^{(l)}(x)\right|^2 dx + c_2 \mu^{-\frac{|k-\nu|}{2r-|k-\nu|}} \int\limits_{B_m(0)} |u(x)|^2\, dx. \tag{4.12}$$

В силу этого неравенства из (4.11) следует

$$\begin{aligned} \int\limits_{B_m(0)} \left|L_y^{(2)}[v_m](x)\right|^2 dx \leqslant & C_8 \sum_{|k|=2r} \sum_{1\leqslant|k-\nu|\leqslant 2r-1} [2m(m+1)]^{2|\nu|} \int\limits_{B_m(0)} \left|u^{(k-\nu)}(x)\right|^2 dx \\ & + C_8 [2m(m+1)]^{4r} \int\limits_{B_m(0)} |u(x)|^2\, dx \\ \leqslant & \mu \left[C_9 \sum_{|k|=2r} \sum_{1\leqslant|k-\nu|\leqslant 2r-1} [2m(m+1)]^{2|\nu|}\right] \left\|u; L_2^{2r}(B_m(0))\right\|^2 \end{aligned}$$

$$+\left[C_{10}\sum_{|k|=2r}\sum_{1\leqslant|k-\nu|\leqslant 2r-1}[2m(m+1)]^{2|\nu|}\mu^{-\frac{|k-\nu|}{2r-|k-\nu|}}\right.$$
$$\left.+C_8[2m(m+1)]^{4r}\right]\|u;L_2(B_m(0))\|^2.$$

Так как $m\geqslant m_0$ и μ — достаточно малое положительное число, считая $m\geqslant 3$ и $0<\mu<\frac{1}{2}$, отсюда получаем

$$\int\limits_{B_m(0)}\left|L_y^{(2)}[v_m](x)\right|^2dx\leqslant\mu\delta_1(m)\left\|u;L_2^{2r}(B_m(0))\right\|^2+K_1(m,\mu)\left\|u;L_2(B_m(0))\right\|^2, \tag{4.13}$$

где $\delta_1(m)=C_{13}m^{8r}$, $K_1(m,\mu)=C_{14}m^{8r}\mu^{-(2r-1)}$.

Далее подбираем число $\mu\in(0,\frac{1}{2})$ так, чтобы начиная с некоторого числа m^*, выполнялось неравенство $\mu\delta_1(m)\leqslant\frac{1}{m}$ для всех $m\geqslant m^*$. Тогда из (4.13) следует

$$\int\limits_{B_m(0)}\left|L_y^{(2)}[v_m](x)\right|^2dx\leqslant\frac{1}{m}\left\|u;L_2^{2r}(B_m(0))\right\|^2+K_2(m)\left\|u;L_2(B_m(0))\right\|^2, \tag{4.14}$$

где

$$K_2(m)=C_{15}m^{16r^2+2r-1}. \tag{4.15}$$

Теперь, применяя полученные неравенства (4.10), (4.14) из (4.3), (4.4), находим

$$\begin{aligned}\sum_{|k|=2r}\int\limits_{B_{m+1}(0)}\left|u^{(k)}(x)\right|^2dx+\int\limits_{B_{m+1}(0)}|u(x)|^2dx\leqslant C_5\int\limits_{B_{m+1}(0)}|L_{0,y}[u](x)|^2dx\\+C_6\sum_{|k|=2r}\int\limits_{B^{(m)}(0)}\left|u^{(k)}(x)\right|^2dx+\frac{1}{m}\sum_{|l|=2r}\int\limits_{B_m(0)}\left|u^{(l)}(x)\right|^2dx\\+K_2(m)\int\limits_{B_m(0)}|u(x)|^2dx.\end{aligned} \tag{4.16}$$

Рассмотрим отображение $z\to x$, определенное с помощью равенства

$$x=(z-y)m\varkappa\rho(y), \tag{4.17}$$

где $\varkappa$ — константа из условия (2.1) и y — любая фиксированная точка из области Ω. Это отображение переводит множества (см. (2.7), (3.1), (3.6)) $J_{1,m}(y)$, $J_{2,m}(y)$, $J^{(m)}(y)$ в множества $B_m(0)$, $B_{m+1}(0)$, $B^{(m)}(0)$, соответственно.

Берём произвольную функцию v из класса $C_0^\infty(\Omega)$. Легко можно проверить, что $J_{1,m}(y)\subset\Omega$ при всех $y\in\Omega$, $m\geqslant 2$. Поэтому функция $\widehat{v}_y(x)=v\left(\dfrac{x\rho(y)}{m\varkappa}+y\right)$ определена для всех $x\in B_m(0)$ и принадлежит классу $C^\infty(B_m(0))$.

Заметим, что если $u(x)=\widehat{v}_y(x)$, то

$$u^{(k)}(x)=(m\varkappa)^{-|k|}\rho^{|k|}(y)\widehat{v}_y^{(k)}(x). \tag{4.18}$$

Используя это равенство, в силу (4.1) имеем

$$L_{0,y}[u(x)] = (m\varkappa)^{-2r}\,\rho^{2r}(y)\sum_{|k|=2r} b_k(y)\widehat{v}_y^{(k)}(x) = (m\varkappa)^{-2r}\,\rho^{2r}(y)L_{0,y}\left[\widehat{v}_y(x)\right], \tag{4.19}$$

Учитывая равенства (4.18), (4.19), и применяя неравенство (4.16) для функции $u(x) = \widehat{v}_y(x)$, получим некоторое неравенство, которое после умножения на $\rho^{2\alpha}(y)$ примет следующий вид

$$\begin{aligned}
&(m\varkappa)^{-4r}\,\rho^{4r+2\alpha}(y)\sum_{|k|=2r}\int\limits_{B_{m+1}(0)}\left|\widehat{v}_y^{(k)}(x)\right|^2 dx + \rho^{2\alpha}(y)\int\limits_{B_{m+1}(0)}\left|\widehat{v}_y(x)\right|^2 dx\\
&\qquad\leqslant C_5\,(m\varkappa)^{-4r}\,\rho^{4r+2\alpha}(y)\int\limits_{B_{m+1}(0)}\left|L_{0,y}\left[\widehat{v}_y(x)\right]\right|^2 dx\\
&\qquad + C_{10}\,(m\varkappa)^{-4r}\,\rho^{4r+2\alpha}(y)\sum_{|k|=2r}\int\limits_{B^{(m)}(0)}\left|\widehat{v}^{(k)}(x)\right|^2 dx\\
&\qquad + \frac{1}{m}\,(m\varkappa)^{-4r}\,\rho^{4r+2\alpha}(y)\sum_{|k|=2r}\int\limits_{B_m(0)}\left|\widehat{v}_y^{(k)}(x)\right|^2 dx\\
&\qquad + K_2(m)\rho^{2\alpha}(y)\int\limits_{B_m(0)}\left|\widehat{v}_y(x)\right|^2 dx.
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Теперь в интегралах этого неравенства проведём замену переменных интегрирования $z = y + \frac{x\rho(y)}{m\varkappa}$. При этом воспользуемся равенствами

$$\begin{aligned}
&x = \frac{(z-y)m\varkappa}{\rho(y)}, \qquad dx = \left(\frac{m\varkappa}{\rho(y)}\right)^n dz,\\
&\widehat{v}_y(x) = v\left(\frac{x\rho(y)}{m\varkappa} + y\right) = v(z),\\
&\widehat{v}_y^{(k)}(x) = v^{(k)}\left(\frac{x\rho(y)}{m\varkappa} + y\right) = v^{(k)}(z),\\
&L_{0,y}\left[\widehat{v}_y(x)\right] = \sum_{|k|=2r} b_k(y)\widehat{v}_y^{(k)}(x) = \sum_{|k|=2r} b_k(y)v^{(k)}\left(\frac{x\rho(y)}{m\varkappa} + y\right)\\
&\qquad = \sum_{|k|=2r} b_k(y)v^{(k)}(z) = L_{0,y}\left[v(z)\right].
\end{aligned}$$

Интегралы меняются следующим образом:

$$\int\limits_{B_m(0)}\left|\widehat{v}_y(x)\right|^2 dx = \left(\frac{m\varkappa}{\rho(y)}\right)^n\int\limits_{J_{1,m}(y)}|v(z)|^2 dz, \tag{4.21}$$

$$\int\limits_{B_{m+1}(0)}\left|\widehat{v}_y^{(k)}(x)\right|^2 dx = \left(\frac{m\varkappa}{\rho(y)}\right)^n\int\limits_{J_{2,m}(y)}\left|v^{(k)}(z)\right|^2 dz, \tag{4.22}$$

$$\int\limits_{B_m(0)}\left|\widehat{v}_y^{(k)}(x)\right|^2 dx = \left(\frac{m\varkappa}{\rho(y)}\right)^n\int\limits_{J_{1,m}(y)}\left|v^{(k)}(z)\right|^2 dz, \tag{4.23}$$

$$\int\limits_{B_{m+1}(0)} \left|L_{0,y}\left[\widehat{v}_y(x)\right]\right|^2 dx = \left(\frac{m\varkappa}{\rho(y)}\right)^n \int\limits_{J_{2,m}(y)} \left|L_{0,y}\left[v(z)\right]\right|^2 dz, \tag{4.24}$$

$$\int\limits_{B^{(m)}(0)} \left|\widehat{v}^{(k)}(x)\right|^2 dx = \left(\frac{m\varkappa}{\rho(y)}\right)^n \int\limits_{J^{(m)}(y)} \left|v^{(k)}(z)\right|^2 dz. \tag{4.25}$$

Интегралы в неравенстве (4.20) заменяем через (4.21)–(4.25):

$$\begin{aligned}(m\varkappa)^{-4r}\rho^{4r+2\alpha}(y)\left(\frac{m\varkappa}{\rho(y)}\right)^n \sum_{|k|=2r}\int\limits_{J_{2,m}(y)} \left|v^{(k)}(z)\right|^2 dz + \rho^{2\alpha}(y)\left(\frac{m\varkappa}{\rho(y)}\right)^n \int\limits_{J_{2,m}(y)} |v(z)|^2 dz \\ \leqslant C_5 (m\varkappa)^{-4r}\rho^{4r+2\alpha}(y)\left(\frac{m\varkappa}{\rho(y)}\right)^n \int\limits_{J_{2,m}(y)} \left|L_{0,y}\left[v(z)\right]\right|^2 dz \\ + C_{10}(m\varkappa)^{-4r}\rho^{4r+2\alpha}(y)\left(\frac{m\varkappa}{\rho(y)}\right)^n \sum_{|k|=2r}\int\limits_{J^{(m)}(y)} \left|v^{(k)}(z)\right|^2 dz \\ + \frac{1}{m}(m\varkappa)^{-4r}\rho^{4r+2\alpha}(y)\left(\frac{m\varkappa}{\rho(y)}\right)^n \sum_{|k|=2r}\int\limits_{J_{1,m}(y)} \left|v^{(k)}(z)\right|^2 dz \\ + K_2(m)\rho^{2\alpha}(y)\left(\frac{m\varkappa}{\rho(y)}\right)^n \int\limits_{J_{1,m}(y)} |v(z)|^2 dz.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}(m\varkappa)^{-4r+n}\rho^{4r+2\alpha-n}(y) \sum_{|k|=2r}\int\limits_{J_{2,m}(y)} \left|v^{(k)}(z)\right|^2 dz + (m\varkappa)^n \rho^{2\alpha-n}(y) \int\limits_{J_{2,m}(y)} |v(z)|^2 dz \\ \leqslant C_5 (m\varkappa)^{-4r+n}\rho^{4r+2\alpha-n}(y) \int\limits_{J_{2,m}(y)} \left|L_{0,y}\left[v(z)\right]\right|^2 dz \\ + C_{10}(m\varkappa)^{-4r+n}\rho^{4r+2\alpha-n}(y) \sum_{|k|=2r}\int\limits_{J^{(m)}(y)} \left|v^{(k)}(z)\right|^2 dz \\ + \frac{1}{m}(m\varkappa)^{-4r+n}\rho^{4r+2\alpha-n}(y) \sum_{|k|=2r}\int\limits_{J_{1,m}(y)} \left|v^{(k)}(z)\right|^2 dz \\ + K_1(m)\rho^{2\alpha-n}(y)\,(m\varkappa)^n \int\limits_{J_{1,m}(y)} |v(z)|^2 dz.\end{aligned}$$

