

УДК 517.518

ЗАДАЧА КОШИ С СУММИРУЕМЫМИ НАЧАЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ СО МНОЖЕСТВЕННЫМИ ПРОСТРАНСТВЕННЫМИ СДВИГАМИ

Г.Л. РОССОВСКИЙ

Аннотация. Рассматривается задача Коши для параболических дифференциально-разностных уравнений со множественными пространственными сдвигами в младших членах. Функция в начальном условии задачи полагается суммируемой. Решение задачи строится в форме свертки ядра параболического уравнения с начальной функцией. Исследуется поведение и гладкость решения и его производных при больших значениях времени.

Ключевые слова: дифференциально-разностный оператор, параболическое уравнение, задача Коши.

Mathematics Subject Classification: 35R10, 35K15

1. ВВЕДЕНИЕ

Эллиптические и параболические дифференциально-разностные уравнения со сдвигами по пространственным переменным уже долгое время являются предметом пристального изучения многих авторов, связанные с ними задачи широко освещены в отечественной и зарубежной научной литературе и имеют большое количество различных приложений, [3]–[5], [7], [9], [15], [16], [19]. Исследование указанных типов уравнений тесно связано с исследованием эллиптических и параболических дифференциальных уравнений с нелокальными краевыми условиями, которые имеют приложения в теории плазмы, многомерных диффузионных процессах и нелинейной оптике, [1], [6], [10], [11], [13], [14], [18]. В свою очередь, задача Коши для дифференциально-разностных уравнений была подробно изучена в [3] — там систематически исследовался случай существенно ограниченных функций в начальном условии, что приводило к эффекту стабилизации решения, схожему с тем, что возникает в уравнении теплопроводности или уравнении Лапласа в полупространстве.

В работе [17] была поставлена и изучена задача Коши для параболических дифференциально-разностных уравнений с суммируемыми начальными функциями. Было доказано существование решения данной задачи, само решение было построено в виде свертки начальной функции с ядром пуассоновского типа. Также было изучено поведение решения и его производных при больших значениях времени. Была показана скорость убывания решения и его производных, а также найдено достаточное условие сходимости в явной форме. Настоящая работа является продолжением предыдущего исследования —

G.L. Rossovskii, CAUCHY PROBLEM FOR PARABOLIC EQUATIONS WITH MULTIPLE SPATIAL TRANSLATIONS AND SUMMABLE INITIAL FUNCTIONS.

© Россковский Г.Л. 2025.

Исследование Г.Л. Россовского выполнено при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках мегагранта № 075-15-2022-1115.

Поступила 26 ноября 2024 г.

ключевое отличие кроется в том, что теперь в структуре уравнения присутствуют множественные пространственные сдвиги, то есть рассматривается суперпозиция младших членов со сдвигами вместо одного слагаемого.

Также следует отметить, что краевые задачи для параболических дифференциально-разностных уравнений с пространственными сдвигами изучались ранее и исследовались при помощи методов полугрупп в работах [8], [12].

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ

Положим параметры a_k и h_k , $k = 1, \dots, n$ вещественными.

Рассмотрим следующее параболическое дифференциально-разностное уравнение:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sum_{k=1}^n a_k u(x - h_k, t) \quad (2.1)$$

в полуплоскости $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, вместе со следующим начальным условием:

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_0 \in L_1(\mathbb{R}). \quad (2.2)$$

Теперь определим функцию

$$\mathcal{E}(x, t) = \int_0^{+\infty} e^{-t\left(\xi^2 - \sum_{k=1}^n a_k \cos h_k \xi\right)} \cos\left(x\xi - t \sum_{k=1}^n a_k \sin h_k \xi\right) d\xi \quad (2.3)$$

в указанной выше полуплоскости $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$.

Функция (2.3) называется ядром Пуассона. Из работы [3, Сес. 1.1] известно, что эта функция удовлетворяет уравнению (2.1) в классическом смысле во всей полуплоскости. Решение поставленной начальной задачи может быть записано при помощи ядра Пуассона.

