

УДК 517.53

# СТЕПЕНЬ УСТОЙЧИВОСТИ МАКСИМАЛЬНОГО ЧЛЕНА РЯДА ДИРИХЛЕ

Н.Н. АИТКУЖИНА, Р.А. ГАЙСИН

**Аннотация.** Изучается мера устойчивости максимального члена ряда Дирихле с положительными показателями, сумма которого представляет собой целую функцию. Для класса целых рядов Дирихле, определяемого некоторой выпуклой мажорантой роста, доказана теорема о количественной оценке степени эквивалентности (вне некоторого исключительного  $c_q$ -множества) логарифмов максимальных членов исходного ряда и измененного ряда Дирихле. Аналогичная задача для целых рядов Дирихле произвольного, сколь угодно быстрого роста, но без никакой количественной оценки степени устойчивости максимального члена, в конце 1990-х — начале 2000-х годов впервые изучалась А.М. Гайсиным. Им тогда был получен критерий устойчивости — эквивалентности логарифмов максимальных членов исходного и измененного ряда на асимптотическом множестве. Этот результат, как и соответствующие утверждения об устойчивости для рядов Дирихле, сходящихся только в некоторой полуплоскости, полученные А.М. Гайсиным и Т.И. Белоус, нашли полезные приложения в теории асимптотических свойств рядов Дирихле, а именно при доказательстве равенств типа Поляка. Рассматриваемая в настоящей статье постановка задачи об устойчивости актуальна с точки зрения ее приложений к проблеме о минимуме модуля, а также к другим близким задачам анализа и комплексной динамики.

**Ключевые слова:** Ряд Дирихле, выпуклая мажоранта роста, максимальный член, степень устойчивости.

**Mathematics Subject Classification:** 30D10

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Изучение устойчивости максимального члена ряда Дирихле с положительными показателями, сумма которого представляет собой целую функцию, актуально в связи с теоремами об асимптотике целых рядов Дирихле на различных континуумах, уходящих в бесконечность (например, на кривых, полосах), в которых ключевую роль играют формулы Леонтьева для коэффициентов, подсчитываемых через биортогональную систему функций (см. [4]). Функции этой системы содержат множитель, зависящий от обратной величины производной характеристической функции — четного произведения Вейерштрасса, нулевое множество которого совпадает с последовательностью показателей ряда Дирихле (см. [4]).

Устойчивость максимального члена ряда Дирихле

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n s}, \quad s = \sigma + it, \quad (1.1)$$

---

N.N. AITKUZHINA, R.A. GAISIN, STABILITY DEGREE OF MAXIMAL TERM OF DIRICHLET SERIES.

© Аиткужина Н.Н., Гайсин Р.А. 2026.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 25-21-00044, <https://rscf.ru/project/25-21-00044/>.

Поступила 18 февраля 2026 г.

с положительными показателями, абсолютно сходящегося во всей плоскости, впервые исследовалась в [1]. Это понятие оказалось весьма полезным при изучении асимптотического поведения суммы ряда Дирихле на кривых, уходящих в бесконечность, а именно при доказательстве известной гипотезы Поля. Аналогичные исследования позже проводились и для рядов Дирихле заданного роста, в частности, конечного порядка по Ритту (см. [2], [3], [6]). Ключевую роль в таких вопросах играют леммы типа Бореля — Неванлинны. Отметим, что в подобных задачах  $\lambda_n$  необходимо являются нулями некоторой целой функции экспоненциального типа. Однако изучение устойчивости максимального члена представляет и самостоятельный интерес. При таком подходе показатели ряда допускают оптимальный выбор [5].

В статьях [2], [6] изучаются ряды Дирихле из классов  $D(\Phi)$  и  $\underline{D}(\Phi)$ , определяемых некоторой выпуклой мажорантой  $\Phi$ . В них были получены критерии устойчивости максимального члена ряда Дирихле (1.1) в терминах функции  $\varphi$ , обратной к  $\Phi$ . Суть основных результатов работ [2], [6] — теоремы о соотношениях типа

$$\ln \mu(\sigma) = (1 + o(1)) \ln \mu^*(\sigma), \quad (1.2)$$

имеющих место при  $\sigma \rightarrow \infty$  вне некоторых исключительных множеств  $E \subset \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$  нулевой нижней плотности. Здесь  $\mu(\sigma)$  — максимальный член ряда (1.1), а  $\mu^*(\sigma)$  — максимальный член целого ряда Дирихле с теми же показателями, но с измененными коэффициентами вида  $a_n b_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Однако в этих работах вообще не обсуждался вопрос о поведении бесконечно малой величины  $o(1)$  в равенстве (1.2), означающего устойчивость  $\mu(\sigma)$ . Цель настоящей статьи — в классе  $D^p(\Phi)$ , некотором аналоге  $D(\Phi)$ , зависящем от параметра  $p > 0$ , получить оценку типа

$$\left| 1 - \frac{\ln \mu^*(\sigma)}{\ln \mu(\sigma)} \right| < \frac{\text{const}}{\sigma^{\gamma+\mu}}, \quad 0 < \mu < \beta,$$

которая справедлива при  $\sigma \rightarrow \infty$  вне некоторого  $c_q$ -множества  $E_{\alpha\beta\gamma}^p \subset \mathbb{R}_+$ ,

$$\overline{\text{dens}} E_{\alpha\beta\gamma}^p \leq q < 1,$$

где  $\alpha, \beta, \gamma$  — заданные параметры,  $q = q(\alpha) = O(\alpha)$  при  $\alpha \rightarrow 0$ ,  $\beta \in (0, 1)$ ,  $\gamma \in (0, 1)$ ,  $\beta + \gamma < 1$ ,  $0 < \alpha \leq \alpha_0 < 1$ .