Умножим это неравенство на $(m\varkappa)^{4r-n}\,\rho^{-4r}(y)$ и результат интегрируем по $y\in\Omega$:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{|k|=2r}\int_{\Omega}\rho^{2\alpha-n}(y)\left(\int_{J_{2,m}(y)}\left|v^{(k)}(z)\right|^{2}dz\right)dy\\
&\qquad\qquad+(m\varkappa)^{4r}\int_{\Omega}\rho^{2\alpha-4r-n}(y)\left(\int_{J_{2,m}(y)}|v(z)|^{2}dz\right)dy\\
&\qquad\leqslant C_{5}\int_{\Omega}\rho^{2\alpha-n}(y)\left(\int_{J_{2,m}(y)}\left|L_{0,y}\left[v(z)\right]\right|^{2}dz\right)dy\\
&\qquad\qquad+C_{10}\sum_{|k|=2r}\int_{\Omega}\rho^{2\alpha-n}(y)\left(\int_{J^{(m)}(y)}\left|v^{(k)}(z)\right|^{2}dz\right)dy\\
&\qquad\qquad+\frac{1}{m}\sum_{|k|=2r}\int_{\Omega}\rho^{2\alpha-n}(y)\left(\int_{J_{1,m}(y)}\left|v^{(k)}(z)\right|^{2}dz\right)dy\\
&\qquad\qquad+K_{2}(m)\,(m\varkappa)^{4r}\int_{\Omega}\rho^{2\alpha-4r-n}(y)\left(\int_{J_{1,m}(y)}|v(z)|^{2}dz\right)dy.
\end{aligned}
\tag{4.26}
$$

Теперь переходим к оценке интегралов неравенства (4.26). Сначала, используя лемму 3.7, оценим снизу интегралы в левой части неравенства (4.26):

$$
\sum_{|k|=2r}\int_{\Omega}\rho^{2\alpha-n}(y)\left(\int_{J_{2,m}(y)}\left|v^{(k)}(z)\right|^{2}dz\right)dy\geqslant\frac{1}{m^{2n}}M_{11}(\alpha)\left\|v;L_{2,\alpha}^{2r}(\Omega)\right\|^{2},\tag{4.27}
$$

$$
\int_{\Omega}\rho^{2\alpha-4r-n}(y)\left(\int_{J_{2,m}(y)}|v(z)|^{2}dz\right)dy\geqslant\frac{1}{m^{2n}}M_{11}(\alpha-2r)\left\|v;L_{2,\alpha-2r}(\Omega)\right\|^{2},\tag{4.28}
$$

где

$$
M_{11}(\alpha)=\omega_{n}\varkappa^{-n}2^{-|\alpha|}3^{-n},\qquad M_{11}(\alpha-2r)=\omega_{n}\varkappa^{-n}2^{-|\alpha-2r|}3^{-n}.
$$

Далее, применяя лемму 3.8, сверху оценим второй интеграл в правой части неравенства (4.26) и в результате получим

$$
\sum_{|k|=2r}\int_{\Omega}\rho^{2\alpha-n}(y)\left(\int_{J^{(m)}(y)}\left|v^{(k)}(z)\right|^{2}dz\right)dy\leqslant\frac{1}{m^{2n}}M_{2}(m,\alpha)\left\|v;L_{2,\alpha}^{2r}(\Omega)\right\|^{2},\tag{4.29}
$$

где $M_2(m,\alpha)$ определяется равенством (3.24) и удовлетворяет (3.25).

Теперь, используя лемму 3.9, сверху оценим последние интегралы в правой части неравенства (4.26). В результате получим следующие неравенства

$$
\sum_{|k|=2r}\int_{\Omega}\rho^{2\alpha-n}(y)\left(\int_{J_{1,m}(y)}\left|v^{(k)}(z)\right|^{2}dz\right)dy\leqslant\frac{1}{m^{2n}}M_{3}(\alpha)\left\|v;L_{2,\alpha}^{2r}(\Omega)\right\|^{2},\tag{4.30}
$$

$$
\int_{\Omega}\rho^{2\alpha-4r-n}(y)\left(\int_{J_{1,m}(y)}|v(z)|^{p}dz\right)dy\leqslant\frac{1}{m^{2n}}M_{3}(\alpha-2r)\left\|v;L_{2,\alpha-2r}(\Omega)\right\|^{2},\tag{4.31}
$$

где
$$M_3(\alpha) = \omega_n \varkappa^{-n} 4^{|\alpha|} 2^n, \qquad M_3(\alpha - 2r) = \omega_n \varkappa^{-n} 4^{|\alpha - 2r|} 2^n. \tag{4.32}$$

В силу доказанных выше неравенств (4.27)–(4.31) из (4.26) находим
$$\begin{aligned}\frac{1}{m^{2n}} M_{11}(\alpha) \left\| v; L^{2r}_{2,\alpha}(\Omega) \right\|^2 &+ (m\varkappa)^{4r} \frac{1}{m^{2n}} M_{11}(\alpha - 2r) \left\| v; L_{2,\alpha-2r}(\Omega) \right\|^2 \\ &\leqslant C_5 \mathcal{L}^{(1)}_{\varepsilon,m}(v) + C_{10} \frac{1}{m^{2n}} M_2(m,\alpha) \left\| v; L^{2r}_{2,\alpha}(\Omega) \right\|^2 \\ &\quad + \frac{1}{m} \frac{1}{m^{2n}} M_3(\alpha) \left\| v; L^{2r}_{2,\alpha}(\Omega) \right\|^2 \\ &\quad + K_2(m) (m\varkappa)^{4r} \frac{1}{m^{2n}} M_3(\alpha - 2r) \left\| v; L_{2,\alpha-2r}(\Omega) \right\|^2,\end{aligned}$$

где
$$\mathcal{L}_{1,m}(v) = \int\limits_{\Omega} \rho^{2\alpha-n}(y) \left(\int\limits_{J_{2,m}(y)} \left| L_{0,y} \left[v(z) \right] \right|^2 dz \right) dy. \tag{4.33}$$

Умножая обе части этого неравенства на m^{2n} и, группируя подобные слагаемые, получаем
$$M_5(m,\alpha) \left\| v; L^{2r}_{2,\alpha}(\Omega) \right\|^2 - M_6(m,\alpha) \left\| v; L_{2,\alpha-2r}(\Omega) \right\|^2 \leqslant C_5 m^{2n} \mathcal{L}_{1,m}(v), \tag{4.34}$$

где
$$M_5(m,\alpha) = M_{11}(\alpha) - C_{10} M_2(m,\alpha) - \frac{1}{m} M_3(\alpha), \tag{4.35}$$
$$M_6(m,\alpha) = K_2(m)(m\varkappa)^{4r} M_3(\alpha - 2r) - (m\varkappa)^{4r} M_{11}(\alpha - 2r). \tag{4.36}$$

Далее мы будем сверху оценивать функционал $\mathcal{L}_{1,m}(v)$. Согласно лемме 3.6 имеет место неравенство
$$\left| \rho^{2\alpha-n}(y) - \rho^{2\alpha-n}(z) \right| \leqslant \frac{1}{m^2} N_2(\alpha) \rho^{2\alpha-n}(z), \quad z \in J_{2,m}(y), \tag{4.37}$$

где
$$N_2(\alpha) = n(2|\alpha| + n) 2^{4|\alpha| + 2n + 1}. \tag{4.38}$$

Вводим обозначение
$$\mathcal{L}_{2,m}(v) = \int\limits_{\Omega} \left(\int\limits_{\Omega} \chi_{2,m}(z,y) \rho^{2\alpha-n}(z) \left| \sum_{|k|=2r} b_k(y) v^{(k)}(z) \right|^2 dz \right) dy.$$

Отметим, что (см. (4.33))
$$\mathcal{L}_{1,m}(v) = \int\limits_{\Omega} \rho^{2\alpha-n}(y) \left(\int\limits_{\Omega} \chi_{2,m}(z,y) \left| \sum_{|k|=2r} b_k(y) v^{(k)}(z) \right|^2 dz \right) dy.$$

Учитывая это равенство и, применяя неравенство (4.37), имеем
$$\begin{aligned}\left| \mathcal{L}_{1,m}(v) - \mathcal{L}_{2,m}(v) \right| &\leqslant \int\limits_{\Omega} \left(\int\limits_{\Omega} \chi_{2,m}(z,y) \left| \rho^{2\alpha-n}(y) - \rho^{2\alpha-n}(z) \right| \left| \sum_{|k|=2r} b_k(y) v^{(k)}(z) \right|^2 dz \right) dy \\ &\leqslant \frac{1}{m^2} N_2(\alpha) \int\limits_{\Omega} \left(\int\limits_{\Omega} \chi_{2,m}(z,y) \rho^{2\alpha-n}(z) \left| \sum_{|k|=2r} b_k(y) v^{(k)}(z) \right|^2 dz \right) dy.\end{aligned}$$

Так как коэффициенты $b_k(x)$ ограничены, отсюда следует

$$|\mathcal{L}_{1,m}(v) - \mathcal{L}_{2,m}(v)| \leqslant C_3 \frac{1}{m^2} N_2(\alpha) \sum_{|k|=2r} \int\limits_{\Omega} \left(\int\limits_{\Omega} \chi_{2,m}(z,y) \rho^{2\alpha-n}(z) \left| v^{(k)}(z) \right|^2 dz \right) dy, \qquad (4.39)$$

где C_3 — некоторая константа.