Оно легко получается формальным применением преобразования Фурье по переменной x к самому уравнению и к начальному условию. Это приводит в итоге нас к начальной задаче для обыкновенного дифференциального уравнения с параметром ξ :

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = \left(-\xi^2 + \sum_{k=1}^n a_k e^{-i\xi h_k}\right) \tilde{u}(\xi, t), \quad \tilde{u}(\xi, 0) = \tilde{u}_0(\xi). \quad (2.4)$$

Решая (2.4) и применяя обратное преобразование Фурье, мы получаем решение исходной задачи (2.1)–(2.2) в виде свертки ядра Пуассона (2.3) и функции в начальном условии (2.2):

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}(x - \xi, t) u_0(\xi) d\xi. \quad (2.5)$$

Как было подробно показано в [3, Сес. 1.1] и [17, Сес. 2], для ядра Пуассона (2.3) имеет место следующая оценка:

$$\begin{aligned} |\mathcal{E}(x, t)| &\leq \int_0^{+\infty} e^{-t\left(\xi^2 - \sum_{k=1}^n a_k \cos h_k \xi\right)} d\xi = \int_0^{+\infty} e^{-t\xi^2} e^{t \sum_{k=1}^n a_k \cos h_k \xi} d\xi \\ &\leq e^{t \sum_{k=1}^n |a_k|} \int_0^{+\infty} e^{-t\xi^2} d\xi = \frac{e^{t \sum_{k=1}^n |a_k|}}{\sqrt{t}} \int_0^{+\infty} e^{-\xi^2} d\xi = e^{t \sum_{k=1}^n |a_k|} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Так как функция в начальном условии $u_0(x)$ является суммируемой, для функции $u(x, t)$ будет справедлива оценка аналогичная уже выписанной оценке для ядра (с учетом начальной функции):

$$|u(x, t)| \leq \frac{e^{t \sum_{k=1}^n |a_k|}}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} |u_0(\xi)| d\xi \leq \frac{e^{t \sum_{k=1}^n |a_k|}}{2\sqrt{\pi t}} \|u_0\|_{L_1(\mathbb{R})}. \quad (2.7)$$

Теперь перейдем к обоснованию законности формального дифференцирования в уравнении (2.1). Вначале формально продифференцируем функцию $\mathcal{E}(x, t)$ дважды по переменной x :

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial x^2} = - \int_0^{+\infty} \xi^2 e^{-t(\xi^2 - \sum_{k=1}^n a_k \cos h_k \xi)} \cos \left(x\xi - t \sum_{k=1}^n a_k \sin h_k \xi \right) d\xi.$$

Откуда будем иметь следующую оценку:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial x^2} \right| &\leq \int_0^{+\infty} \xi^2 e^{-t\xi^2} e^{t \sum_{k=1}^n |a_k| \cos h_k \xi} d\xi \leq e^{t \sum_{k=1}^n |a_k|} \int_0^{+\infty} \xi^2 e^{-t\xi^2} d\xi \\ &= \left[d\xi = \frac{t\xi^2 = y}{2\sqrt{t}\sqrt{y}} dy \right] = e^{t \sum_{k=1}^n |a_k|} \frac{1}{2t^{\frac{3}{2}}} \int_0^{+\infty} \sqrt{y} e^{-y} dy \\ &= e^{t \sum_{k=1}^n |a_k|} \frac{1}{2t^{\frac{3}{2}}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = e^{t \sum_{k=1}^n |a_k|} \frac{\sqrt{\pi}}{2t^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Отсюда же имеем, что только что полученный интеграл сходится в абсолютном смысле при всех положительных значениях t . Это, в свою очередь, доказывает справедливость формального дифференцирования.

Формальное же дифференцирование функции $\mathcal{E}(x, t)$ по переменной t оказывается избыточным в силу того, что полученные ранее оценки (2.6) и (2.8) наряду с тем фактом, что $\mathcal{E}(x, t)$ удовлетворяет уравнению (2.1) в полуплоскости $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$ уже гарантируют нам следующее:

$$\left| \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} \right| \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{t \sum_{k=1}^n |a_k|} \left(\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} \right). \quad (2.9)$$

То же, очевидно, справедливо и для функции $u(x, t)$, так как последняя построена в виде свертки уже исследованной нами функции $\mathcal{E}(x, t)$ и суммируемой начальной функции $u_0(x)$. Таким образом, функция $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению (2.1) в классическом смысле в полуплоскости $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$.

