

УДК 514.76

О СТЕПЕНИ ГЛАДКОГО ОТОБРАЖЕНИЯ МЕЖДУ ОРБИФОЛДАМИ

А.В. БАГАЕВ, Н.И. ЖУКОВА

Аннотация. В настоящей работе развивается теория степени для собственных отображений между гладкими орбифолдами одинаковой размерности. Определение степени для указанных отображений введено Паскотто и Ротом (2020). Нами предложено новое, более простое определение степени собственных отображений между гладкими ориентированными орбифолдами одинаковой размерности, и показано, что оно эквивалентно определению Паскотто и Рота. Используя новый подход, нами установлена связь между степенью отображения и интегрированием внешних форм на орбифолдах, что важно для физических приложений. Нами получена интегральная формула для степени отображения между орбифолдами, которая является обобщением соответствующей формулы для многообразий. Выявлена специфика степени отображения для компактных орбифолдов.

Ключевые слова: орбифолд, собственное отображение, форма объема, стратификация орбифолда.

Mathematics Subject Classification: 57R18, 57R35, 57R45

1. ВВЕДЕНИЕ. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В данной работе развивается теория степени для собственных отображений между гладкими орбифолдами одинаковой размерности. Понятие степени отображения между гладкими многообразиями введено Брауэром [5]. Брауэр показал, что степень отображения является гомотопическим инвариантом, и применил этот факт к доказательству теоремы о неподвижной точке.

Степень отображения широко используется во многих разделах геометрии и топологии [10]. В частности, степень отображения применяется для доказательства известной теоремы Гаусса о существовании корня произвольного комплексного многочлена. Теоремы Гаусса — Бонне и Пуанкаре — Хопфа могут быть доказаны с использованием понятия степени отображения [10], [14].

В физике степень отображения рассматривается как топологический заряд (топологическое квантовое число). Поэтому теория степени применяется для разработки топологических методов анализа структуры решений нелинейных уравнений математической физики [3], [6], [8], [9]. В [14] предложен новый подход к характеристике монопольных конфигураций в теории Янга — Миллса — Хиггса с калибровочной группой $SU(2)$, использующий степень отображения между гладкими многообразиями.

Паскотто и Рот [12] ввели определение степени отображения между орбифолдами.

A.V. BAGAEV, N.I. ZHUKOVA, ON DEGREE OF SMOOTH MAPS BETWEEN ORBIFOLDS.

© БАГАЕВ А.В., ЖУКОВА Н.И. 2025.

Исследование Н.И. Жуковой поддержано РНФ, грант № 23-71-30008.

Поступила 26 сентября 2024 г.

Орбифолд можно рассматривать как естественное обобщение понятия многообразия. Понятие орбифолда было введено Сатаке под названием V -многообразия [13], а сам термин орбифолд был предложен Терстоном [15], который получил классификацию двумерных компактных орбифолдов и применил ее при классификации замкнутых гладких трехмерных многообразий. Локально n -мерные орбифолды гомеоморфны факторпространству n -мерного арифметического пространства $\mathbb{R}^n$ по конечной группе диффеоморфизмов. При переходе от одной точки орбифолда к другой эта группа может меняться. Строгие определения категории орбифолдов и интегрирования по ним даны в разделе 2.

Орбифолды естественным образом возникают при решении различных задач математики и физики [1]. Так, в математической физике орбифолды используются как пространства распространения струн. В теории слоений орбифолды появляются как пространства слоев.

Целью данной работы является развитие теории степени отображений между орбифолдами. В разделе 3.1 мы напомним определение степени, принадлежащее Паскотто и Роту [12]. В разделе 3.2 мы вводим новое, более простое определение степени собственного отображения между связными ориентированными гладкими орбифолдами одинаковой размерности. Новизна нашего подхода заключается в том, что для определения степени отображения между орбифолдами достаточно рассматривать только регулярные значения этого отображения, которые являются регулярными точками орбифолда. Мы доказываем, что наше определение эквивалентно соответствующему определению Паскотто и Рота.

Применяя предложенный нами подход, в разделе 3.3 мы доказываем теорему 1.1, которая является обобщением на орбифолды известного утверждения для многообразий.