Теперь, используя лемму 3.2, оценим интеграл в правой части неравенства (4.39)

$$\begin{aligned} &\int\limits_{\Omega} \left(\int\limits_{\Omega} \chi_{2,m}(z,y) \rho^{2\alpha-n}(z) \left| v^{(k)}(z) \right|^2 dz \right) dy \\ &\qquad = \int\limits_{\Omega} \rho^{2\alpha-n}(z) \left| v^{(k)}(z) \right|^2 \left(\int\limits_{\Omega} \chi_{2,m}(z,y) dy \right) dz \\ &\qquad \leqslant \frac{1}{(m^2-1)^n} \varkappa^{-n} \omega_n \left(\frac{m}{m+1} \right)^n \int\limits_{\Omega} \rho^{2\alpha}(z) \left| v^{(k)}(z) \right|^2 dz \\ &\qquad \leqslant \frac{1}{m^{2n}} \varkappa^{-n} \omega_n 2^n \int\limits_{\Omega} \rho^{2\alpha}(z) \left| v^{(k)}(z) \right|^2 dz. \end{aligned} \qquad (4.40)$$

Отсюда и из (4.39) следует

$$|\mathcal{L}_{1,m}(v) - \mathcal{L}_{2,m}(v)| \leqslant \frac{1}{m^{2n+2}} N_3(\alpha) \left\| v; L^{2r}_{2,\alpha}(\Omega) \right\|^2,$$

где $N_3(\alpha) = C_3 N_2(\alpha) \omega_n \varkappa^{-n} 2^n$. В силу равенства (4.38) имеет место неравенство

$$N_3(\alpha) = C_3 n(2|\alpha| + n) 2^{4|\alpha|+2n+1} \omega_n \varkappa^{-n} 2^n \leqslant C_3 (2|\alpha| + n) 2^{4|\alpha|+3n+1}.$$

Поэтому

$$|\mathcal{L}_{1,m}(v) - \mathcal{L}_{2,m}(v)| \leqslant \frac{1}{m^{2n+2}} N_4(\alpha) \left\| v; L^{2r}_{2,\alpha}(\Omega) \right\|^2, \qquad (4.41)$$

где $N_4(\alpha) = C_3 (2|\alpha| + n) 2^{4|\alpha|+3n+1}$.

Теперь вводим обозначение

$$\mathcal{L}_{3,m}(v) = \int\limits_{\Omega} \left(\int\limits_{\Omega} \chi_{2,m}(z,y) \rho^{2\alpha-n}(z) \left| \sum_{|k|=2r} b_k(z) v^{(k)}(z) \right|^2 dz \right) dy. \qquad (4.42)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} &|\mathcal{L}_{2,m}(v) - \mathcal{L}_{3,m}(v)| \\ &\qquad \leqslant C_4 \sum_{|k|=2r} \int\limits_{\Omega} \left(\int\limits_{\Omega} \chi_{2,m}(z,y) \rho^{2\alpha-n}(z) \left| b_k(y) - b_k(z) \right| \left| v^{(k)}(z) \right|^2 dz \right) dy, \end{aligned} \qquad (4.43)$$

где C_4 — некоторая положительная постоянная.

Теперь, в силу условия II) теоремы 2.1 (см. (2.6), (2.7)) и доказанное выше неравенство (4.39) из (4.43) получим

$$|\mathcal{L}_{2,m}(v) - \mathcal{L}_{3,m}(v)| \leqslant \nu C_4 \sum_{|k|=2r} \int\limits_{\Omega} \left(\int\limits_{\Omega} \chi_{2,m}(z,y) \rho^{2\alpha-n}(z) \left| v^{(k)}(z) \right|^2 dz \right) dy$$

$$\leqslant \nu \frac{1}{m^{2n}} C_4 \varkappa^{-n} \omega_n 2^n \sum_{|k|=2r} \int\limits_{\Omega} \rho^{2\alpha}(z) \left| v^{(k)}(z) \right|^2 dz.$$

Таким образом, мы доказали, что

$$|\mathcal{L}_{2,m}(v) - \mathcal{L}_{3,m}(v)| \leqslant \nu \frac{1}{m^{2n}} N_5 \left\| v; L_{2,\alpha}^{2r}(\Omega) \right\|^2, \qquad m \in \mathbb{N}, \quad m \geqslant m_\nu, \tag{4.44}$$

где $N_5 = C_4 \varkappa^{-n} \omega_n 2^n$.

Далее, применяя лемму 3.2, оценим функционал (4.42)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{3,m}(v) &= \int\limits_{\Omega} \left(\int\limits_{\Omega} \chi_{2,m}(z,y) \rho^{-n}(z) \left| L_0[v(z)] \right|^2 dz \right) dy \\
&= \int\limits_{\Omega} \left(\int\limits_{\Omega} \chi_{2,m}(z,y) dy \right) \rho^{-n}(z) \left| L_0[v(z)] \right|^2 dz \\
&\leqslant \frac{1}{m^{2n}} \frac{\omega_n}{\varkappa^n} \left(\frac{m^2}{m^2-1} \right)^n \int\limits_{\Omega} \left| L_0[v(z)] \right|^2 dz \leqslant \frac{1}{m^{2n}} \frac{\omega_n}{\varkappa^n} 2^n \int\limits_{\Omega} \left| L_0[v(z)] \right|^2 dz.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\mathcal{L}_{3,m}(v) \leqslant \frac{1}{m^{2n}} N_6 \int\limits_{\Omega} \left| L_0[v(z)] \right|^2 dz, \tag{4.45}$$

где $N_6 = \omega_n \varkappa^{-n} 2^n$.

Теперь, используя доказанные выше неравенства (4.41), (4.44), (4.45), оценим функционал (4.33)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{1,m}(v) \leqslant& |\mathcal{L}_{1,m}(v) - \mathcal{L}_{2,m}(v)| + |\mathcal{L}_{2,m}(v) - \mathcal{L}_{3,m}(v)| + \mathcal{L}_{3,m}(v) \\
\leqslant& \frac{1}{m^{2n+2}} N_4(m,\alpha) \left\| v; L_{2,\alpha}^{2r}(\Omega) \right\|^2 + \nu \frac{1}{m^{2n}} N_5 \left\| v; L_{2,\alpha}^{2r}(\Omega) \right\|^2 + \frac{1}{m^{2n}} N_6 \int\limits_{\Omega} \left| L_0[v(z)] \right|^2 dz.
\end{aligned}$$

В силу этого неравенства из (4.34) следует, что

$$\begin{aligned}
M_5(m,\alpha) \left\| v; L_{2,\alpha}^{2r}(\Omega) \right\|^2 - M_6(m,\alpha) \left\| v; L_{2,\alpha-2r}(\Omega) \right\|^2 \leqslant C_5 m^{2n} \mathcal{L}_{1,m}(v) \\
\leqslant C_5 \left(\frac{1}{m^2} N_4(\alpha) + \nu N_5 \right) \left\| v; L_{2,\alpha}^{2r}(\Omega) \right\|^2 + C_5 N_6 \int\limits_{\Omega} \left| L_0[v(z)] \right|^2 dz,
\end{aligned}$$

где

$$M_5(m,\alpha) = M_{11}(\alpha) - C_{10} M_2(m,\alpha) - \frac{1}{m} M_3(\alpha), \tag{4.46}$$

$$M_6(m,\alpha) = K_2(m)(m\varkappa)^{4r} M_3(\alpha - 2r) - (m\varkappa)^{4r} M_{11}(\alpha - 2r). \tag{4.47}$$

Таким образом, доказано следующее неравенство

$$\begin{aligned}
C_0(m,\alpha,\nu) \left\| v; L_{2,\alpha}^{2r}(\Omega) \right\|^2 - C_1(m,\alpha) \left\| v; L_{2,\alpha-2r}(\Omega) \right\|^2 \\
\leqslant \int\limits_{\Omega} \left| L_0[v(z)] \right|^2 dz, \quad m \geqslant m(\nu),
\end{aligned} \tag{4.48}$$

где

$$C_0(m,\alpha,\nu)=\frac{1}{C_5N_6}\left[M_{5,\alpha}(m)-C_5\left(\frac{1}{m^2}N_4(\alpha)+\nu N_5\right)\right], \tag{4.49}$$

$$C_1(m,\alpha)=\frac{M_6(m,\alpha)}{C_5N_6}. \tag{4.50}$$

В силу (3.20) и (3.24) из (4.46) следует, что при некотором достаточно большом m_1 для всех $m\geqslant m_1$, выполняется неравенство $M_5(m,\alpha)\geqslant\dfrac{M_{11}(\alpha)}{2}>0$. Отсюда и из (4.49) следует, что при некотором достаточно большом $m_2>m_1$ и некотором достаточно малом $\nu_1>0$ для всех $m\geqslant m_2$ и всех $\nu\in(0,\nu_1)$, выполняется неравенство

$$C_0(m,\nu)\geqslant\frac{1}{4}M_{11}(\alpha)>0. \tag{4.51}$$

С другой стороны в силу (4.15) из (4.47) следует, что

$$M_6(m,\alpha)=K_2(m)(m\varkappa)^{4r}M_3(\alpha-2r)-(m\varkappa)^{4r}M_{11}(\alpha-2r)\geqslant\frac{1}{2}M_3(\alpha-2r)$$

для всех $m\geqslant m_3$, где m_3 — некоторое число больше чем m_2. Поэтому из (4.50) имеем

$$C_1(m,\alpha)=\frac{M_6(m,\alpha)}{C_5N_6}\geqslant\frac{1}{2}M_3(\alpha-2r)\frac{1}{C_5N_6}>0\quad(m\geqslant m_3). \tag{4.52}$$

Учитывая неравенства (4.51), (4.52), подбирая число m достаточно большим и число ν достаточно малым, из (4.48) получаем неравенство

$$c\left\|v;L^{2r}_{2,\alpha}(\Omega)\right\|^2\leqslant\int\limits_\Omega|L_0[v(z)]|^2\,dz+K\left\|v;L_{2,\alpha-2r}(\Omega)\right\|^2\quad\text{для всех}\quad v\in C_0^\infty(\Omega). \tag{4.53}$$

Таким образом, теорема 2.1 в случае оператора (2.11) доказана.

Теперь переходим к доказательству теоремы 2.1 в случае операторов с ненулевыми младшими коэффициентами. Представим оператор (2.4) в виде

$$L[u(x)]=L_0[u(x)]+L_1[u(x)], \tag{4.54}$$

где $L_0[u(x)]$ определяется равенством (2.11) и

$$L_1[u(x)]=\sum_{|k|\leqslant 2r-1}\rho^{\alpha_{|k|}}(x)b_k(x)u^{(k)}(x). \tag{4.55}$$

Так как коэффициенты $b_k(x)$ ограничены и $\alpha_j\geqslant\alpha-2r+j$ для всех $j\leqslant 2r-1$, тогда

$$\begin{aligned}\left(\int\limits_\Omega|L_1[v(x)]|^2\,dx\right)^{\frac12}&=\|L_1[v];L_2(\Omega)\|\leqslant\sum_{|k|=j\leqslant 2r-1}\left\|\rho^{\alpha_j}b_kv^{(k)};L_2(\Omega)\right\|\\&\leqslant M_1\sum_{j=0}^{2r-1}\left\|v;L^j_{2,\alpha_j}(\Omega)\right\|\leqslant M_2\sum_{j=0}^{2r-1}\left\|v;L^j_{2,\alpha-2r+j}(\Omega)\right\|.\end{aligned} \tag{4.56}$$

Теперь, применяя неравенство (3.30) леммы 3.12, отсюда получаем

$$\left(\int\limits_\Omega|L_1[v(x)]|^2\,dx\right)^{\frac12}\leqslant\mu\|v;L^{2r}_{2;\alpha}(\Omega)\|+C(\mu)\|v;L_{2;\alpha-2r}(\Omega)\|,\quad v\in C_0^\infty(\Omega), \tag{4.57}$$

где μ — достаточно малое положительное число.