## 2. НЕОБХОДИМЫЕ СВЕДЕНИЯ И ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Пусть  $\Lambda = \{\lambda_n\}$  ( $0 < \lambda_n \uparrow \infty$ ) — последовательность, удовлетворяющая условию

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\lambda_n} = 0. \quad (2.1)$$

Обозначим через  $D(\Lambda)$  класс всех функций  $F$ , представимых во всей плоскости рядами Дирихле

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n s}, \quad s = \sigma + it. \quad (2.2)$$

Из условия (2.1) следует, что если ряд (2.2) сходится во всей плоскости, то он сходится в ней и абсолютно, а его сумма  $F$  — целая функция [4]. Через  $L$  обозначим класс всех непрерывных и неограниченно возрастающих на  $\mathbb{R}_+$  положительных функций. Пусть  $\Phi$  — выпуклая функция из  $L$ ,

$$D_m(\Phi) = \{F \in D(\Lambda) : \ln M_F(\sigma) \leq \Phi(m\sigma)\}, \quad m \geq 1,$$

где  $M_F(\sigma) = \sup_{|t| < \infty} |F(\sigma + it)|$ . Положим

$$D(\Phi) = \bigcup_{m=1}^{\infty} D_m(\Phi).$$

Наряду с рядом (2.2) введем в рассмотрение ряд

$$F_b^*(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n e^{\lambda_n s}, \quad (2.3)$$

где последовательность  $b = \{b_n\}$  комплексных чисел  $b_n$  ( $b_n \neq 0$  при  $n \geq N$ ), удовлетворяет условию

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{|\ln |b_n||}{\lambda_n} < \infty. \quad (2.4)$$

Пусть  $E \subset [0, \infty)$  — измеримое по Лебегу множество. Верхней  $DE$  и нижней  $dE$  плотностями множества  $E$  называются величины

$$DE = \overline{\text{dens}} E = \overline{\lim}_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{\text{mes}(E \cap [0, \sigma])}{\sigma}, \quad dE = \underline{\text{dens}} E = \underline{\lim}_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{\text{mes}(E \cap [0, \sigma])}{\sigma}.$$

В дальнейшем считаем, что все исключительные множества  $E \subset [0, \infty)$ , вне которых будут получены асимптотические оценки, представляют собой объединения отрезков вида  $[a_n, a'_n]$ , где (см. [1])

$$0 < a_1 < a'_1 \leq a_2 < a'_2 \leq \dots \leq a_n < a'_n \leq \dots$$

Пусть  $0 \leq q < 1$ . Множество  $E \subset \mathbb{R}_+$  называется  $C_q$ -множеством, если  $DE \leq q$ , и  $c_q$ -множеством, если  $dE \leq q$ .

Пусть

$$d_w = \inf_{x \geq e} \frac{\ln w(x)}{\ln x},$$

а  $\varphi$  — функция, обратная к функции  $\Phi$ , такая, что

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi(x^2)}{\varphi(x)} < \infty. \quad (2.5)$$

Из (2.5) следует, что при некотором  $c > 1$

$$\varphi(x) \leq c\varphi(x^{\frac{1}{2}}) \leq \dots \leq c^n \varphi(x^{\frac{1}{2^n}}).$$

Положим  $n = \left[ \frac{\ln \ln x}{\ln 2} \right]$  ( $[a]$  — целая часть  $a$ ). Тогда  $\ln \varphi(x) = O(\ln \ln x)$ ,  $x \rightarrow \infty$ .

Введем в рассмотрение классы функций

$$\underline{W}(\varphi) = \left\{ w \in L : d_w > 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{w(x)}{x\varphi(x)} = 0, \quad \underline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\varphi(x)} \int_1^x \frac{w(t)}{t^2} dt = 0 \right\},$$

$$W(\varphi) = \left\{ w \in L : d_w > 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\varphi(x)} \int_1^x \frac{w(t)}{t^2} dt = 0 \right\}.$$

Будем говорить, что последовательность  $\{b_n\}$  ( $b_n \neq 0$  при  $n \geq N$ )  $W(\varphi)$ -нормальна, если найдется функция  $\theta \in L$ , такая, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\varphi(x)} \int_1^x \frac{\theta(t)}{t^2} dt = 0, \quad (2.6)$$

причём

$$\ln \frac{1}{|b_n|} \leq \theta(\lambda_n), \quad n \geq N.$$

Пусть  $n(t) = \sum_{\lambda_n \leq t} 1$  — считающая функция последовательности  $\Lambda$ , а  $n_l(t)$  — наименьшая вогнутая мажоранта функции  $\ln n(t)$ . В силу условия (2.1) она корректно определена, причём  $n_l(t) = o(t)$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Через  $\mu(\sigma)$  и  $\mu_b^*(\sigma)$  обозначим максимальные члены рядов (2.2) и (2.3) соответственно, т.е.

$$\mu(\sigma) = \max_{n \geq 1} \{|a_n| e^{\lambda_n \sigma}\}, \quad \mu_b^*(\sigma) = \max_{n \geq 1} \{|a_n| |b_n| e^{\lambda_n \sigma}\}.$$

В [2] доказана следующая теорема.

**Теорема 2.1.** Пусть  $\{b_n\}$  — последовательность комплексных чисел ( $b_n \neq 0, n \geq N$ ), удовлетворяющая условию (2.4),  $\Phi$  — выпуклая функция из класса  $L$ . Предположим, что для функции  $\varphi$ , обратной к  $\Phi$ , выполняется условие (2.5), а для мажоранты  $n_l(t)$  — интегральное условие (2.6)  $W(\varphi)$ -нормальности<sup>1</sup>.