Теорема 1.1. Пусть $f: \mathcal{N}_1 \rightarrow \mathcal{N}_2$ — собственное отображение между связными ориентированными гладкими орбифолдами одной размерности $n \in \mathbb{N}$. Тогда для любой n -формы ω с компактным носителем на $\mathcal{N}_2$ имеет место равенство

$$\int_{\mathcal{N}_1} f^* \omega = \deg(f) \int_{\mathcal{N}_2} \omega, \quad (1.1)$$

где $\deg(f)$ — степень отображения f .

В разделе 3.4 получена следующая интегральная формула.

Теорема 1.2. Пусть $f: \mathcal{N}_1 \rightarrow \mathcal{N}_2$ — собственное отображение связных ориентированных орбифолдов одной размерности $n \in \mathbb{N}$, Ω — форма объема на компактном орбифолде $\mathcal{N}_2$, заданная римановой метрикой g , $\text{Vol}(\mathcal{N}_2)$ — объем орбифолда $\mathcal{N}_2$. Тогда степень отображения f удовлетворяет равенству

$$\deg(f) = \frac{1}{\text{Vol}(\mathcal{N}_2)} \int_{\mathcal{N}_1} f^* \Omega. \quad (1.2)$$

Кроме того, правая часть равенства (1.2) не зависит от выбора римановой метрики g на $\mathcal{N}_2$.

Формула (1.2) позволяет распространить понятие топологического заряда на векторные поля, заданные на орбифолдах.

В разделе 3.5 мы напомним определения накрывающего и регулярного накрывающего отображения для орбифолдов. Число листов накрывающего отображения $f: \mathcal{N}_1 \rightarrow \mathcal{N}_2$ определяется как число прообразов регулярной точки из $\mathcal{N}_2$.

Из теоремы 1.2 вытекает следующее утверждение.

Следствие 1.1. Пусть $\mathcal{N}_1$ и $\mathcal{N}_2$ — связные компактные ориентированные орбифолды одной размерности, $f: \mathcal{N}_1 \rightarrow \mathcal{N}_2$ — сюръективное регулярное отображение. Тогда:

- 1) $f: \mathcal{N}_1 \rightarrow \mathcal{N}_2$ является k -листным регулярным накрывающим отображением, где $k = \deg(f)$;
- 2) степень отображения f удовлетворяет равенству

$$\deg(f) = \frac{\text{Vol}(\mathcal{N}_1)}{\text{Vol}(\mathcal{N}_2)}.$$

Предположения. Многообразия, орбифолды, векторные поля, формы являются гладкими класса C^∞ . Орбифолды (в частности, многообразия) предполагаются связными, если не указано противное. Рассматриваются только открытые окрестности. Предполагается также, что все группы диффеоморфизмов действуют эффективно.

Обозначения. Фактор-пространства X по отношению как к левым, так и к правым действиям группы G обозначаются через X/G . Символ $|G|$ обозначает порядок конечной группы G . Через $\mathbb{N}$ обозначается множество натуральных чисел.

2. ОРБИФОЛДЫ

2.1. Категория орбифолдов. Пусть $\mathcal{N}$ — связное хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой. Пусть $\tilde{U}$ — связное открытое подмножество в n -мерном арифметическом пространстве $\mathbb{R}^n$, Γ_U — конечная группа диффеоморфизмов $\tilde{U}$, $\varphi_U: \tilde{U} \rightarrow \mathcal{N}$ — Γ_U -инвариантное отображение, индуцирующее гомеоморфизм q_U из $\tilde{U}/\Gamma_U$ на открытое подмножество $U = \varphi_U(\tilde{U})$ в $\mathcal{N}$. Тогда тройка $(\tilde{U}, \Gamma_U, \varphi_U)$ называется *орбифолдной картой* на $\mathcal{N}$ с *координатной окрестностью* U .