Далее, используя неравенства (4.53), (4.57), имеем

$$\left(\int\limits_{\Omega} |L[v(x)]|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} = \|L[v];L_2(\Omega)\| \geqslant \|L_0[v];L_2(\Omega)\| - \|L_1[v];L_2(\Omega)\|$$
$$\geqslant (c-\mu)\left\|v;L^{2r}_{2,\alpha}(\Omega)\right\| - C(\mu)\,\|v;L_{2;\alpha-2r}(\Omega)\|\,.$$

Фиксируя в этом неравенстве некоторое подходящее значение параметра μ, получим неравенство (2.9), что и завершает доказательство теоремы 2.1 в общем случае.

5. Доказательство теоремы 2.2

Рассмотрим оператор (2.11), который удовлетворяет условиям теоремы 2.2. Пусть y — произвольная фиксированная точка области Ω. Рассмотрим оператор (4.1) с замороженными в точке y коэффициентами. Так как коэффициенты этого оператора постоянны, в силу условия (2.10) (см., например, [4, стр.72–73]), имеем

$$\mathrm{Re}(L_{0,y}[u],u)_0 = \mathrm{Re}\int\limits_{\mathbb{R}^n} L_{0,y}[u(x)]\cdot\overline{u(x)}dx \geqslant 0, \quad u(x)\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{5.1}$$

Рассмотрим произвольную функцию $u(x)\in C^\infty(B_m(0))$. Так как $v_m(x)=\varphi_m(x)u(x)\in C_0^\infty(B_m(0))$, используя (5.1) для функции $v_m(x)$, получим

$$\mathrm{Re}(L_{0,y}[v_m],v_m)_0 = \sum_{|k|=2r}\mathrm{Re}\int\limits_{\mathbb{R}^n} b_k(y)v_m^{(k)}(x)\overline{v_m(x)}dx \geqslant 0. \tag{5.2}$$

Представляя выражение $L_{0,y}v_m(x)$ в виде (4.4), получаем равенство

$$(L_{0,y}[v_m],v_m)_0 = (L_y^{(1)}[v_m],v_m)_0 + (L_y^{(2)}[v_m],v_m)_0, \tag{5.3}$$

где $L_y^{(2)}[v_m]$, $L_y^{(1)}[v_m]$ определяются равенствами (4.5), (4.6), соответственно.

Так как $\varphi_m\in C_0^\infty(B_m(0))$ и $\varphi_m(x)=1$ для всех $x\in B_{m+1}(0)$, тогда

$$\begin{aligned}(L_y^{(1)}[v_m],v_m)_0 &= \int\limits_{B_m(0)} L_y^{(1)}[v_m](x)\overline{v_m(x)}dx = \int\limits_{B_{m+1}(0)} L_{0,y}[u](x)\overline{u(x)}dx\\ &+ \int\limits_{B^{(m)}(0)} \varphi_m^2(x)L_{0,y}[u](x)\overline{u(x)}dx,\end{aligned} \tag{5.4}$$

где $B^{(m)}(0)$ определяется равенством (4.8).

Учитывая ограниченность коэффициентов $b_k(x)$, имеем

$$\begin{aligned}\left|\int\limits_{B^{(m)}(0)} \varphi_m^2(x)L_{0,y}[u(x)]\overline{u(x)}dx\right| &\leqslant M_0\left(\sum_{|k|=2r}\int\limits_{B^{(m)}(0)} \left|u^{(k)}(x)\right|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int\limits_{B^{(m)}(0)} |u(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\\ &= M_0\left\|u;L_2^{2r}(B^{(m)}(0))\right\|\left\|u;L_2(B^{(m)}(0))\right\|.\end{aligned} \tag{5.5}$$

Далее заметим, что существует некоторое натуральное число m^* такое, что для всех $m \geqslant m^*$ имеет место неравенство (4.14). Используя это неравенство, получим

$$\begin{aligned}\left|\int\limits_{B_m(0)} L_y^{(2)}[v_m(x)]\overline{v_m(x)}dx\right| &\leqslant \left\|L_y^{(2)}[v_m]; L_2(B_m(0))\right\| \|u; L_2(B_m(0))\| \\ &\leqslant \frac{1}{m}\left\|u; L_2^{2r}(B_m(0))\right\| \|u; L_2(B_m(0))\| \\ &\quad + K_2(m)\|u; L_2(B_m(0))\| \|u; L_2(B_m(0))\| .\end{aligned} \tag{5.6}$$

Теперь, используя полученные выше соотношения (5.2)–(5.6), имеем

$$\begin{aligned}0 \leqslant \operatorname{Re}(L_{0,y}[v_m], v_m)_0 &= \operatorname{Re}(L_y^{(1)}[v_m], v_m)_0 + \operatorname{Re}(L_y^{(2)}[v_m], v_m)_0 \\ &= \operatorname{Re}\int\limits_{B_{m+1}(0)} L_{0,y}[u(x)]\overline{u(x)}dx \\ &\quad + \operatorname{Re}\int\limits_{B^{(m)}(0)} \varphi_m^2(x)L_{0,y}[u(x)]\overline{u(x)}dx + \operatorname{Re}(L_y^{(2)}[v_m], v_m)_0 \\ &\leqslant \operatorname{Re}\int\limits_{B_{m+1}(0)} L_{0,y}[u(x)]\overline{u(x)}dx \\ &\quad + M_0\left\|u; L_2^{2r}(B^{(m)}(0))\right\| \left\|u; L_2(B^{(m)}(0))\right\| \\ &\quad + \frac{1}{m}\left\|u; L_2^{2r}(B_m(0))\right\| \|u; L_2(B_m(0))\| \\ &\quad + K_2(m)\|u; L_2(B_m(0))\|^2 .\end{aligned} \tag{5.7}$$

Также как при доказательстве теоремы 2.1 рассмотрим отображение $z \to x$, определенное с помощью равенства (см. (4.17)) $x = (z-y)m\varkappa\rho(y)$, где y — любая фиксированная точка из области Ω. Это отображение переводит множества (см. (2.7), (3.1), (3.6)) $J_{1,m}(y)$, $J_{2,m}(y)$, $J^{(m)}(y)$ соответственно в следующие множества $B_m(0)$, $B_{m+1}(0)$, $B^{(m)}(0)$.

Берём произвольную функцию v из класса $C_0^\infty(\Omega)$. Функция $\widehat{v}_y(x) = v\left(\frac{x\rho(y)}{m\varkappa} + y\right)$ определена для всех точек $x \in B_m(0)$, и для функции $u(x) = \widehat{v}_y(x)$ выполняются равенства (4.18), (4.19). Учитывая эти равенства из (5.7), для функции $u(x) = \widehat{v}_y(x)$ получаем некоторое неравенство, которое после умножения на $\rho^\alpha(y)$, примет вид

$$\begin{aligned}&\operatorname{Re}(m\varkappa)^{-2r}\rho^{2r+\alpha}(y)\int\limits_{B_{m+1}(0)} L_{0,y}\left[\widehat{v}_y(x)\right]\cdot\overline{\widehat{v}_y(x)}dx \\ &\geqslant - M_0(m\varkappa)^{-2r}\rho^{2r+\alpha}(y)\left(\sum_{|k|=2r}\int\limits_{B^{(m)}(0)} \left|\widehat{v}_y^{(k)}(x)\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int\limits_{B^{(m)}(0)} |\widehat{v}_y(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad - \frac{1}{m}(m\varkappa)^{-2r}\rho^{2r+\alpha}(y)\left(\sum_{|k|=2r}\int\limits_{B_m(0)} \left|\widehat{v}_y^{(k)}(x)\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int\limits_{B_m(0)} |\widehat{v}_y(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad - K_2(m)\rho^\alpha(y)\int\limits_{B_m(0)} |\widehat{v}_y(x)|^2 dx.\end{aligned} \tag{5.8}$$

Далее в интегралах этого неравенства выполним замену переменных интегрирования с помощью равенства $z = y + x\rho(y)(m\varkappa)^{-1}$ и заметим, что интегралы меняются согласно равенствам (4.21) – (4.25). Теперь, используя эти равенства из (5.8), получим некоторое неравенство, которое после умножения на $(m\varkappa)^{2r-n}\,\rho^{-2r}(y)$, примет следующий вид

$$\begin{aligned}
&\rho^{\alpha-n}(y)\,\mathrm{Re}\int\limits_{J_{2,m}(y)} L_{0,y}\left[v(z)\right]\cdot\overline{v(z)}dz\\
&\geqslant -M_0\left(\rho^{2\alpha-n}(y)\sum_{|k|=2r}\int\limits_{J^{(m)}(y)}\left|v^{(k)}(z)\right|^2dz\right)^{\frac12}\left(\rho^{-n}(y)\int\limits_{J^{(m)}(y)}|v(z)|^2dz\right)^{\frac12}\\
&-\frac{1}{m}\left(\rho^{2\alpha-n}(y)\sum_{|k|=2r}\int\limits_{J_{1,m}(y)}\left|v^{(k)}(z)\right|^2dz\right)^{\frac12}\left(\rho^{-n}(y)\int\limits_{J_{1,m}(y)}|v(z)|^2dz\right)^{\frac12}\\
&-K_2(m)\rho^{-2r+\alpha-n}(y)\int\limits_{J_{1,m}(y)}|v(z)|^2dz.
\end{aligned}$$

Теперь интегрируем это неравенство по $y\in\Omega$ и для оценки правой части применяем неравенство Коши — Буняковского в виде

$$-\int\limits_{\Omega}\{\mathbb{U}(y)\}^{\frac12}\,(\mathbb{V}(y))^{\frac12}\,dy \geqslant -\left(\int\limits_{\Omega}\mathbb{U}(y)dy\right)^{\frac12}\cdot\left(\int\limits_{\Omega}\mathbb{V}(y)dy\right)^{\frac12}$$

и в результате приходим к неравенству

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Re}\int\limits_{\Omega}\rho^{\alpha-n}(y)\left(\int\limits_{J_{2,m}(y)} L_{0,y}\left[v(z)\right]\cdot\overline{v(z)}dz\right)dy\\
&\geqslant -M_0\left\{\sum_{|k|=2r}\int\limits_{\Omega}\rho^{2\alpha-n}(y)\left(\int\limits_{J^{(m)}(y)}\left|v^{(k)}(z)\right|^2dz\right)dy\right\}^{\frac12}\\
&\cdot\left\{\int\limits_{\Omega}\rho^{-n}(y)\left(\int\limits_{J^{(m)}(y)}|v(z)|^2dz\right)dy\right\}^{\frac12}\\
&-\frac{1}{m}\left\{\sum_{|k|=2r}\int\limits_{\Omega}\rho^{2\alpha-n}(y)\left(\int\limits_{J_{1,m}(y)}\left|v^{(k)}(z)\right|^2dz\right)dy\right\}^{\frac12}\\
&\cdot\left\{\int\limits_{\Omega}\rho^{-n}(y)\left(\int\limits_{J_{1,m}(y)}|v(z)|^2dz\right)dy\right\}^{\frac12}\\
&-K_2(m)\int\limits_{\Omega}\rho^{-2r+\alpha-n}(y)\left(\int\limits_{J_{1,m}(y)}|v(z)|^2dz\right)dy.
\end{aligned}\tag{5.9}$$

Переходим к оценке интегралов этого неравенства. Отметим, что для первого интеграла в правой части (5.9) имеет место неравенство (4.29). Аналогично этому неравенству с помощью леммы 3.8 доказывается, что

$$\int\limits_{\Omega} \rho^{-n}(y)\Bigg(\int\limits_{J^{(m)}(y)} |v(z)|^2\, dz\Bigg) dy \leqslant \frac{1}{m^{2n}} M_2(m,0)\, \|v; L_2(\Omega)\|^2\,, \tag{5.10}$$

где $M_2(m,0) = 2^n \sigma_1(m)$.