Для того, чтобы для любой функции  $F \in D(\Phi)$  при  $\sigma \rightarrow \infty$  вне некоторого множества  $E \subset [0, \infty)$  нулевой нижней плотности было справедливо асимптотическое равенство

$$\ln \mu(\sigma) = (1 + o(1)) \ln \mu_b^*(\sigma), \quad (2.7)$$

достаточно, а для  $W(\varphi)$ -нормальной последовательности  $\{b_n\}$  и необходимо, чтобы существовала функция  $w \in \underline{W}(\varphi)$ , такая, что

$$|\ln |b_n|| \leq w(\lambda_n), \quad n \geq N. \quad (2.8)$$

Отметим, что подобный результат для рядов Дирихле произвольного, сколь угодно быстрого роста доказан в [1]. Пусть  $p$  — некоторое положительное число,

$$\underline{W}^p(\varphi) = \left\{ w \in L : d_w > 0, \quad d_p(w) = \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{w(x)}{x \varphi^p(x)} < \infty, \quad \underline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\varphi^p(x)} \int_1^x \frac{w(t)}{t^2} dt < \infty \right\}.$$

Аналогично определяется класс  $W^p(\varphi)$  (путем замены в фигурных скобках  $\underline{\lim}$  на  $\overline{\lim}$ ), а также понятие  $W^p(\varphi)$ -нормальной последовательности. Очевидно, что если  $w \in W^p(\varphi)$ , то  $d_p(w) < \infty$ .

Основной результат настоящей статьи заключается в следующем (точную формулировку см. в теореме 3.2).

Пусть  $\Phi$  — возрастающая выпуклая на  $\mathbb{R}_+$  функция,  $p > 0$ ,

$$D^p(\Phi) = \bigcup_{m=1}^{\infty} \left\{ F \in D(\Lambda) : \ln M_F(\sigma) \leq \Phi(m\sigma^{\frac{1}{p}}) \right\}.$$

Показано, что если заданы  $\beta, \gamma \in (0, 1)$ ,  $\nu = 1 - \beta - \gamma > 0$ , а при  $n \geq N$

$$|\ln |b_n|| \leq w(\lambda_n), \quad w \in \underline{W}^{\nu p}(\varphi)$$

( $\varphi$  — функция, обратная к  $\Phi$ ,  $\varphi(x^2) = O(\varphi(x))$ ,  $x \rightarrow \infty$ ), то для любой функции  $F \in D^p(\Phi)$  при  $\sigma \rightarrow \infty$  вне некоторого  $c_q$ -множества верна оценка

$$\left| 1 - \frac{\ln \mu_b^*(\sigma)}{\ln \mu(\sigma)} \right| \leq \frac{2}{\sigma^{\gamma+\mu}},$$

где  $\mu$  — любое число из  $(0, \beta)$ , сколь угодно близкое к  $\beta$ .

<sup>1</sup>Не умаляя общности рассуждений, можно считать, что  $d_{n_l} > 0$ , т.е.  $n_l(t)$  принадлежит классу  $W(\varphi)$  (см. [2]).

## 3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Доказательство основной теоремы 3.2 основано на применении следующей теоремы типа Бореля — Неванлинны.

**Теорема 3.1.** Пусть  $\Phi \in L$ , и для функции  $\varphi$ , обратной к  $\Phi$ , выполняется условие (2.5). Пусть, далее,  $u(\sigma)$  — неубывающая, положительная и непрерывная на  $[\tau_0, \infty)$  функция, причем

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} u(\sigma) = \infty, \quad \overline{\lim}_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{u(\sigma)}{\ln \Phi(\sigma^{\frac{1}{\sigma}})} < \infty, \quad p > 0.$$

Пусть  $\beta \in (0, 1)$ ,  $\gamma \in (0, 1)$ ,  $\nu = 1 - \beta - \gamma$ ,  $\nu \in (0, 1)$ . Предположим, что  $w \in \underline{W}^{p\nu}(\varphi)$ , а  $\{x_n\}$  — последовательность, выбранная так, что

$$T_{p\nu}^- = \lim_{x_n \rightarrow \infty} \frac{1}{\varphi^{p\nu}(x_n)} \int_1^{x_n} \frac{w(t)}{t^2} dt < \infty. \quad (3.1)$$

Если  $\tau_n$  — такое, что  $v(\tau_n) = x_n$ ,  $n \geq 1$ , где  $v = v(\sigma)$  — решение уравнения

$$w(v) = e^{u(\sigma)}, \quad (3.2)$$

то при  $\sigma \rightarrow \infty$  вне некоторого  $c_q$ -множества  $E_{\alpha\beta\gamma}^p \subset [0, \infty)$ ,

$$\overline{\lim}_{\tau_n \rightarrow \infty} \frac{\text{mes}(E \cap [0, \tau_n])}{\tau_n} \leq q < 1,$$

имеет место оценка

$$u\left(\sigma + \sigma^\gamma \frac{w(v(\sigma))}{v(\sigma)}\right) < u(\sigma) + \frac{1}{\alpha\sigma^\beta},$$

где  $0 < \alpha \leq \alpha_0 < 1$ .

*Доказательство.* Пусть  $w = w(x)$  — функция из класса  $\underline{W}^p(\varphi)$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ , а параметры  $\beta$  и  $\gamma$  выбраны как в формулировке теоремы и зафиксированы.