Переформулируем данное утверждение в виде теоремы.

Теорема 2.1. *Функция (2.5) удовлетворяет задаче Коши (2.1), (2.2) в смысле обобщенных функций и удовлетворяет уравнению (2.1) в полуплоскости $(-\infty, +\infty) \times (0, +\infty)$ в классическом смысле.*

3. СВОЙСТВА РЕШЕНИЯ

3.1. Поведение решения. Оценки, полученные для функции $\mathcal{E}(x, t)$ и ее производных по переменным x и t весьма просты и достаточны для доказательства разрешимости задачи (2.1), (2.2) (то же верно и для функции $u(x, t)$), однако они оказываются не столь полезны при исследовании поведения решения при $t \rightarrow \infty$.

Поэтому попробуем получить более точные оценки для функции $\mathcal{E}(x, t)$. Рассмотрим подробнее структуру подынтегральной функции в интегральном представлении функции $\mathcal{E}(x, t)$. Грубо говоря, для сходимости (равномерной) данного интеграла степень экспоненты, стоящей под интегралом, должна быть отрицательной. Для этого потребуем следующее

$$\xi^2 - \sum_{k=1}^n a_k \cos h_k \xi > 0. \quad (3.1)$$

Очевидно, что

$$\xi^2 - \sum_{k=1}^n a_k \cos h_k \xi \geq \frac{1}{2} \xi^2,$$

начиная с некоторого ξ_0 . Так как верно

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k \cos h_k \xi \right| \leq \sum_{k=1}^n |a_k \cos h_k \xi| \leq \sum_{k=1}^n |a_k|,$$

мы можем взять

$$\xi_0 = \sqrt{2 \sum_{k=1}^n |a_k|}.$$

Вернемся к интегралу в оценке для функции $\mathcal{E}(x, t)$. Очевидно, неравенство (3.1) предполагает существование такой постоянной $a_0 > 0$, что $\xi^2 - \sum_{k=1}^n a_k \cos h_k \xi \geq a_0$. Тогда

$$\begin{aligned} |\mathcal{E}(x, t)| &\leq \int_0^{+\infty} e^{-t(\xi^2 - \sum_{k=1}^n a_k \cos h_k \xi)} d\xi = \int_0^{\xi_0} e^{-t(\xi^2 - \sum_{k=1}^n a_k \cos h_k \xi)} d\xi \\ &\quad + \int_{\xi_0}^{+\infty} e^{-t(\xi^2 - \sum_{k=1}^n a_k \cos h_k \xi)} d\xi \leq \int_0^{\xi_0} e^{-a_0 t} d\xi + \int_{\xi_0}^{+\infty} e^{-\frac{t\xi^2}{2}} d\xi \\ &\leq e^{-a_0 t} \xi_0 + \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t\xi^2}{2}} d\xi = e^{-a_0 t} \xi_0 + \sqrt{\frac{\pi}{2t}} \\ &= \sqrt{2 \sum_{k=1}^n |a_k|} e^{-a_0 t} + \sqrt{\frac{\pi}{2t}}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Фактически изучив поведение функции $\mathcal{E}(x, t)$, мы можем сформулировать следующие утверждения уже для функции $u(x, t)$.

Теорема 3.1. Пусть выполнено условие (3.1). Тогда решение (2.5) задачи Коши (2.1), (2.2) сходится к нулю при $t \rightarrow \infty$ равномерно по $x \in \mathbb{R}$. Скорость сходимости определяется следующей оценкой:

$$|u(x, t)| \leq C \frac{\|u_0\|_{L_1(\mathbb{R})}}{\sqrt{t}},$$

где $C > 0$ — некоторая постоянная.