Для оценки оставшихся интегралов в правой части (5.9) применим лемму 3.9. В результате получим следующие неравенства

$$\sum_{|k|=2r} \int\limits_{\Omega} \rho^{2\alpha-n}(y)\Bigg(\int\limits_{J_{1,m}(y)} \left|v^{(k)}(z)\right|^2 dz\Bigg) dy \leqslant \frac{1}{m^{2n}} M_3(\alpha)\, \left\|v; L^{2r}_{2,\alpha}(\Omega)\right\|^2, \tag{5.11}$$

$$\int\limits_{\Omega} \rho^{-n}(y)\Bigg(\int\limits_{J_{1,m}(y)} |v(z)|^2 dz\Bigg) dy \leqslant \frac{1}{m^{2n}} M_3(0)\, \|v; L_2(\Omega)\|^2\,, \tag{5.12}$$

$$\int\limits_{\Omega} \rho^{-2r+\alpha-n}(y)\Bigg(\int\limits_{J_{1,m}(y)} |v(z)|^2 dz\Bigg) dy \leqslant \frac{1}{m^{2n}} M_3(\alpha-2r)\, \|f; L_{2,\alpha-2r}(\Omega)\|^2\,, \tag{5.13}$$

где постоянные $M_3(\alpha)$, $M_3(0)$, $M_3(\alpha-2r)$ определяются с помощью (4.32).

Теперь, применяя неравенства (4.39), (5.10)–(5.13), из (5.9) получим

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} \int\limits_{\Omega} \rho^{\alpha-n}(y)\Bigg(\int\limits_{J_{2,m}(y)} L_{0,y}\left[v(z)\right] \cdot \overline{v(z)} dz\Bigg) dy \\
\geqslant -\frac{1}{m^{2n}} M_0 \sqrt{M_2(m,\alpha) M_2(m,0)}\, \left\|v; L^{2r}_{2,\alpha}(\Omega)\right\| \|v; L_2(\Omega)\| \\
- \frac{1}{m} \frac{1}{m^{2n}} \sqrt{M_3(\alpha) M_3(0)}\, \left\|v; L^{2r}_{2,\alpha}(\Omega)\right\| \|v; L_2(\Omega)\| \\
- \frac{1}{m^{2n}} K_2(m) M_3(\alpha-2r)\, \|f; L_{2,\alpha-2r}(\Omega)\|^2\,.
\end{aligned}$$

Далее вводя обозначения

$$M_6(m,\alpha) = M_0 \sqrt{M_2(m,\alpha) M_2(m,0)} + \frac{1}{m} \sqrt{M_3(\alpha) M_3(0)}, \tag{5.14}$$

$$M_7(m,\alpha) = K_2(m) M_3(\alpha-2r), \tag{5.15}$$

приходим к неравенству

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} \int\limits_{\Omega} \rho^{\alpha-n}(y)\Bigg(\int\limits_{J_{2,m}(y)} L_{0,y}\left[v(z)\right] \cdot \overline{v(z)} dz\Bigg) dy \\
\geqslant -\frac{1}{m^{2n}} M_6(m,\alpha)\, \left\|v; L^{2r}_{2,\alpha}(\Omega)\right\| \|v; L_2(\Omega)\| \\
- \frac{1}{m^{2n}} M_7(m,\alpha)\, \|v; L_{2,\alpha-2r}(\Omega)\|^2\,.
\end{aligned} \tag{5.16}$$

Из (3.24), (4.32), (5.14) следует, что

$$
\begin{aligned}
M_6(m,\alpha) &= M_0\sqrt{2^n 4^{|\alpha|}\sigma_1(m)2^n\sigma_1(m)} + \frac{1}{m}\sqrt{\omega_n\varkappa^{-n}4^{|\alpha|}2^n\omega_n\varkappa^{-n}2^n} \\
&= M_0 2^n 2^{|\alpha|}\sigma_1(m) + \frac{1}{m}\omega_n\varkappa^{-n}2^{|\alpha|}2^n = 2^{|\alpha|+n}\left[M_0\sigma_1(m) + \frac{1}{m}\omega_n\varkappa^{-n}\right],
\end{aligned} \tag{5.17}
$$

Так как (см. (3.9)) $\lim\limits_{m\to\infty}\sigma_1(m) = 0$, отсюда следует, что

$$
\lim_{m\to\infty} M_6(m,\alpha) = 0. \tag{5.18}
$$

Далее, используя равенство

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Re}\int\limits_{\Omega}\Bigg(\int\limits_{J_{2,m}(y)}\rho^{-n}(z)L_0\left[v(z)\right]\cdot\overline{v(z)}dz\Bigg)dy = {} & \operatorname{Re}\int\limits_{\Omega}\rho^{\alpha-n}(y)\Bigg(\int\limits_{J_{2,m}(y)}L_{0,y}\left[v(z)\right]\cdot\overline{v(z)}dz\Bigg)dy \\
& + \operatorname{Re}\int\limits_{\Omega}\Bigg(\int\limits_{J_{2,m}(y)}\rho^{-n}(z)L_0\left[v(z)\right]\cdot\overline{v(z)}dz\Bigg)dy \\
& - \operatorname{Re}\int\limits_{\Omega}\rho^{\alpha-n}(y)\Bigg(\int\limits_{J_{2,m}(y)}L_{0,y}\left[v(z)\right]\cdot\overline{v(z)}dz\Bigg)dy,
\end{aligned}
$$

получаем

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Re}\int\limits_{\Omega}\Bigg(\int\limits_{J_{2,m}(y)}&\rho^{-n}(z)L_0\left[v(z)\right]\cdot\overline{v(z)}dz\Bigg)dy \\
&\geqslant -\frac{1}{m^{2n}}M_6(m,\alpha)\left\|v;L^{2r}_{2,\alpha}(\Omega)\right\|\left\|v;L_2(\Omega)\right\| \\
&\quad -\frac{1}{m^{2n}}M_7(m,\alpha)\left\|v;L_{2,\alpha-2r}(\Omega)\right\|^2 - \mathcal{M}_m[v],
\end{aligned} \tag{5.19}
$$

где

$$
\mathcal{M}_m[v] = \left|\int\limits_{\Omega}\Bigg(\int\limits_{J_{2,m}(y)}\rho^{-n}(z)L_0\left[v(z)\right]\cdot\overline{v(z)}dz\Bigg)dy - \int\limits_{\Omega}\rho^{\alpha-n}(y)\Bigg(\int\limits_{J_{2,m}(y)}L_{0,y}\left[v(z)\right]\cdot\overline{v(z)}dz\Bigg)dy\right|.
$$

Вводим следующие вспомогательные функционалы

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}^{(1)}_m[v] = \Bigg|&\int\limits_{\Omega}\Bigg(\int\limits_{J_{2,m}(y)}\rho^{-n}(z)L_0\left[v(z)\right]\cdot\overline{v(z)}dz\Bigg)dy \\
&-\int\limits_{\Omega}\Bigg(\int\limits_{J_{2,m}(y)}\rho^{\alpha-n}(z)L_{0,y}\left[v(z)\right]\cdot\overline{v(z)}dz\Bigg)dy\Bigg|,
\end{aligned} \tag{5.20}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}^{(2)}_m[v] = \Bigg|&\int\limits_{\Omega}\Bigg(\int\limits_{J_{2,m}(y)}\rho^{\alpha-n}(z)L_{0,y}\left[v(z)\right]\cdot\overline{v(z)}dz\Bigg)dy \\
&-\int\limits_{\Omega}\rho^{\alpha-n}(y)\Bigg(\int\limits_{J_{2,m}(y)}L_{0,y}\left[v(z)\right]\cdot\overline{v(z)}dz\Bigg)dy\Bigg|,
\end{aligned} \tag{5.21}
$$

и отметим, что

$$\mathcal{M}_m[v] \leqslant \mathcal{M}_m^{(1)}[v] + \mathcal{M}_m^{(2)}[v], \quad v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{5.22}$$

Используя условие II) теоремы 2.1, и применяя лемму 3.2, для функционала (5.20) получим

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_m^{(1)}[v] &= \left| \sum_{|k|=2r} \int\limits_\Omega \rho^{\alpha-n}(z) \left(\int\limits_{J_{2,m}(y)} (b_k(z) - b_k(y))dy \right) v^{(k)}(z)\overline{v(z)}dz \right| \\
&\leqslant \sum_{|k|=2r} \int\limits_\Omega \rho^{\alpha-n}(z) \left(\int\limits_\Omega \chi_{2,m}(z,y)|b_k(z) - b_k(y)|dy \right) \left|v^{(k)}(z)\right| |v(z)|dz \\
&\leqslant \nu \sum_{|k|=2r} \int\limits_\Omega \rho^{\alpha-n}(z) \left(\int\limits_\Omega \chi_{2,m}(z,y)dy \right) \left|v^{(k)}(z)\right| |v(z)|dz \\
&\leqslant \nu \varkappa^{-n}\omega_n \left(\frac{m}{m+1}\right)^n \frac{1}{(m^2-1)^n} \sum_{|k|=2r} \int\limits_\Omega \rho^\alpha(z) \left|v^{(k)}(z)\right| |v(z)|dz \\
&\leqslant \nu \varkappa^{-n}\omega_n \frac{1}{m^{2n}} \left\|v; L_{2,\alpha}^{2r}(\Omega)\right\| \cdot \|v; L_2(\Omega)\|.
\end{aligned}$$

Таким образом, доказано неравенство

$$\mathcal{M}_m^{(1)}[v] \leqslant \nu \frac{M_1}{m^{2n}} \left\|v; L_{2,\alpha}^{2r}(\Omega)\right\| \cdot \|v; L_2(\Omega)\|, \qquad M_1 = \varkappa^{-n}\omega_n. \tag{5.23}$$

Переходим к оценке функционала (5.21). Учитывая ограниченность коэффициентов $b_k(z)$, и применяя леммы 3.2, 3.6, получаем

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_m^{(2)}[v] &= \left| \int\limits_\Omega \left(\int\limits_{J_{2,m}(y)} \left(\rho^{\alpha-n}(z) - \rho^{\alpha-n}(y)\right) L_{0,y}\left[v(z)\right] \cdot \overline{v(z)}dz \right) dy \right| \\
&\leqslant \sum_{|k|=2r} \int\limits_\Omega \left(\int\limits_\Omega \chi_{2,m}(z,y) \left|\rho^{\alpha-n}(z) - \rho^{\alpha-n}(y)\right| |b_k(y)|dy \right) |v^{(k)}(z)||v(z)|dz \\
&\leqslant \frac{1}{m^2} N_1(m, \alpha-n) M_0 \sum_{|k|=2r} \int\limits_\Omega \left(\int\limits_\Omega \chi_{2,m}(z,y)dy \right) \rho^{\alpha-n}(z)|v^{(k)}(z)||v(z)|dz \\
&\leqslant \frac{1}{m^2} N_1(m, \alpha-n) M_0 \varkappa^{-n}\omega_n \left(\frac{m}{m+1}\right)^n \frac{1}{(m^2-1)^n} \sum_{|k|=2r} \int\limits_\Omega \rho^\alpha(z)|v^{(k)}(z)||v(z)|dz \\
&\leqslant \frac{1}{m^{2n+2}} N_1(m, \alpha-n) M_0 \varkappa^{-n}\omega_n \left\|v; L_{2,\alpha}^{2r}(\Omega)\right\| \cdot \|v; L_2(\Omega)\|.
\end{aligned}$$