Покажем, что вне некоторого множества  $E \subset [0, \infty)$ ,  $E = E_{\alpha\beta\gamma}^p$  нижней плотности  $dE_{\alpha\beta\gamma}^p \leq q < 1$  выполняется оценка

$$u\left(\sigma + \sigma^\gamma \frac{w(v(\sigma))}{v(\sigma)}\right) < u(\sigma) + \frac{1}{\alpha\sigma^\beta}.$$

Действительно, пусть  $E_{\alpha\beta\gamma}^p \subset [0, \infty)$  — множество, на котором

$$u\left(\sigma + \sigma^\gamma \frac{w(v(\sigma))}{v(\sigma)}\right) \geq u(\sigma) + \frac{1}{\alpha\sigma^\beta}, \quad (3.3)$$

где  $\beta \in (0, 1)$ ,  $\gamma \in (0, 1)$ ,  $\nu = 1 - \beta - \gamma$ ,  $\nu \in (0, 1)$ .

Положим  $E(\sigma) = E_{\alpha\beta\gamma}^p \cap [\sigma, \infty)$ . Если  $E(\sigma) = \emptyset$  для некоторого  $\sigma$ , то все показано. В противном случае, через  $\sigma_1$  обозначим наименьшее число, такое, что  $\sigma_1 \geq 0$ ,  $\sigma_1 \in E_{\alpha\beta\gamma}^p$ , а  $\sigma'_1$  — наименьшее из тех  $\sigma$ , для которых

$$u(\sigma) = u(\sigma_1) + \frac{1}{\alpha\sigma_1^\beta}.$$

Тогда из (3.3) имеем

$$0 < \sigma'_1 - \sigma_1 \leq \sigma_1^\gamma \frac{w(v(\sigma_1))}{v(\sigma_1)}.$$

Пусть  $\sigma_2 = \inf\{\sigma : \sigma \in E(\sigma'_1)\}$ , а  $\sigma'_2$  — наименьшее из всех  $\sigma$ , для которых

$$u(\sigma) = u(\sigma_2) + \frac{1}{\alpha\sigma_2^\beta}.$$

Ясно, что

$$0 < \sigma'_2 - \sigma_2 \leq \sigma_2^\gamma \frac{w(v(\sigma_2))}{v(\sigma_2)}, \quad u(\sigma_2) - u(\sigma_1) \geq \frac{1}{\alpha \sigma_1^\beta}.$$

Рассуждая далее аналогичным образом, найдем последовательности  $\{\sigma_n\}$ ,  $\{\sigma'_n\}$ , такие, что

$$0 < \sigma'_n - \sigma_n \leq \sigma_n^\gamma \frac{w(v(\sigma_n))}{v(\sigma_n)}, \quad u(\sigma_n) - u(\sigma_{n-1}) \geq \frac{1}{\alpha \sigma_{n-1}^\beta}. \quad (3.4)$$

Из построения видно, что

$$E_{\alpha\beta\gamma}^p \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} [\sigma_n, \sigma'_n].$$

Обозначим  $v_n = v(\sigma_n)$ ,  $\delta_n = \frac{w(v_n)}{v_n}$ ,  $n \geq 1$ . Пусть  $\{x_n\}$  ( $0 < x_n \uparrow \infty$ ) — последовательность из условия (3.1).

Пусть  $\{\tau_j\}$  — последовательность, где  $\tau_j$  — решение уравнения  $v(\tau) = x_j$ ,  $j \geq 1$ . Ясно, что  $0 < \tau_j \uparrow \infty$ , причем для любого  $j \geq 0$  найдется  $k \geq 1$ , такое, что  $\sigma_{k-1} \leq \tau_j < \sigma_k$ . Следовательно, имеем

$$\text{mes}(E_{\alpha\beta\gamma}^p \cap [0, \tau_j]) \leq \sum_{n=1}^{k-1} \sigma_n^\gamma \delta_n \leq \sigma_{k-1}^\gamma \delta_{k-1} + \tau_j^\gamma \sum_{n=1}^{k-2} \delta_n. \quad (3.5)$$

Если  $2v_n \leq v_{n+1}$ , то

$$\delta_n \leq w(v_n) \int_{v_n}^{v_{n+1}} \frac{dt}{t^2} \leq 2 \int_{v_n}^{v_{n+1}} \frac{w(t)}{t^2} dt. \quad (3.6)$$

Если же  $2v_n > v_{n+1}$ , то с учетом уравнения (3.2), (3.4) и монотонности функции  $w = w(t)$  имеем:

$$\begin{aligned} \delta_n &\leq \alpha \sigma_n^\gamma \frac{w(v_n)}{v_n} (u(\sigma_{n+1}) - u(\sigma_n)) \leq 2\alpha \sigma_n^\gamma \int_{v_n}^{v_{n+1}} \frac{w(t)}{t} d \ln w(t) \\ &= 2\alpha \sigma_n^\gamma \left( \frac{w(v_{n+1})}{v_{n+1}} - \frac{w(v_n)}{v_n} + \int_{v_n}^{v_{n+1}} \frac{w(t)}{t^2} dt \right). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Так как, очевидно,

$$\int_{v_n}^{v_{n+1}} \frac{dw(t)}{t} \geq 0,$$

находим

$$\int_{v_n}^{v_{n+1}} \frac{w(t) dt}{t^2} \leq \frac{w(v_{n+1})}{v_{n+1}} - \frac{w(v_n)}{v_n} + 2 \int_{v_n}^{v_{n+1}} \frac{w(t)}{t^2} dt.$$

Следовательно, из (3.6), (3.7) заключаем, что

$$\delta_n \leq 2 \max(1, \alpha \sigma_n^\beta) \left( \frac{w(v_{n+1})}{v_{n+1}} - \frac{w(v_n)}{v_n} + 2 \int_{v_n}^{v_{n+1}} \frac{w(t)}{t^2} dt \right). \quad (3.8)$$