Замечание 3.1. В случае всего одного пространственного сдвига (то есть в уравнении присутствует всего один младший член), условие (3.1) может быть записано в более явной форме. Заменяя $h\xi$ на η в

$$\xi^2 - a \cos h\xi > 0,$$

где a, h вещественны и $a < 0$, мы получаем

$$\frac{\eta^2}{|a|h^2} + \cos \eta > 0, \quad \eta \in \mathbb{R}.$$

Следовательно, на параметры a, h необходимо наложить следующие условия:

$$|a|h^2 < \frac{1}{\max_{\eta \in \mathbb{R}} f(\eta)},$$

где

$$f(\eta) = -\frac{\cos \eta}{\eta^2}.$$

Замечание 3.2. Также можно выписать более грубую, но гораздо более удобную форму оценки (3.1), связывающую только коэффициенты a_k и h_k в уравнении (2.1).

Как было показано в [2] для случая гиперболического уравнения с нелокальными потенциалами, мы можем получить такое условие при более тщательном исследовании функции

$$f(\xi) = \xi^2 - \sum_{k=1}^n a_k \cos h_k \xi \quad \text{при } \xi > 0.$$

Дифференцируя это выражение, получаем

$$f'(\xi) = 2\xi + \sum_{k=1}^n a_k h_k \sin h_k \xi = 2\xi \left(1 + \sum_{k=1}^n \frac{a_k h_k^2}{2} \frac{\sin h_k \xi}{h_k \xi} \right) > 2\xi \left(1 - \sum_{k=1}^n \frac{|a_k| h_k^2}{2} \right).$$

Полученная производная положительна для всех $\xi \geq 0$ при условии

$$\sum_{k=1}^n |a_k| h_k^2 \leq 2, \tag{3.3}$$

откуда имеем, что функция $f(\xi)$ является неубывающей для всех $\xi \geq 0$, а $f(0) = -\sum_{k=1}^n a_k$.

Так как функция $f(\xi)$ является четной, полученное значение $f(0)$ остается минимальным для всех $\xi \in \mathbb{R}$.

3.2. Поведение производных решения. Теперь, используя тот же подход, изучим поведение производных полученного решения как по пространственной переменной, так и по времени. Также примем, что выполнено условие (3.1).

Вначале продифференцируем функцию (2.3) по переменной x и применим ту же технику, что и при получении оценки в (3.2):

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} \right| &= \left| \int_0^{+\infty} \xi e^{-t\left(\xi^2 - \sum_{k=1}^n a_k \cos h_k \xi\right)} \sin \left(x\xi - t \sum_{k=1}^n a_k \sin h_k \xi \right) d\xi \right| \\ &\leq \int_0^{+\infty} \xi e^{-t\left(\xi^2 - \sum_{k=1}^n a_k \cos h_k \xi\right)} d\xi = \int_0^{\xi_0} \xi e^{-t\left(\xi^2 - \sum_{k=1}^n a_k \cos h_k \xi\right)} d\xi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\xi_0}^{+\infty} \xi e^{-t\left(\xi^2 - \sum_{k=1}^n a_k \cos h_k \xi\right)} d\xi \leq \int_0^{\xi_0} \xi e^{-a_0 t} d\xi + \int_{\xi_0}^{+\infty} \xi e^{-\frac{t\xi^2}{2}} d\xi \\
& \leq \frac{\xi_0^2}{2} e^{-a_0 t} + \frac{1}{t} \int_0^{+\infty} e^{-y^2} d(y^2) = e^{-a_0 t} \sum_{k=1}^n |a_k| + \frac{1}{t}.
\end{aligned}$$

Тогда для функции (2.5) получим соответствующую оценку:

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| \leq \frac{1}{\pi} \left| \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} \right| \int_{-\infty}^{+\infty} u_0 d\xi = \frac{\|u_0\|_{L_1(\mathbb{R})}}{\pi} \left[e^{-a_0 t} \sum_{k=1}^n |a_k| + \frac{1}{t} \right],$$

которая означает, что

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = 0,$$

то есть первая производная функции $u(x, t)$ по переменной x сходится к нулю при $t \rightarrow \infty$ равномерно по $x \in \mathbb{R}$ со скоростью t^{-1} .