Так как

$$N_1(m, \alpha-n) \leqslant n(|\alpha|+n) \left(1 + \frac{1}{m^2}\right)^{2|\alpha|+2n+1} \leqslant n(|\alpha|+n)4^{|\alpha|+n+1},$$

из полученного выше неравенства следует

$$\mathcal{M}_m^{(2)}[v] \leqslant \frac{1}{m^{2n+2}} M_7^*(\alpha) \left\|v; L_{2,\alpha}^{2r}(\Omega)\right\| \cdot \|v; L_2(\Omega)\|, \tag{5.24}$$

где

$$M_7^*(\alpha) = M_0 \varkappa^{-n}\omega_n n(|\alpha|+n)4^{|\alpha|+n+1}. \tag{5.25}$$

В силу неравенств (5.23) и (5.24) из (5.22) получим

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}_m[v] &\leqslant \mathcal{M}_m^{(1)}[v] + \mathcal{M}_m^{(2)}[v] \\
&\leqslant \nu \frac{M_1}{m^{2n}} \left\| v; L^{2r}_{2,\alpha}(\Omega) \right\| \cdot \| v; L_2(\Omega) \| + \frac{1}{m^{2n+2}} M_7(\alpha) \left\| v; L^{2r}_{2,\alpha}(\Omega) \right\| \cdot \| v; L_2(\Omega) \| \\
&\leqslant \frac{1}{m^{2n}} \left[\nu \varkappa^{-n} \omega_n + \frac{1}{m^2} M_7^*(\alpha) \right] \left\| v; L^{2r}_{2,\alpha}(\Omega) \right\| \cdot \| v; L_2(\Omega) \|, \qquad v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).
\end{aligned}
$$

Далее, применяя это неравенство, из (5.19) имеем

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{Re} \int\limits_\Omega \Bigg(\int\limits_{J_{2,m}(y)} \rho^{-n}(z) L_0 \left[v(z) \right] \cdot \overline{v(z)} dz \Bigg) dy \\
&\geqslant - \frac{1}{m^{2n}} M_6(m, \alpha) \left\| v; L^{2r}_{2,\alpha}(\Omega) \right\| \| v; L_2(\Omega) \| \\
&\quad - \frac{1}{m^{2n}} M_7(m, \alpha) \| v; L_{2,\alpha-2r}(\Omega) \|^2 \\
&\quad - \frac{1}{m^{2n}} \left[\nu M_1 + \frac{1}{m^2} M_7^*(\alpha) \right] \left\| v; L^{2r}_{2,\alpha}(\Omega) \right\| \cdot \| v; L_2(\Omega) \|.
\end{aligned}
\tag{5.26}
$$

Теперь, применяя лемму 3.10, для функции $\Phi(z) = \operatorname{Re} L_0 \left[v(z) \right] \cdot \overline{v(z)}$, получим

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{Re} \int\limits_\Omega \Bigg(\int\limits_{J_{2,m}(y)} \rho^{-n}(z) L_0 \left[v(z) \right] \cdot \overline{v(z)} dz \Bigg) dy \\
\leqslant& \varkappa^{-n} \omega_n \left(\frac{m}{m+1} \right)^n \frac{1}{(m^2-1)^n} \operatorname{Re} \int\limits_\Omega L_0 \left[v(z) \right] \cdot \overline{v(z)} dz \\
&+ \varkappa^{-n} \omega_n \left[\frac{1}{(m^2-1)^n} - \frac{1}{(m^2+1)^n} \right] \int\limits_\Omega \left| L_0 \left[v(z) \right] \right| |v(z)| dz.
\end{aligned}
$$

Так как

$$
\int\limits_\Omega \left| L_0 \left[v(z) \right] \right| |v(z)| dz \leqslant M_2 \sum_{|k|=2r} \int\limits_\Omega \rho^\alpha(z) \left| v^{(k)}(z) \right| |v(z)| dz \leqslant M_2 \left\| v; L^{2r}_{2,\alpha}(\Omega) \right\| \| v; L_2(\Omega) \|,
$$

отсюда следует, что

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{Re} \int\limits_\Omega \Bigg(\int\limits_{J_{2,m}(y)} \rho^{-n}(z) L_0 \left[v(z) \right] \cdot \overline{v(z)} dz \Bigg) dy \\
\leqslant& \varkappa^{-n} \omega_n \left(\frac{m}{m+1} \right)^n \frac{1}{(m^2-1)^n} \operatorname{Re} \int\limits_\Omega L_0 \left[v(z) \right] \cdot \overline{v(z)} dz \\
&+ \varkappa^{-n} \omega_n \left[\frac{1}{(m^2-1)^n} - \frac{1}{(m^2+1)^n} \right] M_2 \left\| v; L^{2r}_{2,\alpha}(\Omega) \right\| \| v; L_2(\Omega) \|.
\end{aligned}
$$

Применяя это неравенство, из (5.26), после несложных преобразований, получим

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\int\limits_{\Omega} L_0\left[v(z)\right]\cdot\overline{v(z)}dz \geqslant &- M_8^*(m,\alpha)\left\|v; L^{2r}_{2,\alpha}(\Omega)\right\|\left\|v; L_2(\Omega)\right\| \\ &- M_9^*(m,\alpha,\nu)\left\|v; L_{2,\alpha-2r}(\Omega)\right\|\left\|v; L_2(\Omega)\right\| \\ &- M_{10}^*(m,\alpha)\left\|v; L_{2,\alpha-2r}(\Omega)\right\|^2,\end{aligned} \tag{5.27}$$

где

$$M_8^*(m,\alpha) = \varkappa^n\omega_n^{-1}\left(\frac{m+1}{m}\right)^n(m^2-1)^n\frac{1}{m^{2n}}M_6(m,\alpha), \tag{5.28}$$

$$\begin{aligned}M_9^*(m,\alpha,\nu) =& \varkappa^n\omega_n^{-1}\left(\frac{m+1}{m}\right)^n(m^2-1)^n\frac{1}{m^{2n}} \\ &\cdot\left[\nu M_1 + \frac{1}{m^2}M_7^*(\alpha) + \frac{\omega_n}{\varkappa^n}\left(\frac{m^{2n}}{(m^2-1)^n} - \frac{m^{2n}}{(m^2+1)^n}\right)\right],\end{aligned} \tag{5.29}$$

$$M_{10}^*(m,\alpha) = \varkappa^n\omega_n^{-1}\left(\frac{m+1}{m}\right)^n(m^2-1)^n\frac{1}{m^{2n}}M_7(m,\alpha). \tag{5.30}$$

Далее сверху оценим $M_8^*(m,\alpha)$, $M_9^*(m,\alpha,\nu)$, $M_{10}^*(m,\alpha)$. Из (5.28) имеем

$$\begin{aligned}M_8^*(m,\alpha) &= \varkappa^n\omega_n^{-1}\left(\frac{m+1}{m}\right)^n(m^2-1)^n\frac{1}{m^{2n}}M_6(m,\alpha) \\ &\leqslant \varkappa^n\omega_n^{-1}2^n\left(\frac{m^2-1}{m^2}\right)^n M_6(m,\alpha) \leqslant \varkappa^n\omega_n^{-1}2^n M_6(m,\alpha).\end{aligned}$$

Таким образом, мы доказали, что

$$M_8^*(m,\alpha) \leqslant M_8(m,\alpha), \quad \text{где} \quad M_8(m,\alpha) = \varkappa^n\omega_n^{-1}2^n M_6(m,\alpha). \tag{5.31}$$

Отметим, что (см. (5.18)) $M_6(m,\alpha) \to 0+$ при $m \to +\infty$ и поэтому

$$\lim_{m\to+\infty} M_8(m,\alpha) = 0+. \tag{5.32}$$

Далее, используя (5.29), имеем

$$\begin{aligned}M_9^*(m,\alpha,\nu) =& \varkappa^n\omega_n^{-1}\left(\frac{m+1}{m}\right)^n\left(\frac{m^2-1}{m^2}\right)^n \\ &\cdot\left[\nu M_1 + \frac{1}{m^2}M_7(\alpha) + \frac{\omega_n}{\varkappa^n}\left(\frac{m^{2n}}{(m^2-1)^n} - \frac{m^{2n}}{(m^2+1)^n}\right)\right] \\ \leqslant& \varkappa^n\omega_n^{-1}2^n\left[\nu M_1 + \frac{1}{m^2}M_7^*(\alpha) + \frac{\omega_n}{\varkappa^n}\left(\left(\frac{m^2}{m^2-1}\right)^n - \left(\frac{m^2}{m^2+1}\right)^n\right)\right].\end{aligned}$$

Следовательно,

$$M_9^*(m,\alpha,\nu) \leqslant M_9(m,\alpha,\nu), \tag{5.33}$$

где

$$M_9(m,\alpha,\nu) = \varkappa^n\omega_n^{-1}2^n\left[\nu M_1 + \frac{1}{m^2}M_7^*(\alpha) + \frac{\omega_n}{\varkappa^n}\left(\left(\frac{m^2}{m^2-1}\right)^n - \left(\frac{m^2}{m^2+1}\right)^n\right)\right]. \tag{5.34}$$

Отметим, что

$$\lim_{m\to+\infty}\lim_{\nu\to+0} M_9(m,\alpha,\nu) = 0. \tag{5.35}$$

Переходим к оценке $M_{10}^*(m,\alpha)$. Из (5.30) следует

$$M_{10}^*(m,\alpha) \leqslant \varkappa^n\omega_n^{-1}2^n\left(\frac{m^2-1}{m^2}\right)^n M_7(m,\alpha) \leqslant \varkappa^n\omega_n^{-1}2^n M_7(m,\alpha).$$

Учитывая это, и используя (4.15), (4.32), (5.15), получим

$$M_{10}^*(m,\alpha) \leqslant M_{10}(m,\alpha), \tag{5.36}$$

где

$$M_{10}(m,\alpha) = \varkappa^n\omega_n^{-1}2^n M_7(m,\alpha) = \varkappa^n\omega_n^{-1}2^n C_{15} m^{16r^2+2r-1} M_3(\alpha-2r). \tag{5.37}$$

Следовательно, $\lim\limits_{m\to+\infty} M_{10}(m,\alpha) = +\infty$.

С учётом (5.31), (5.33), (5.36) из (5.27) следует

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\int\limits_\Omega L_0\left[v(z)\right]\cdot\overline{v(z)}dz \geqslant &-M_8(m,\alpha)\left\|v;L_{2,\alpha}^{2r}(\Omega)\right\|\|v;L_2(\Omega)\| \\ &- M_9(m,\alpha,\nu)\|v;L_{2,\alpha-2r}(\Omega)\|\|v;L_2(\Omega)\| \\ &- M_{10}(m,\alpha)\|v;L_{2,\alpha-2r}(\Omega)\|^2,\end{aligned} \tag{5.38}$$

где числа $M_8(m,\alpha)$, $M_9(m,\alpha,\nu)$, $M_{10}(m,\alpha)$ определяются равенствами (5.31), (5.34), (5.37), соответственно.