Итак, если  $\sigma_{k-1} \leq \tau_j < \sigma_k$ , то из (3.5), (3.8) имеем:

$$\frac{\text{mes}(E_{\alpha\beta\gamma}^p \cap [0, \tau_j])}{\tau_j} \leq \frac{w(v_{k-1})}{\tau_j^{1-\gamma} v_{k-1}} + \frac{2\alpha}{\tau_j^\nu} \left( \frac{w(v_{k-1})}{v_{k-1}} + 2 \int_{v_1}^{v_{k-1}} \frac{w(t)}{t^2} dt \right), \quad \nu = 1 - \gamma - \beta. \quad (3.9)$$

По условию теоремы существует  $c > 0$ , такое, что  $u(\sigma) \leq c \ln \Phi(\sigma^{\frac{1}{p}})$ . Тогда, учитывая то, что  $d_w > 0$ , а также уравнение (3.2), получаем, что при некотором  $m \in \mathbb{N}$

$$[v(\sigma)]^{\frac{1}{m}} \leq w(v(\sigma)) \leq \Phi^c(\sigma^{\frac{1}{p}}),$$

т.е.

$$v(\sigma) \leq \Phi^{mc}(\sigma^{\frac{1}{p}}).$$

Учитывая свойство (2.5) функции  $\varphi$ , отсюда получаем, что

$$\sigma \geq c_1 \varphi^p(v), \quad v = v(\sigma), \quad 0 < c_1 < \infty, \quad c_1 = c_1(p).$$

Отсюда

$$\frac{1}{\sigma} \leq c_1^{-1}(p) \frac{1}{\varphi^p(v)}, \quad v = v(\sigma), \quad \sigma \geq x_1. \quad (3.10)$$

Следовательно, учитывая (3.10), из (3.9) при  $j \geq j_0$ ,  $\sigma_{k-1} \leq \tau_j < \sigma_k$ , имеем:

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{\tau_j \rightarrow \infty} \frac{\text{mes}(E_{\alpha\beta\gamma}^p \cap [0, \tau_j])}{\tau_j} &\leq c_1^{-(1-\gamma)} \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{w(v_{k-1})}{\varphi^{(\nu+\beta)p}(v_{k-1})v_{k-1}} \\ &\quad + 2\alpha c_1^{-\nu} \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{w(v_{k-1})}{v_{k-1} \varphi^{p\nu}(v_{k-1})} + \frac{2}{\varphi^{p\nu}(v_j)} \int_{v_1}^{v_j} \frac{w(t)}{t^2} dt \right) \\ &\leq c_1^{-(1-\gamma)} \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{w(v_{k-1})}{\varphi^{(\nu+\beta)p}(v_{k-1})v_{k-1}} + 2\alpha c_1^{-\nu} (d_{p\nu}(w) + 2T_{p\nu}^-), \end{aligned} \quad (3.11)$$

где  $v_j = v(\tau_j)$ ,  $p > 0$ ,  $\nu = 1 - \gamma - \beta$ ,  $\nu \in (0, 1)$ ,  $0 < \alpha < 1$ . Поскольку  $w \in \underline{W}^{p\nu}(\varphi)$ , имеем  $d_{p\nu}(w) < \infty$ ,  $T_{p\nu}^-(w) < \infty$ , а первое слагаемое из правой части второго неравенства из (3.11) равно нулю. Поскольку  $x_j = v(\tau_j) = v_j$ , из (3.11) окончательно получим

$$\overline{\lim}_{\tau_j \rightarrow \infty} \frac{\text{mes}(E_{\alpha\beta\gamma}^p \cap [0, \tau_j])}{\tau_j} \leq 2\alpha c_1^{-\nu} (d_p(w) + 2T_{p\nu}^-) \leq q < 1$$

при  $0 < \alpha \leq \alpha_0$ .

Теорема 3.1 доказана. □

Пусть  $\Phi$  — выпуклая функция из  $L$ ,  $p > 0$ ,

$$\begin{aligned} D_m^p(\Phi) &= \left\{ F \in D(\Lambda) : \ln M_F(\sigma) \leq \Phi(m\sigma^{\frac{1}{p}}) \right\}, \quad m \geq 1, \\ D^p(\Phi) &= \bigcup_{m=1}^{\infty} D_m^p(\Phi). \end{aligned}$$

Если оценка  $\ln M_F(\sigma) \leq \Phi(m\sigma^{\frac{1}{p}})$  выполняется только для некоторой последовательности  $\{x_n\}$ ,  $0 < x_n \uparrow \infty$ , то вместо  $D_m^p(\Phi)$  приходим к определению класса  $\underline{D}_m^p(\Phi)$ . Тогда

$$\underline{D}^p(\Phi) = \bigcup_{m=1}^{\infty} \underline{D}_m^p(\Phi).$$

Сформулируем и докажем основную теорему.

**Теорема 3.2.** Пусть  $\{b_n\}$  — последовательность комплексных чисел ( $b_n \neq 0$ ,  $n \geq \mathbb{N}$ ), удовлетворяющая условию (2.4),  $\Phi$  — выпуклая функция из класса  $L$ , параметры  $\alpha, \beta, \gamma$  такие, что  $\alpha \in (0, 1)$ ,  $\beta \in (0, 1)$ ,  $\gamma \in (0, 1)$ ,  $\nu \in (0, 1)$ , где  $\nu = 1 - \beta - \gamma$ . Предположим, что для функции  $\varphi$ , обратной к  $\Phi$ , выполняется условие (2.5), а функция  $n_l(t)$  принадлежит классу  $W^{p\nu}(\varphi)$ .