Рассмотрим две орбифолдные карты $(\tilde{U}, \Gamma_U, \varphi_U)$ и $(\tilde{V}, \Gamma_V, \varphi_V)$ с координатными окрестностями U и V , причем $U \subset V$. Гладкое отображение $\phi_{VU}: \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$ называется *вложением* карты $(\tilde{U}, \Gamma_U, \varphi_U)$ в карту $(\tilde{V}, \Gamma_V, \varphi_V)$, если $\varphi_U = \varphi_V \circ \phi_{VU}$. Заметим, что каждое вложение ϕ_{VU} индуцирует мономорфизм групп $\psi_{VU}: \Gamma_U \rightarrow \Gamma_V$, для которого имеет место равенство

$$\varphi_{VU}(g(u)) = \psi_{VU}(g)(\varphi_{VU}(u)) \quad \forall u \in \tilde{U}, \quad g \in \Gamma_U.$$

Семейство карт $\mathcal{A} = \{(\tilde{U}_\alpha, \Gamma_\alpha, \varphi_\alpha) | \alpha \in J\}$ называется *орбифолдным атласом*, если выполнены следующие два условия:

- 1) множество координатных окрестностей $\{U_\alpha = \varphi_\alpha(\tilde{U}_\alpha) | \alpha \in J\}$ карт из $\mathcal{A}$ образует открытое покрытие топологического пространства $\mathcal{N}$;
- 2) любые две карты из атласа $\mathcal{A}$ совместимы в следующем смысле: если $(\tilde{U}_\alpha, \Gamma_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{A}$ и $(\tilde{U}_\beta, \Gamma_\beta, \varphi_\beta) \in \mathcal{A}$ — две карты с координатными окрестностями U_α и U_β , $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, то для любой точки $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ существуют такая карта $(\tilde{U}_\gamma, \Gamma_\gamma, \varphi_\gamma) \in \mathcal{A}$ с координатной окрестностью U_γ , что $x \in U_\gamma \subset U_\alpha \cap U_\beta$, и два вложения $\varphi_{\alpha\gamma}$ и $\varphi_{\beta\gamma}$ карты $(\tilde{U}_\gamma, \Gamma_\gamma, \varphi_\gamma)$ в карты $(\tilde{U}_\alpha, \Gamma_\alpha, \varphi_\alpha)$ и $(\tilde{U}_\beta, \Gamma_\beta, \varphi_\beta)$, соответственно.

Пара $(\mathcal{N}, \mathcal{A})$, где $\mathcal{A}$ — максимальный (по включению) орбифолдный атлас $\mathcal{A}$, называется *гладким n -мерным орбифолдом*. Далее орбифолд $(\mathcal{N}, \mathcal{A})$ будем также обозначать коротко $\mathcal{N}$.

Заметим, что для каждой точки $x \in \mathcal{N}$ гладкого n -мерного орбифолда $(\mathcal{N}, \mathcal{A})$ существует такая карта $(\tilde{U}, \Gamma_U, \varphi_U) \in \mathcal{A}$, что $\tilde{U}$ является n -мерным арифметическим пространством $\mathbb{R}^n$, $\varphi_U(0) = x$, $0 \in \mathbb{R}^n$, и Γ_U — конечная группа ортогональных преобразований $\mathbb{R}^n$. Такая карта называется *линеаризованной картой* в x .

Для орбифолдных карт $(\tilde{U}, \Gamma_U, \varphi_U)$ и $(\tilde{V}, \Gamma_V, \varphi_V)$ из $\mathcal{A}$ с координатными окрестностями, содержащими $x \in \mathcal{N}$, подгруппы изотропии $(\Gamma_U)_y$ и $(\Gamma_V)_z$ в точках $y \in \varphi_U^{-1}(x)$ и $z \in \varphi_V^{-1}(x)$ изоморфны. Следовательно, для каждой точки $x \in \mathcal{N}$ задана группа $\Gamma_{(x)}$, единственная с точностью до изоморфизма групп. Группа $\Gamma_{(x)}$ называется *орбифолдной группой* в x .

Точка x называется *регулярной*, если ее орбифолдная группа $\Gamma_{(x)}$ тривиальна; в противном случае, точка x называется *сингулярной*.

Как известно [2, Пример 1], в отличие от случая $n = 2$, для $n \geq 3$ гладкий n -мерный орбифолд $\mathcal{N}$ не является, вообще говоря, локально евклидовым пространством. Топологическое пространство орбифолда $\mathcal{N}$ называется *подлежащим пространством*.