Равенства (5.32), (5.35) позволяют нам сделать коэффициенты $M_8(m,\alpha)$, $M_9(m,\alpha,\nu)$ сколь угодно малыми. Поэтому, подбирая подходящие значения параметров m и ν, из (5.38) получим неравенство (2.12) теоремы 2.2.

Теорема 2.2 доказана.

6. Эллиптические операторы с сильным вырождением

В этом разделе приводим доказательство теорем 2.3, 2.4. Сначала докажем теорему 2.3 для операторов только со старшими коэффициентами, то есть рассмотрим оператор (2.11).

Предполагается, что коэффициенты этого оператора удовлетворяют условиям теоремы 2.3. Так как в этом случае выполняются условия теорем 2.1 и 2.2, согласно этим теоремам имеют место неравенства (2.9), (2.12).

В условиях теоремы 2.3 оператор (2.11) имеет сильное вырождение, то есть выполняется неравенство $\alpha-2r\geqslant 0$. Следовательно, $\rho^{\alpha-2r}(x)\leqslant \text{const}$, $x\in\Omega$ и поэтому

$$\|v;L_{2,\alpha-2r}(\Omega)\|^2 = \int\limits_\Omega \left(\rho^{\alpha-2r}(x)|v(x)|\right)^2dx \leqslant \text{const}\,\|v;L_2(\Omega)\|^2. \tag{6.1}$$

С учётом этого неравенства из (2.9), (2.12) имеем

$$\begin{gathered} c\left\|v;L_{2,\alpha}^{2r}(\Omega)\right\|^2 \leqslant \|L_0[v(z)];L_2(\Omega)\|^2 + K\|v;L_2(\Omega)\|^2, \\ \operatorname{Re}\left(L_0[v],v\right)_0 \geqslant -\varepsilon\left\|v;L_{2,\alpha}^{2r}(\Omega)\right\|\|v;L_2(\Omega)\| - \delta\|v;L_2(\Omega)\|^2 - K_1(\varepsilon,\delta)\|v;L_2(\Omega)\|^2,\end{gathered} \tag{6.2}$$

для всех $v\in C_0^\infty(\Omega)$. Из последнего неравенства при $\delta=\varepsilon$ получим

$$\operatorname{Re}\left(L_0[v],v\right)_0 \geqslant -\varepsilon\left\|v;L_{2,\alpha}^{2r}(\Omega)\right\|\|v;L_2(\Omega)\| - K_1(\varepsilon)\|v;L_2(\Omega)\|^2, \tag{6.3}$$

где $K_1(\varepsilon) = K_1(\varepsilon,\varepsilon)+\varepsilon$.

Далее будем считать, что λ — неотрицательный параметр. Используя неравенство $2A \cdot B \leqslant A^2 + B^2$, $A \geqslant 0$, $B \geqslant 0$, при $A = \left\| v; L^{2r}_{2,\alpha}(\Omega) \right\|$, $B = \lambda \left\| v; L_2(\Omega) \right\|$ имеем

$$2\lambda \left\| v; L^{2r}_{2,\alpha}(\Omega) \right\| \left\| v; L_2(\Omega) \right\| \leqslant \left\| v; L^{2r}_{2,\alpha}(\Omega) \right\|^2 + \lambda^2 \left\| v; L_2(\Omega) \right\|^2 .$$

В силу этого неравенства из (6.3) следует

$$2\lambda \operatorname{Re} \left(L_0[v], v \right)_0 \geqslant -\varepsilon \left\| v; L^{2r}_{2,\alpha}(\Omega) \right\|^2 - \left(\varepsilon\lambda^2 + 2\lambda K_1(\varepsilon) \right) \left\| v; L_2(\Omega) \right\|^2 . \tag{6.4}$$

Так как $\lambda \geqslant 0$, имеем

$$\begin{aligned} \left\| L_0[v] + \lambda v; L_2(\Omega) \right\|^2 &= \left(L_0[v] + \lambda v, L_0[v] + \lambda v \right)_0 \\ &= \left\| L_0[v]; L_2(\Omega) \right\|^2 + \lambda^2 \left\| v; L_2(\Omega) \right\|^2 + 2\lambda \operatorname{Re} \left(L_0[v], v \right)_0 . \end{aligned}$$

Далее, используя неравенства (6.2), (6.4), имеем

$$\begin{aligned} \left\| L_0[v] + \lambda v; L_2(\Omega) \right\|^2 &= \left\| L_0[v]; L_2(\Omega) \right\|^2 + \lambda^2 \left\| v; L_2(\Omega) \right\|^2 + 2\lambda \operatorname{Re} \left(L_0[v], v \right)_0 \\ &\geqslant (c - \varepsilon) \left\| v; L^{2r}_{2,\alpha}(\Omega) \right\|^2 + \left[\lambda^2 - K - \varepsilon\lambda^2 - 2\lambda K_1(\varepsilon) \right] \left\| v; L_2(\Omega) \right\|^2 . \end{aligned}$$

Фиксируя некоторое значение параметра $\varepsilon > 0$, отсюда получаем

$$\left\| L_0[v] + \lambda v; L_2(\Omega) \right\|^2 \geqslant c_1 \left\| v; L^{2r}_{2,\alpha}(\Omega) \right\|^2 + \Lambda(\lambda) \left\| v; L_2(\Omega) \right\|^2 ,$$

где $c_1 = c - \varepsilon > 0, \Lambda(\lambda) = (1-\varepsilon)\lambda^2 - K - 2\lambda K_1(\varepsilon)$. Следовательно, существует число $\lambda_0 > 0$ такое, что при $\lambda \geqslant \lambda_0$ выполняется неравенство

$$\left\| L_0[v] + \lambda v; L_2(\Omega) \right\|^2 \geqslant c_1 \left\| v; W^{2r}_{2,\alpha}(\Omega) \right\|^2 , \quad v \in C_0^\infty(\Omega).$$

Это и есть основное неравенство теоремы 2.3 для оператора (2.11), то есть теорема 2.3 для оператора (2.11) доказана.

Переходим к доказательству теоремы 2.3 в общем случае. Рассмотрим оператор (2.4), который имеет ненулевые младшие коэффициенты.

Ниже нам понадобится неравенство

$$2A \cdot B \leqslant \frac{1}{q} A^2 + qB^2, \quad A \geqslant 0, \quad B \geqslant 0, \quad q > 0. \tag{6.5}$$

Вводим обозначение $\alpha = \alpha_{2r}$ и представим оператор (2.4) в виде (см. (4.54)) $L[u](x) = L_0[u](x) + L_1[u](x)$, где операторы L_0, L_1 определяются равенствами (2.11), (4.55), соответственно.

Так как все коэффициенты $b_k(x)$ оператора (2.4) ограничены и числа α, α_j, $j \leqslant 2r-1$, удовлетворяют условию $\alpha_j \geqslant \alpha - 2r + j$, применяя неравенство (3.30) леммы 3.12, для оператора (4.55) имеем

$$\begin{aligned} \left(\int\limits_\Omega \left| L_1[v(x)] \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} &\leqslant \sum_{|k| = j \leqslant 2r-1} \left\| \rho^{\alpha_j} b_k v^{(k)}; L_2(\Omega) \right\| \leqslant M_1 \sum_{j=0}^{2r-1} \left\| v; L^j_{2,\alpha_j}(\Omega) \right\| \\ &\leqslant M_2 \sum_{j=0}^{2r-1} \left\| v; L^j_{2,\alpha-2r+j}(\Omega) \right\| \leqslant \mu \| v; L^{2r}_{2;\alpha}(\Omega) \| + K_2(\mu) \| v; L_{2;\alpha-2r}(\Omega) \|, \end{aligned}$$

где μ — достаточно малое положительное число. Отсюда в силу (6.1) следует, что

$$\left\| L_1[v]; L_2(\Omega) \right\| \leqslant \mu \left\| v; L^{2r}_{2,\alpha}(\Omega) \right\| + K_2(\mu) \left\| v; L_2(\Omega) \right\| , \quad v \in C_0^\infty(\Omega). \tag{6.6}$$

Далее вместо выражения $\mu \cdot \mathrm{const}$, $K_2(\mu) \cdot \mathrm{const}$ мы снова будем писать μ, $K_2(\mu)$, соответственно. Используя (6.5), (6.6), имеем

$$
\begin{aligned}
2\lambda \left|\mathrm{Re}\,(L_1[v], v)_0\right| \leqslant & 2\lambda \int\limits_{\Omega} |L_1[v(z)]|\,|v(z)| dz \leqslant 2\lambda \,\|L_1[v]; L_2(\Omega)\| \cdot \|v; L_2(\Omega)\| \\
\leqslant & \frac{\lambda^2}{q} \|v; L_2(\Omega)\|^2 + q\,\|L_1[v]; L_2(\Omega)\|^2 \leqslant q\mu^2 \left\|v; L^{2r}_{2,\alpha}(\Omega)\right\|^2 \\
& + qK_2(\mu)^2 \|v; L_2(\Omega)\|^2 + \frac{\lambda^2}{q} \|v; L_2(\Omega)\|^2 .
\end{aligned} \tag{6.7}
$$

Теперь, учитывая равенство $L = L_0 + L_1$, и применяя неравенства (6.4), (6.7), находим

$$
\begin{aligned}
2\lambda\, \mathrm{Re}\,(L[v], v)_0 &= 2\lambda\, \mathrm{Re}\,(L_0[v], v)_0 + 2\lambda\, \mathrm{Re}\,(L_1[v], v)_0 \\
&\geqslant -\left(\varepsilon + q\mu^2\right) \left\|v; L^{2r}_{2,\alpha}(\Omega)\right\|^2 - \left(qK_2(\mu)^2 + \frac{\lambda^2}{q} + \varepsilon\lambda^2\right) \|v; L_2(\Omega)\|^2 .
\end{aligned}
$$

Так как $\left\|v; L^{2r}_{2,\alpha}(\Omega)\right\| \leqslant \left\|v; W^{2r}_{2,\alpha}(\Omega)\right\|$, отсюда следует, что

$$
2\lambda\, \mathrm{Re}\,(L[v], v)_0 \geqslant -\left(\varepsilon + q\mu^2\right) \left\|v; W^{2r}_{2,\alpha}(\Omega)\right\|^2 - \left(qK_2(\mu)^2 + \frac{\lambda^2}{q} + \varepsilon\lambda^2\right) \|v; L_2(\Omega)\|^2 \tag{6.8}
$$

для всех $v \in C_0^\infty(\Omega)$. Здесь ε, μ — сколь угодно малые положительные числа.