Если существует функция  $w \in \underline{W}^{p\nu}(\varphi)$ , такая, что

$$|\ln |b_n|| \leq w(\lambda_n), \quad n \geq N, \quad (3.12)$$

то для любой функции  $F \in D^p(\Phi)$  при  $\sigma \rightarrow \infty$  вне некоторого исключительного  $c_q$ -множества  $E_{\alpha\beta\gamma}^p \subset \mathbb{R}_+$ ,  $q = q(\alpha) = O(\alpha)$  при  $\alpha \rightarrow 0$ , справедлива оценка

$$\left| 1 - \frac{\ln \mu_b^*(\sigma)}{\ln \mu(\sigma)} \right| \leq \frac{2}{\sigma^{\gamma+\mu}}.$$

Здесь  $\mu$  — любое число из интервала  $(0, \beta)$ , сколь угодно близкое к  $\beta$ .

В дальнейшем, не умаляя общности рассуждений, можем считать, что  $n_l(t) \leq w(t)$ ,  $t > 0$ . В противном случае рассмотрим бы функцию  $w(t) + n_l(t)$ , которая, очевидно, принадлежит  $\underline{W}^{p\nu}(\varphi)$ , так как  $n_l(t) \in W^{p\nu}(\varphi)$ ,  $w(t) \in \underline{W}^{p\nu}(\varphi)$ .

*Доказательство. Достаточность.* Пусть выполнено условие (2.8), где  $w \in \underline{W}^{p\nu}(\varphi)$ , а  $v = v(\sigma)$  — решение уравнения

$$w(v) = \sigma^{-\gamma-\mu} \ln \mu(\sigma), \quad 0 < \gamma < 1, \quad \mu \in (0, \beta), \quad \gamma + \beta < 1.$$

Функция  $\ln \mu(\sigma)$  выпуклая, следовательно, функция  $\sigma^{-\gamma-\mu} \ln \mu(\sigma)$  неограниченно возрастает при  $\sigma \uparrow \infty$ . Положим

$$R_v = \sum_{\lambda_j > v} |a_j| e^{\lambda_j \sigma}, \quad h = \frac{3\sigma^\gamma w(v)}{v}, \quad v = v(\sigma).$$

Согласно условиям теоремы

$$\ln n = \ln n(\lambda_n) \leq n_l(\lambda_n), \quad n \geq 0.$$

Поскольку функция  $n_l(t)$  вогнутая, имеем также неравенство

$$n_l(\lambda_n) \leq \frac{w(v)}{v} \lambda_n, \quad \lambda_n \geq v.$$

Следовательно,

$$R_v \leq \mu(\sigma + h) \sum_{\lambda_n > v} e^{-\lambda_n h} \leq \mu(\sigma + h) c_0 \exp(\max_{t \geq v} \psi(t)), \quad h = 3\sigma^\gamma \frac{w(v)}{v}, \quad v = v(\sigma),$$

где

$$\psi(t) = 2n_l(t) - ht, \quad c_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Отсюда, если учесть приведенные выше оценки, при  $\sigma \rightarrow \infty$

$$\max_{t \geq v}(\psi(t)) \leq 2 \frac{w(v)}{v} t - h(t) \leq -3\sigma^\gamma w(v)(1 + o(1)) < -2\sigma^\gamma w(v), \quad v = v(\sigma).$$

Таким образом,

$$R_v \leq c_0 \mu(\sigma + h) \exp[-2\sigma^\gamma w(v)], \quad v = v(\sigma), \quad \sigma \geq \sigma_0. \quad (3.13)$$

Положим

$$u(\sigma) = \ln \frac{\ln \mu(\sigma)}{\sigma^{\gamma+\mu}}, \quad \mu \in (0, \beta), \quad \gamma + \beta < 1.$$

Поскольку  $\mu(\sigma) \leq M_F(\sigma)$ , а  $F \in D^p(\Phi)$ , то существует  $k > 1$  такое, что выполняется оценка

$$u(\sigma) \leq \ln \Phi(k\sigma^{\frac{1}{p}}), \quad \sigma \geq \sigma_1. \quad (3.14)$$

Ясно, что  $v = v(\sigma)$  является решением уравнения

$$w(v) = e^{u(\sigma)}.$$

Тогда с учетом (3.14) имеем

$$w(v(\sigma)) = e^{u(\sigma)} \leq \Phi(k\sigma^{\frac{1}{p}}), \quad k > 1.$$

Отсюда получаем, что

$$\varphi(w(v(\sigma))) \leq k\sigma^{\frac{1}{p}}.$$

Значит,

$$\frac{1}{\sigma} \leq \frac{c_1}{[\varphi(w(v))]^p}, \quad \sigma \geq \sigma_1, \quad c_1 = k^p, \quad v = v(\sigma). \quad (3.15)$$

Учитывая условие (2.5) и то, что  $\sqrt{x} \leq w(x)$  при  $x \geq x_0$ , находим

$$\varphi(x) \leq c_2 \varphi(w(x)), \quad x \geq x_0, \quad 0 < c_2 < \infty. \quad (3.16)$$

В итоге из (3.15), (3.16) получим оценку

$$\frac{1}{\sigma} \leq \frac{c_3}{[\varphi(v)]^p}, \quad v = v(\sigma), \quad \sigma \geq \sigma_2, \quad 0 < c_3 < \infty. \quad (3.17)$$

Далее, поскольку  $w \in \underline{W}^{p\nu}(\varphi)$ , получим

$$d_{p\nu}(w) = \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{w(x)}{x\varphi^{p\nu}(x)} < \infty, \quad (3.18)$$