Перейдем теперь к производным по пространственной переменной более высокого порядка (начиная со второго):

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial x^2} \right| & \leq \int_0^{+\infty} \xi^2 e^{-t\left(\xi^2 - \sum_{k=1}^n a_k \cos h_k \xi\right)} d\xi \leq \int_0^{\xi_0} \xi^2 e^{-a_0 t} d\xi + \int_{\xi_0}^{+\infty} \xi^2 e^{-t\xi^2/2} d\xi \\
& \leq \frac{\xi_0^3}{3} e^{-a_0 t} + \left(\frac{2}{t} \right)^{\frac{3}{2}} \int_0^{+\infty} y^2 e^{-y^2} dy \leq \frac{e^{-a_0 t}}{3} \left(2 \sum_{k=1}^n |a_k| \right)^{\frac{3}{2}} + \frac{C_2}{t^{\frac{3}{2}}}.
\end{aligned}$$

где C_2 — это некоторая постоянная. Тогда для функции $u(x, t)$ имеем

$$\left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right| \leq \frac{\|u_0\|_{L_1(\mathbb{R})}}{\pi} \left[\frac{e^{-a_0 t}}{3} \left(2 \sum_{k=1}^n |a_k| \right)^{\frac{3}{2}} + \frac{C_2}{t^{\frac{3}{2}}} \right],$$

откуда получаем, что

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = 0$$

равномерно по $x \in \mathbb{R}$ со скоростью сходимости $t^{-\frac{3}{2}}$.

Теперь посмотрим на производную произвольного порядка m по переменной x :

$$\frac{\partial^m \mathcal{E}}{\partial x^m} = \int_0^{+\infty} (-\xi)^m e^{-t\left(\xi^2 - \sum_{k=1}^n a_k \cos h_k \xi\right)} \cos \left(x\xi - t \sum_{k=1}^n a_k \sin h_k \xi + \frac{\pi m}{2} \right) d\xi$$

со следующей оценкой:

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial^m \mathcal{E}}{\partial x^m} \right| & \leq \int_0^{+\infty} \xi^m e^{-t\left(\xi^2 - \sum_{k=1}^n a_k \cos h_k \xi\right)} d\xi \leq \frac{\xi_0^{m+1}}{m+1} e^{-a_0 t} + \left(\frac{2}{t} \right)^{\frac{m+1}{2}} \int_0^{+\infty} y^m e^{-y^2} dy \\
& \leq \frac{e^{-a_0 t}}{m+1} \left(2 \sum_{k=1}^n |a_k| \right)^{\frac{m+1}{2}} + \frac{C_m}{t^{\frac{m+1}{2}}}.
\end{aligned}$$

Тогда для функции $u(x, t)$:

$$\left| \frac{\partial^m u}{\partial x^m} \right| \leq \frac{\|u_0\|_{L_1(\mathbb{R})}}{\pi} \left[\frac{e^{-a_0 t}}{m+1} \left(2 \sum_{k=1}^n |a_k| \right)^{\frac{m+1}{2}} + \frac{C_m}{t^{\frac{m+1}{2}}} \right],$$

откуда получаем, что

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\partial^m u(x, t)}{\partial x^m} = 0$$

равномерно по $x \in \mathbb{R}$ со скоростью сходимости $t^{-\frac{m+1}{2}}$.

На этот раз продифференцируем нашу функцию $\mathcal{E}(x, t)$ дополнительно по переменной t , а затем выполним привычную оценку:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{m+1} \mathcal{E}}{\partial x^m \partial t} &= \int_0^{+\infty} (-\xi)^m \sum_{k=1}^n a_k \sin h_k \xi e^{-t(\xi^2 - \sum_{k=1}^n a_k \cos h_k \xi)} \sin \left(x\xi - t \sum_{k=1}^n a_k \sin h_k \xi + \frac{\pi m}{2} \right) d\xi \\ &\quad - \int_0^{+\infty} (-\xi)^m \left(\xi^2 - \sum_{k=1}^n a_k \cos h_k \xi \right) e^{-t(\xi^2 - \sum_{k=1}^n a_k \cos h_k \xi)} \cos \left(x\xi - t \sum_{k=1}^n a_k \sin h_k \xi + \frac{\pi m}{2} \right) d\xi \\ &= \int_0^{+\infty} (-1)^{m+1} (-\xi)^{m+2} e^{-t(\xi^2 - \sum_{k=1}^n a_k \cos h_k \xi)} \cos \left(x\xi - t \sum_{k=1}^n a_k \sin h_k \xi + \frac{\pi m}{2} \right) d\xi \\ &\quad + \int_0^{+\infty} (-\xi)^m e^{-t(\xi^2 - \sum_{k=1}^n a_k \cos h_k \xi)} \sum_{k=1}^n a_k \cos \left((x - h_k)\xi - t \sum_{k=1}^n a_k \sin h_k \xi + \frac{\pi m}{2} \right) d\xi, \end{aligned}$$