Из неравенства (2.9) теоремы 2.1 в случае сильного вырождения следует

$$
\varkappa_1 \left\|v; W^{2r}_{2,\alpha}(\Omega)\right\|^2 \leqslant \|L[v]; L_2(\Omega)\|^2 + K_4 \|v; L_2(\Omega)\|^2 . \tag{6.9}
$$

Далее заметим, что $\lambda \geqslant 0$ и поэтому

$$
\|\mathbb{L}v + \lambda v; L_2(\Omega)\|^2 = \|L[v]; L_2(\Omega)\|^2 + \lambda^2 \|v; L_2(\Omega)\|^2 + 2\lambda\, \mathrm{Re}\,(L[v], v)_0 .
$$

Отсюда в силу неравенств (6.8), (6.9) следует, что

$$
\begin{aligned}
\|\mathbb{L}v + \lambda v; L_2(\Omega)\|^2 \geqslant & \left(\varkappa_1 - \varepsilon - q\mu^2\right) \left\|v; W^{2r}_{2,\alpha}(\Omega)\right\|^2 \\
& + \left(\lambda^2 - \varepsilon\lambda^2 - \frac{\lambda^2}{q} - qK(\mu)^2 - K_3^2\right) \|v; L_2(\Omega)\|^2 .
\end{aligned} \tag{6.10}
$$

Не ограничивая общности, можно считать, что число $\varkappa_1$ в неравенстве (6.9) такое, что $0 < 2\varkappa_1 < 1$. Тогда при $\varepsilon = \frac{\varkappa_1}{8}$, $\mu = \sqrt{\frac{\varkappa_1}{8}}$, $q = 3$, из неравенства (6.10) находим

$$
\|\mathbb{L}v + \lambda v; L_2(\Omega)\|^2 \geqslant \frac{\varkappa_1}{2} \left\|v; W^{2r}_{2,\alpha}(\Omega)\right\|^2 + \left(\frac{\lambda^2}{2} - M_*\right) \|v; L_2(\Omega)\|^2 ,
$$

где $M_* = 3K(\mu)^2 + K_3^2 > 0$. Таким образом, мы доказали, что в сделанных выше предположениях существуют положительные числа $\varkappa_0$, λ_0 такие, что при $\lambda > \lambda_0$ имеет место неравенство (2.13) теоремы 2.3.

Теорема 2.3 доказана.

Теперь переходим к рассмотрению сопряжённых операторов, т.е. докажем теорему 2.4. Для удобства наших вычислений представим оператор (2.4) в виде

$$
L[u](x) = \sum_{j=0}^{2r} \mathcal{L}_j[u](x), \tag{6.11}
$$

$$\mathcal{L}_j[u](x)=\sum_{|k|=j}\rho^{\alpha|k|}(x)b_k(x)u^{(k)}(x),\quad u\in C_0^\infty(\Omega).$$

Рассмотрим оператор $\mathcal{L}_{2r}[u]$. Оператор, сопряжённый с этим оператором, определяется равенством

$$\int\limits_\Omega \mathcal{L}_{2r}[u](x)\overline{v(x)}dx=\int\limits_\Omega u(x)\overline{\mathcal{L}^*_{2r}[v](x)}dx. \tag{6.12}$$

Применяя интегрирования по частям, находим выражения для сопряжённого оператора

$$\mathcal{L}^*_{2r}[v](x)=\sum_{|k|=2r}\left(\rho^\alpha(x)\overline{b_k(x)}v(x)\right)^{(k)}=\sum_{|k'+k''|=2r}c_{k'k''}\left(\rho^\alpha(x)\overline{b_{k'+k''}(x)}\right)^{(k')}v^{(k'')}(x) \tag{6.13}$$

для всех $v\in C_0^\infty(\Omega)$. Отсюда, обозначая мультииндекс k' через l, а k'' — через k, получим

$$\mathcal{L}^*_{2r}[v](x)=\sum_{|k|\leqslant 2r}\widehat{a}_{2r,k}(x)v^{(k)}(x), \tag{6.14}$$

где

$$\widehat{a}_{2r,k}(x)=\sum_{|l|=2r-|k|}c_{lk}\left(\rho^\alpha(x)\overline{b_{l+k}(x)}\right)^{(l)},\quad |k|\leqslant 2r.$$

Далее имеем

$$\widehat{a}_{2r,k}(x)=\sum_{|l|=2r-|k|}c_{lk}\left(\rho^\alpha(x)\overline{b_{l+k}(x)}\right)^{(l)}=\sum_{|l|=2r-|k|}\sum_{l=l'+l''}c_{lk}c_{l'l''}\left(\rho^\alpha(x)\right)^{(l')}\left(\overline{b_{l+k}(x)}\right)^{(l'')}. \tag{6.15}$$

Отметим, что функция $\rho(x)$ обладает свойством

$$\left|\left(\rho^\alpha(x)\right)^{(l')}\right|\leqslant C\rho^{\alpha-|l'|}(x) \tag{6.16}$$

и коэффициенты оператора (6.11) удовлетворяют условию (2.14). Поэтому

$$\begin{aligned}|\widehat{a}_{2r,k}(x)|&\leqslant\sum_{|l|=2r-|k|}\sum_{l=l'+l''}c_{lk}c_{l'l''}CM_{l''}\rho^{\alpha-|l'|}(x)\rho^{-|l''|}(x)\\&=\sum_{|l|=2r-|k|}\sum_{l=l'+l''}c_{lk}c_{l'l''}CM_{l''}\rho^{\alpha-|l'|-|l''|}(x)\\&\leqslant\sum_{|l|=2r-|k|}C_l\rho^{\alpha-|l|}(x)\leqslant M_k\rho^{\alpha-2r+|k|}(x).\end{aligned}$$

Это неравенство позволяет нам представить оператор (6.14) в виде

$$\mathcal{L}^*_{2r}[v](x)=\sum_{|k|\leqslant 2r}\rho^{\alpha-2r+|k|}(x)a_{2r,k}(x)v^{(k)}(x), \tag{6.17}$$

где все коэффициенты $a_{2r,k}(x)$ ограничены и определяются равенством

$$a_{2r,k}(x)=\frac{\widehat{a}_{2r,k}(x)}{\rho^{\alpha-2r+|k|}(x)}. \tag{6.18}$$

При $|k|=2r$ из (6.15) следует $\widehat{a}_{2r,k}(x)=\rho^\alpha(x)\overline{b_k(x)}$. Отсюда и из (6.18) имеем $a_{2r,k}(x)=\overline{b_k(x)}$, $|k|=2r$. В силу этого равенства условия I) – III) теоремы 2.1 (см. (2.5)–(2.7)) выполняются для коэффициентов $a_{2r,k}(x)$, $|k|=2r$, оператора $\mathcal{L}^*_{2r}$.

Аналогично случаю $\mathcal{L}^*_{2r}$ изучаются операторы $\mathcal{L}_j[u]$, $j \leqslant 2r-1$ и доказывается, что эти операторы допускают представление

$$\mathcal{L}^*_j[v](x) = \sum_{|k|\leqslant j} \rho^{\alpha_j - j + |k|}(x) a_{j,k}(x) v^{(k)}(x), \tag{6.19}$$

где все коэффициенты $a_{j,k}(x)$ ограничены.

Теперь, используя (6.11), (6.17), (6.19), представим сопряжённый оператор $L^*[v]$ в виде

$$L^*[v](x) = \sum_{j=0}^{2r} \mathcal{L}^*_j[v](x) = \sum_{j=0}^{2r} \sum_{|k|\leqslant j} \rho^{\alpha_j - j + |k|}(x) a_{j,k}(x) v^{(k)}(x), \tag{6.20}$$

где все коэффициенты $a_{j,k}(x)$ ограничены и старшие коэффициенты $a_{2r,k}(x)$, $|k| = 2r$, удовлетворяют условиям I) – II) теоремы 2.1 и условию слабо позитивности теоремы 2.2. Поэтому мы можем применить теорему 2.3 к оператору (6.20), если $\alpha_j - j + |k| \geqslant \alpha_{2r} - 2r + |k|$ для всех $0 \leqslant j \leqslant 2r-1$ и всех $|k| \leqslant j$. Отметим, что это условие равносильно условию $\alpha_j \geqslant \alpha_{2r} + j - 2r$, которое имеет место в предположениях теоремы 2.1 (см. условию (2.8)).

Таким образом, мы показали, что оператор (6.20) удовлетворяет всем условиям теоремы 2.3. Применяя эту теорему, получаем неравенство (2.15) для сопряжённого оператора. *Теорема 2.4 доказана полностью.*

Относительно доказательства следствия 2.1 отметим, что с помощью неравенства (2.13) (см. теорему 2.3) доказывается, что в условиях теоремы 2.4 область значения оператора $\mathbb{L} + \lambda I$ является замкнутой, а из неравенства (2.15) (см. теорему 2.4) следует, что ядро сопряжённого оператора $\mathbb{L}^* + \lambda I$ является пустым, то есть $\overline{R(\mathbb{L} + \lambda I)} = R(\mathbb{L} + \lambda I)$ и $N(\mathbb{L}^* + \lambda \mathbb{I}) = \emptyset$. Поэтому из равенства $L_2(\Omega) = \overline{R(\mathbb{L} + \lambda I)} \oplus N(\mathbb{L}^* + \lambda I)$ следует, что $R(\mathbb{L} + \lambda I) = L_2(\Omega)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. М.Ш. Бирман, М.З. Соломяк. *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.* Л.: Изд–во Ленингр. ун–та. 1980.
2. К.Х. Бойматов, С.А. Исхоков. *О разрешимости и гладкости решения вариационной задачи Дирихле, связанной с некоэрцитивной билинейной формой* // Тр. мат. инст. Стеклова **214**, 107–134 (1997).
3. Н.И. Бриш, И.Н. Яшкина. *Задача Дирихле для эллиптических уравнений с неограниченными младшими коэффициентами. II* // Диффер. уравн. **6**, 2021–2029 (1970).
4. Ю.В. Егоров. *Лекции по уравнениям с частными производными. Дополнительные главы.* М. Изд–во Московского ун–та. 1985.
5. С.А. Исхоков, А.Я. Куджмуродов. *О вариационной задачи Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов* // Докл. Акад. наук, Рос. акад. наук. **403**:2, 165–168 (2005).
6. С.А. Исхоков. *Неравенство Гординга для эллиптических операторов с вырождением* // Мат. заметки **87**:2, 201–216 (2010).
7. Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. *Функциональный анализ.* М.: Наука. 1977.
8. Л.Д. Кудрявцев. *Прямые и обратные теоремы вложения. Приложения к решению вариационным методом эллиптических уравнений* // Тр. Мат. инст. Стеклова **55**, 1–182 (1959).

9. Ж-Л. Лионс, Э. Мадженес. *Неоднородные граничные задачи и их приложения.* М.: Мир. 1971.
10. Н.В. Мирошин. *Внешняя вариационная задача Дирихле для эллиптического оператора с вырождением* // Тр. Мат. инст. Стеклова **194**, 179–195 (1992).
11. С.М. Никольский, П.И. Лирозкин, Н.В. Мирошин. *Весовые функциональные пространства и их приложения к исследованию краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений* // Изв. высш. учебн. завед., Мат. **1988**:8(135), 4–30 (1988).
12. В.И. Смирнов. *Курс высшей математики. Т. 4, часть 1.* М.: Наука. 1974.
13. В.А. Треногин. *Функциональный анализ.* М.: Наука. 1980.
14. Х. Трибель. *Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы.* М.: Мир. 1980.
15. V.I. Burenkov *Sobolev spaces on domains.* G. Teubner, Stuttgart (1998).
16. P.C. Kunstmann. *On elliptic non–divergence operators with measurable coefficients* // in «Nonlinear Elliptic and Parabolic Problems», Birkhäuser Verlag, Basel 265–272 (2005).

Сулаймон Абунасрович Исхоков,
Институт математики им. А. Джураева
Национальной академии наук Таджикистана,
ул. Айни, 299/4,
734063, г. Душанбе, Таджикистан
E-mail: sulaimon@mail.ru