а для последовательности  $\{x_n\}$  имеем также

$$T_{p\nu}^-(w) = \lim_{x_n \rightarrow \infty} \frac{1}{\varphi^{p\nu}(x_n)} \int_1^{x_n} \frac{w(t)}{t^2} dt < \infty. \quad (3.19)$$

Очевидно, при замене условия  $u(\sigma) \leq c\Phi(\sigma^{\frac{1}{p}})$  на  $u(\sigma) \leq \Phi(k\sigma^{\frac{1}{p}})$ ,  $k > 1$ , заключение теоремы 3.1 останется тем же, если остальные условия оставить без изменений. Поэтому, применяя теорему 3.1 для функций  $u$ ,  $w$  и учитывая при этом (3.12)–(3.19), а также то, что  $\tau_j$  — корень уравнения  $v(\tau) = x_j$ ,  $j \geq 1$ , вне некоторого множества  $E_1 \subset [0, \infty)$ ,  $E_1 = E_1^p(\alpha, \beta, \gamma)$ ,  $0 < \alpha < \alpha_1 < 1$ ,

$$\overline{\lim}_{\tau_j \rightarrow \infty} \frac{\text{mes}(E_1 \cap [0, \tau_j])}{\tau_j} \leq q_1 < \frac{1}{2}, \quad (3.20)$$

из (3.13) получаем, что

$$u(\sigma + h) < u(\sigma) + \frac{1}{\alpha\sigma^\beta},$$

т.е.

$$\ln \ln \mu(\sigma + h) - (\gamma + \mu) \ln(\sigma + h) < \ln \ln \mu(\sigma) - (\gamma + \mu) \ln \sigma + \frac{1}{\alpha\sigma^\beta}.$$

Отсюда получаем, что при  $\sigma \rightarrow \infty$  вне  $E_1$

$$\begin{aligned} \ln \ln \mu(\sigma + h) &< \ln \ln \mu(\sigma) + \frac{1}{\alpha\sigma^\beta} + (\gamma + \mu) \ln \left(1 + \frac{h}{\sigma}\right) \\ &\leq \ln \ln \mu(\sigma) + \frac{1}{\alpha\sigma^\beta} (1 + 3(\gamma + \beta)\alpha d_{p\nu}(w)). \end{aligned}$$

Поскольку  $0 < \mu < \beta$ , учитывая элементарное неравенство  $e^\varepsilon < 1 + 2\varepsilon$ ,  $\varepsilon \in (0, \ln 2)$ , равенство  $w(v) = \sigma^{-\gamma-\mu} \ln \mu(\sigma)$ , из (3.13) получаем

$$R_v \leq c_0 \mu^{1+\frac{\alpha}{\alpha\sigma^\beta}} \exp[-2\sigma^\gamma w(v)] = c_0 \mu(\sigma)^{1-2(1+o(1))\sigma^{-\mu}} = o(1)\mu(\sigma), \quad v = v(\sigma), \quad \sigma \geq \sigma_3,$$

где  $a = 1 + 3(\gamma + \beta)\alpha d_{p\nu}(w)$ ,  $0 < \mu < \beta$ . Значит, при  $\sigma \geq \sigma_4$ , но при  $\sigma \notin E_1$  получаем, что  $\lambda_{\nu(\sigma)} \leq v(\sigma)$ , где  $\nu = \nu(\sigma)$  — центральный индекс ряда (2.2). Тогда с учетом (2.8) при  $\sigma \rightarrow \infty$  вне  $E_1$  имеем:

$$\begin{aligned} \mu(\sigma) &= |a_\nu| e^{\lambda_\nu \sigma} = |a_\nu b_\nu| e^{\lambda_\nu \sigma} |b_\nu|^{-1} \leq \mu_b^*(\sigma) e^{w(\lambda_\nu)} \leq \mu_b^*(\sigma) e^{w(v)} = \mu_b^*(\sigma) \mu(\sigma)^{\sigma^{\gamma+\mu}}, \\ 0 < \gamma < 1, \quad 0 < \mu < \beta, \quad \gamma + \beta < 1. \end{aligned}$$

Это означает, что при  $\sigma \rightarrow \infty$  вне  $E_1 = E_1^p(\alpha, \beta, \gamma)$

$$\left(1 - \frac{1}{\sigma^{\gamma+\mu}}\right) \ln \mu(\sigma) \leq \ln \mu_b^*(\sigma). \quad (3.21)$$

Далее, поскольку  $|b_n| \leq e^{w(\lambda_n)}$ ,  $n \geq N$ , находим

$$\mu_b^*(\sigma) = |a_n b_n| e^{\lambda_k \sigma} \leq \mu(\sigma) e^{w(\lambda_k)}, \quad k \geq N, \quad (3.22)$$

где  $k = k(\sigma)$  — центральный индекс ряда (2.3).

Пусть  $p = p(\sigma)$  — решение уравнения  $w(p) = \sigma^{-\gamma-\mu} \ln \mu_b^*(\sigma)$ , а

$$R_p^* = \sum_{\lambda_n > p} |a_n b_n| e^{\lambda_n \sigma}, \quad p = p(\sigma).$$

Положим

$$u^*(\sigma) = \ln \frac{\ln \mu(\sigma)}{\sigma^{\gamma+\mu}}.$$

Применяя теорему 3.1, из тех же рассуждений, при помощи которых была получена оценка  $R_v$ , получаем, что<sup>1</sup>

$$R_p^* \leq c_0 [\mu_b^*(\sigma)]^{1-2(1+o(1))\sigma^{-\mu}} = o(1)\mu_b^*(\sigma), \quad c_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