следовательно,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^{m+1} \mathcal{E}}{\partial x^m \partial t} \right| &\leq \int_0^{+\infty} \xi^{m+2} e^{-t(\xi^2 - \sum_{k=1}^n a_k \cos h_k \xi)} d\xi + \sum_{k=1}^n |a_k| \int_0^{+\infty} \xi^m e^{-t(\xi^2 - \sum_{k=1}^n a_k \cos h_k \xi)} d\xi \\ &\leq \frac{\xi^{m+3}}{m+3} e^{-a_0 t} + C_1 \left(\frac{2}{t} \right)^{\frac{m+3}{2}} + \sum_{k=1}^n |a_k| \left(\frac{\xi^{m+1}}{m+1} e^{-a_0 t} + C_2 \left(\frac{2}{t} \right)^{\frac{m+1}{2}} \right) \\ &\leq \tilde{C} e^{-a_0 t} + \tilde{C}_1 \frac{1}{t^{\frac{m+3}{2}}} + \tilde{C}_0 \frac{1}{t^{\frac{m+1}{2}}}. \end{aligned}$$

И, переходя к производной порядка $m+n$, получаем оценку:

$$\left| \frac{\partial^{m+n} \mathcal{E}}{\partial x^m \partial t^n} \right| \leq \tilde{C} e^{-a_0 t} + \sum_{j=0}^n \tilde{C}_j \frac{1}{t^{\frac{(m+2j+1)}{2}}}.$$

Можем видеть, что дополнительное дифференцирование функции $\mathcal{E}(x, t)$ (равно как и функции $u(x, t)$) по переменной t не меняет скорости сходимости.

Теорема 3.2. Пусть выполнено условие (3.1). Тогда частные производные решения (2.5) задачи Коши (2.1), (2.2) порядка $m+n$ сходятся к нулю при $t \rightarrow \infty$ равномерно по $x \in \mathbb{R}$. Скорость сходимости оценивается следующими неравенствами:

$$\left| \frac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m \partial t^n} \right| \leq \frac{\|u_0\|_{L_1(\mathbb{R})}}{\pi} \left[\tilde{C} e^{-a_0 t} + \sum_{j=0}^n \tilde{C}_j \frac{1}{t^{\frac{(m+2j+1)}{2}}} \right],$$

где $\tilde{C}$, $\tilde{C}_j$, $j = 0, \dots, n$, постоянные.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данная работа является обобщением и продолжением работы [17], в которой рассматривался лишь один младший член со сдвигом, до случая множественных пространственных сдвигов. Мы построили решение задачи Коши (2.1), (2.2) в виде свертки ядра Пуассона (2.3) и функции в начальном условии (2.2). Затем мы показали, что введенная функция (2.5) в самом деле является решением исходной задачи, доказав, что формальное дифференцирование законно.

Затем мы подвергли тщательному исследованию свойства полученного решения. После получения ядра Пуассона, попытка оценить подынтегральную функцию в ядре оставляла нас с трансцендентным уравнением, из которого, впрочем, мы получали достаточное условие сходимости для нашего решения. Также было получено достаточное условие сходимости нашего интеграла, чуть более грубое, чем описанное выше, однако явно связывающее коэффициенты перед младшими членами и величины пространственных сдвигов в младших членах.