Пусть $\mathcal{N}$ и $\mathcal{N}'$ — гладкие орбифолды с атласами $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}'$, соответственно. Непрерывное отображение $f: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}'$ называется *гладким*, если для каждого $x \in \mathcal{N}$ существуют такие карты $(\tilde{V}_\beta, G_\beta, \psi_\beta) \in \mathcal{A}$ и $(\tilde{U}_\alpha, \Gamma_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{A}'$, что $x \in V_\beta = \psi_\beta(\tilde{V}_\beta)$, $f(V_\beta) \subset U_\alpha = \varphi_\alpha(\tilde{U}_\alpha)$, и гладкое отображение $f_{\alpha\beta}: \tilde{V}_\beta \rightarrow \tilde{U}_\alpha$, удовлетворяющее равенству $\varphi_\alpha \circ f_{\alpha\beta} = f \circ \psi_\beta$. Отображение $f_{\alpha\beta}$ называется *представителем* отображения f в картах $(\tilde{V}_\beta, G_\beta, \psi_\beta)$ и $(\tilde{U}_\alpha, \Gamma_\alpha, \varphi_\alpha)$. Отображение $f_{\alpha\beta}$ определено с точностью до композиции с элементами из G_β и Γ_α , соответственно.

Обозначим через $\mathfrak{Orb}$ категорию орбифолдов, в которой объектами являются гладкие орбифолды, а морфизмы — гладкие отображения орбифолдов. Заметим, что категория многообразий является полной подкатегорией категории $\mathfrak{Orb}$.

2.2. Стратификация орбифолдов. Говорят, что две точки гладкого орбифолда $\mathcal{N}$ имеют *один орбифолдный тип*, если существуют окрестности этих точек, изоморфные в категории $\mathfrak{Orb}$. Множество точек одного орбифолдного типа с индуцированной топологией имеют естественную структуру, вообще говоря, несвязного гладкого многообразия [2]. Обозначим через Δ_k объединение таких многообразий размерности k . Отметим, что многообразия точек разного орбифолдного типа могут иметь одну размерность. Подчеркнем, что каждая связная компонента $\Delta_k^{c_j}$ многообразия Δ_k состоит из точек одного орбифолдного типа. Возможно, что $\Delta_k = \emptyset$ для некоторых $k \in \{0, \dots, n-1\}$, где n — размерность гладкого орбифолда $\mathcal{N}$.

Семейство $\Delta(\mathcal{N}) = \{\Delta_k^{c_j} \mid j \in J_k, k \in \{0, \dots, n\}\}$ называется *стратификацией* гладкого n -мерного орбифолда $\mathcal{N}$, а $\Delta_k^{c_j}$ — его *стратами* [7].

Множество регулярных точек определяет страту Δ_n , которая является связным открытым всюду плотным подмножеством в $\mathcal{N}$ и относительно индуцированной гладкой структуры является гладким n -мерным многообразием.

2.3. Интегрирование на орбифолдах. Говорят, что на гладком n -мерном орбифолде $(\mathcal{N}, \mathcal{A})$ задана внешняя p -форма, если для каждой карты $(\tilde{U}_\alpha, \Gamma_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{A}$ на $\tilde{U}_\alpha$ определена внешняя Γ_α -инвариантная p -форма ω_α и для каждого вложения $\phi_{\beta\alpha}: \tilde{U}_\alpha \rightarrow \tilde{U}_\beta$ карты $(\tilde{U}_\alpha, \Gamma_\alpha, \varphi_\alpha)$ в карту $(\tilde{U}_\beta, \Gamma_\beta, \varphi_\beta)$ имеет место равенство $\phi_{\beta\alpha}^* \omega_\beta = \omega_\alpha$.