если  $\sigma \rightarrow \infty$  вне некоторого множества  $E_2 \subset [0, \infty)$ ,  $E_2 = E_2^p(\alpha, \beta, \gamma)$ ,  $0 < \alpha < \alpha_2 < 1$ ,

$$\overline{\lim}_{t_j \rightarrow \infty} \frac{\text{mes}(E_2 \cap [0, t_j])}{t_j} \leq q_2 < \frac{1}{2}. \quad (3.23)$$

Здесь  $t_j$  — решение уравнения  $p(\sigma) = x_j$ , а  $\{x_j\}$  — последовательность, фигурирующая в условии (3.19). Отсюда следует, что  $\lambda_{k(\sigma)} \leq p(\sigma)$ , если  $\sigma \geq \sigma_2$ ,  $\sigma \notin E_2$ . Следовательно, из (3.22) получаем, что при  $\sigma \rightarrow \infty$  вне множества  $E_2$

$$\mu_b^*(\sigma) \leq \mu(\sigma) e^{w(p(\sigma))} = \mu(\sigma) \mu_b^*(\sigma)^{\frac{1}{\sigma^{\gamma+\mu}}}, \quad \gamma \in (0, 1), \quad \mu \in (0, \beta).$$

т.е.

$$\left(1 - \frac{1}{\sigma^{\gamma+\mu}}\right) \ln \mu_b^*(\sigma) \leq \ln \mu(\sigma). \quad (3.24)$$

Убедимся, что  $dE < 1$ , где  $E = E_1 \cup E_2$ . Этот факт непосредственно из (3.20) и (3.23) не следует. Поэтому рассмотрим последовательность  $\{\tau_j^*\}$ , где  $\{\tau_j^*\} = \min(\tau_j, t_j)$ . Поскольку  $x_j = p(t_j) = v(\tau_j)$ , а  $F_b^* \in D^p(\Phi)$ , то как и (3.17) получаем, что  $\varphi^p(p(\sigma)) \leq c_4 \sigma$ ,  $0 < c_4 < \infty$ , а следовательно,

$$\frac{1}{\tau_j^*} \leq \frac{A}{[\varphi(x_j)]^p}, \quad j \geq 1.$$

<sup>1</sup>Так как  $F \in D^p(\Phi)$ , очевидно,  $F_b^* \in D^p(\Phi)$ , где  $F_b^*$  — сумма ряда (2.3).

Следовательно, если  $E = E_1 \cup E_2$ , то в силу оценок типа (3.11) для каждого из множеств  $E_1$  и  $E_2$  при  $\tau_j^* \rightarrow \infty$  получаем, что

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{\tau_j^* \rightarrow \infty} \frac{\text{mes}(E \cap [0, \tau_j^*])}{\tau_j^*} &\leq \overline{\lim}_{x_j \rightarrow \infty} \frac{A}{[\varphi(x_j)]^p} (\text{mes}(E_1 \cap [0, \tau_j]) + \text{mes}(E_2 \cap [0, t_j])) \\ &= A \overline{\lim}_{\tau_j \rightarrow \infty} \frac{\text{mes}(E_1 \cap [0, \tau_j])}{\varphi^p(v_j)} + A \overline{\lim}_{t_j \rightarrow \infty} \frac{\text{mes}(E_2 \cap [0, t_j])}{\varphi^p(p_j)} \leq q_1 + q_2 = q < 1, \end{aligned}$$

где  $v_j = v(\tau_j)$ ,  $p_j = p(t_j)$ .

Таким образом, из (3.21), (3.24) окончательно получаем, что при  $\sigma \rightarrow \infty$  вне  $E$ ,  $E = E^p(\alpha, \beta, \gamma)$ ,  $dE \leq q < 1$ ,

$$\left| 1 - \frac{\ln^* \mu_b(\sigma)}{\ln \mu(\sigma)} \right| \leq \frac{2}{\sigma^{\gamma+\mu}}, \quad \gamma \in (0, 1), \quad \mu \in (0, \beta), \quad \beta \in (0, 1), \quad \gamma + \beta < 1, \quad (3.25)$$

если  $0 < \alpha < \min(\alpha_1, \alpha_2)$ .

Теорема 3.2 доказана.  $\square$

**Открытый вопрос:** является ли условие (3.12) необходимым для того, чтобы для любой функции  $F \in D^{p\nu}(\Phi)$  была верна оценка (3.25)?

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А.М. Гайсин. Оценка роста и убывания целой функции бесконечного порядка на кривых // Мат. сб. **194**:8, 55–82 (2003).
2. А.М. Гайсин, Н.Н. Аиткужина. Критерий устойчивости максимального члена ряда Дирихле // Пробл. мат. анализ. **112**, 7–15 (2022).
3. А.М. Гайсин, И.Д. Латыпов. Асимптотика логарифма максимального члена измененного ряда Дирихле // Изв. высш. учебн. завед., Мат. **484**:9, 15–24 (2002).
4. А.Ф. Леонтьев. Ряды экспонент. М.: Наука. 1976.
5. О.Б. Скасків, О.М. Тракало. Про стійкість максимального члена цілого ряду Діріхле // Укр. мат. ж. **57**:4, 571–576 (2005).
6. А.М. Gaisin, N.N. Aitkuzhina. Stability-preserving perturbation of the maximum terms of Dirichlet series // Probl. Anal. Issues Anal. **11**:3, 1–15 (2022).

Наркес Нурмухаметовна Аиткужина,  
Уфимский университет науки и технологий,  
ул. З. Валиди, 32,  
450076, г. Уфа, Россия  
E-mail: yusupovan@rambler.ru

Рашит Ахтярович Гайсин,  
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН,  
ул. Чернышевского, 112,  
450008, г. Уфа, Россия  
E-mail: rashit.gajsin@mail.ru