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор искренне благодарит А.Б. Муравника за научное руководство и поддержку, а также организаторов конференции «Уфимская осенняя математическая школа–2024» за предоставленную возможность выступить, а ее участников — за конструктивные и интересные вопросы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Е.И. Галахов, А.Л. Скубачевский. *О сжимающих неотрицательных полугруппах с нелокальными условиями* // Мат. сб. **189**:1, 45–78 (1998).
2. Н.В. Зайцева. *Гиперболические дифференциально-разностные уравнения с нелокальными потенциалами общего вида* // Уфим. мат. ж. **13**:3, 37–44 (2021).
3. А.Б. Муравник. *Функционально-дифференциальные параболические уравнения: интегральные представления и качественные свойства решений задачи Коши* // Соврем. мат., фундам. направл. **52**, 3–141 (2014).
4. В.С. Рабинович. *О разрешимости дифференциально-разностных уравнений на $\mathbb{R}^n$ и в полупространстве* // Докл. акад. наук СССР **243**, 1134–1137 (1978).
5. Л.Е. Россовский. *Эллиптические функционально-дифференциальные уравнения со сжатием и растяжением аргументов неизвестной функции* // Соврем. мат., фундам. направл. **54**, 3–138 (2014).
6. Л.Е. Россовский, А.А. Товсултанов. *Функционально-дифференциальные уравнения с растяжением и симметрией* // Сиб. мат. ж. **63**:4, 911–923 (2022).
7. Л.Е. Россовский, А.Р. Ханалыев. *Коэрцитивная разрешимость нелокальных краевых задач для параболических уравнений* // Соврем. мат., фундам. направл. **62**, 140–151 (2016).
8. А.М. Селицкий, А.Л. Скубачевский. *Вторая краевая задача для параболического дифференциально-разностного уравнения* // Тр. сем. им. И. Г. Петровского **26**, 324–347 (2007).
9. А.Л. Скубачевский. *Краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений и их приложения* // Усп. мат. наук **71**:5, 3–112 (2016).
10. А.Л. Скубачевский. *Неклассические краевые задачи. I* // Соврем. мат., фундам. направл. **26**, 3–132 (2007).
11. А.Л. Скубачевский. *Неклассические краевые задачи. II* // Соврем. мат., фундам. направл. **33**, 3–179 (2009).
12. А.Л. Скубачевский, Р.В. Шамин. *Первая смешанная задача для параболического дифференциально-разностного уравнения* // Мат. заметки **66**:1, 145–153 (1999).

13. Y.O. Belyaeva, A.L. Skubachevskii. *On classical solutions to the first mixed problem for the vlasov-poisson system in an infinite cylinder* // Dokl. Math. **99**:1, 87–90 (2019).
14. Y.O. Belyaeva, A.L. Skubachevskii. *Unique solvability of the first mixed problem for the Vlasov – Poisson system in infinite cylinder* // J. Math. Sci. **244**:6, 930–945 (2020).
15. A.B. Muravnik. *Differential–Difference Elliptic Equations with Nonlocal Potentials in Half–Spaces* // Mathematics **11**:12, 2698 (2023).
16. A.B. Muravnik. *Nonlocal problems and functional–differential equations: theoretical aspects and applications to mathematical modeling* // Math. Model. Nat. Phenom. **14**:6, 601 (2019).
17. A.B. Muravnik, G.L. Rossovskii. *Cauchy Problem with Summable Initial–Value Functions for Parabolic Equations with Translated Potentials* // Mathematics **12**:6, 895 (2024).
18. L.E. Rossovskii, A.A. Tovsultanov. *Elliptic functional differential equation with affine transformations* // J. Math. Anal. Appl. **480**:2, 123403 (2019).
19. A.L. Skubachevskii. *Elliptic Functional Differential Equations and Applications*. Birkhäuser, Basel (1997).

Григорий Леонидович Россовский,
Российский университет дружбы народов им. Патриса Лумумбы,
ул. Миклухо–Маклая, 6,
117198, г. Москва, Россия
МИРЭА — Российский технологический университет,
пр. Вернадского, 78,
119454, г. Москва, Россия
E-mail: grossovski@yandex.ru