Пусть $\omega = \{\omega_\alpha\}_{\alpha \in J}$ — внешняя p -форма на орбифолде $(\mathcal{N}, \mathcal{A})$. Заметим, что $\omega = 0$ в $x \in \mathcal{N}$ тогда и только тогда, когда найдется такая линейаризованная карта $(\tilde{U}_\alpha, \Gamma_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{A}$ в $x \in U_\alpha = \varphi_\alpha(\tilde{U}_\alpha)$, что $\omega_\alpha = 0$ в $0 \in \tilde{U}_\alpha = \mathbb{R}^n$. Замыкание множества тех точек орбифолда $\mathcal{N}$, где ω отлична от нуля, называется носителем формы ω и обозначается через $\text{supp } \omega$. Обозначим через $\Gamma_c^p(\mathcal{N})$ множество всех внешних p -форм с компактным носителем на $\mathcal{N}$. Множество $\Gamma_c^p(\mathcal{N})$ относительно поточечных операций сложения и умножения на действительные числа является векторным пространством.

Пусть $f: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}'$ — гладкое отображение орбифолдов, $\omega = \{\omega_\alpha\}_{\alpha \in J}$ — внешняя p -форма на орбифолде $(\mathcal{N}', \mathcal{A}')$. Для каждого $x \in \mathcal{N}$ существуют такие карты $(\tilde{V}_\beta, G_\beta, \psi_\beta) \in \mathcal{A}$ и $(\tilde{U}_\alpha, \Gamma_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{A}'$, что $x \in V_\beta = \psi_\beta(\tilde{V}_\beta)$, $f(V_\beta) \subset U_\alpha = \varphi_\alpha(\tilde{U}_\alpha)$, и представитель $f_{\alpha\beta}: \tilde{V}_\beta \rightarrow \tilde{U}_\alpha$ отображения f в картах $(\tilde{V}_\beta, G_\beta, \psi_\beta)$ и $(\tilde{U}_\alpha, \Gamma_\alpha, \varphi_\alpha)$, что $\varphi_\alpha \circ f_{\alpha\beta} = f \circ \psi_\beta$. Обозначим через $f_{\alpha\beta}^* \omega_\alpha$ прообраз формы ω_α при отображении $f_{\alpha\beta}$. Тогда множество $\{f_{\alpha\beta}^* \omega_\alpha\}_{x \in \mathcal{N}}$ порождает p -форму $f^* \omega$ на орбифолде $(\mathcal{N}, \mathcal{A})$, которая называется прообразом формы ω при отображении f . Таким образом, определено линейное отображение

$$f^*: \Gamma_c^p(\mathcal{N}') \rightarrow \Gamma_c^p(\mathcal{N}): \omega \mapsto f^* \omega.$$

Напомним, что орбифолд $(\mathcal{N}, \mathcal{A})$ называется ориентированным, если для каждого $\alpha \in J$ многообразия $\tilde{U}_\alpha$ ориентированы так, что каждое преобразование $\gamma \in \Gamma_\alpha$ и любое вложение $\phi_{\alpha\beta}: \tilde{U}_\beta \rightarrow \tilde{U}_\alpha$, $\alpha, \beta \in J$, сохраняют ориентацию.

Пусть $(\mathcal{N}, \mathcal{A})$ ориентированный n -мерный орбифолд, ω — внешняя n -форма с компактным носителем на $\mathcal{N}$. Если носитель $\text{supp } \omega$ лежит внутри координатной окрестности U_α некоторой карты $(\tilde{U}_\alpha, \Gamma_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{A}$, то полагают по определению

$$\int_{U_\alpha} \omega = \frac{1}{|\Gamma_\alpha|} \int_{\tilde{U}_\alpha} \omega_\alpha,$$

где $|\Gamma_\alpha|$ — порядок группы Γ_α . В общем случае, компактность носителя $\text{supp } \omega$ влечет существование конечного открытого покрытия $\xi = \{U_k \mid k = 1, \dots, m\}$ носителя $\text{supp } \omega$ координатными окрестностями U_k карт из $\mathcal{A}$ и конечного разбиения единицы, подчиненного ξ ; то есть такого семейства $\{f_k \mid k = 1, \dots, m\}$ гладких функций на $\mathcal{N}$, что:

- (a) $0 \leq f_k(x) \leq 1$ для всех $x \in \mathcal{N}$ и $k \in \{1, \dots, m\}$;
- (b) $\text{supp } f_k \subset U_k$ для всех $k \in \{1, \dots, m\}$;
- (c) $\sum_{k=1}^m f_k(x) = 1$ для всех $x \in \text{supp } \omega$.

Тогда интеграл от внешней n -формы с компактным носителем ω на орбифолде $\mathcal{N}$ задается следующим равенством

$$\int_{\mathcal{N}} \omega = \sum_{k=1}^m \int_{U_k} f_k \omega. \quad (2.1)$$

Известно, что число $\int_{\mathcal{N}} \omega$, определенное формулой (2.1), не зависит от выбора покрытия ξ носителя $\text{supp } \omega$ и разбиения единицы, подчиненного ξ . Таким образом, для каждого гладкого n -мерного орбифолда $\mathcal{N}$ определен линейный оператор

$$\int_{\mathcal{N}} : \Gamma_c^p(\mathcal{N}) \rightarrow \mathbb{R}: \omega \mapsto \int_{\mathcal{N}} \omega.$$

Если $\mathcal{N}$ компактно, то носитель любой формы ω на $\mathcal{N}$ является компактным множеством. Следовательно, интеграл определен от каждой внешней n -формы ω на компактном n -мерном орбифолде $\mathcal{N}$.

Теорема 2.1. Пусть ω — внешняя n -форма с компактным носителем на ориентированном n -мерном орбифолде $\mathcal{N}$. Тогда имеет место следующее равенство

$$\int_{\mathcal{N}} \omega = \int_{\Delta_n} \omega,$$

где Δ_n — n -мерная страта орбифолда $\mathcal{N}$.

Доказательство. Благодаря равенству (2.1) достаточно показать, что

$$\int_{U_k} f_k \omega = \int_{U_k \cap \Delta_n} f_k \omega \quad (2.2)$$

для всех $k \in \{1, \dots, m\}$. Пусть $(\tilde{U}_k, \Gamma_k, \varphi_k)$ — такая орбифолдная карта, что $\varphi_k(\tilde{U}_k) = U_k$. Заметим, что

$$\int_{U_k} f_k \omega = \frac{1}{|\Gamma_k|} \int_{\tilde{U}_k} \tilde{f}_k \omega_k, \quad (2.3)$$

где $\tilde{f}_k := f_k \circ \varphi_k$. Так как Δ_n — открытое и всюду плотное подмножество в $\mathcal{N}$, тогда $\tilde{V}_k := (\varphi_k)^{-1}(U_k \cap \Delta_n)$ открыто и всюду плотно в $\tilde{U}_k$. Принимая это во внимание, а также формулу (2.3), получаем следующие равенства

$$\int_{\tilde{U}_k} f_k \omega = \frac{1}{|\Gamma_k|} \int_{\tilde{U}_k} \tilde{f}_k \omega_k = \frac{1}{|\Gamma_k|} \int_{\tilde{V}_k} \tilde{f}_k \omega_k. \quad (2.4)$$

Поскольку $\tilde{V}_k$ является Γ_k -инвариантным множеством, а Γ_k действует на $\tilde{V}_k$ свободно, ограничение

$$\varphi_k|_{\tilde{V}_k}: \tilde{V}_k \rightarrow U_k \cap \Delta_n$$

является k -листным регулярным накрытием. Поэтому

$$\frac{1}{|\Gamma_k|} \int_{\tilde{V}_k} \tilde{f}_k \omega_k = \int_{U_k \cap \Delta_n} \omega. \quad (2.5)$$

Равенства (2.4) и (2.5) влекут (2.2). $\square$

2.4. Форма объема ориентированного риманова орбифолда. Пусть на ориентированном орбифолде $\mathcal{N}$ с атласом $\mathcal{A} = \{(\tilde{U}_\alpha, \Gamma_\alpha, \varphi_\alpha) | \alpha \in J\}$ задана риманова метрика g . Тогда для каждой карты $(\tilde{U}_\alpha, \Gamma_\alpha, \varphi_\alpha)$, $\alpha \in J$, орбифолда $\mathcal{N}$ определена Γ_α -инвариантная риманова метрика g_α на $\tilde{U}_\alpha$. Пусть (y_α^k) — локальные координаты на $\tilde{U}_\alpha$. Риманова метрика g_α определяет форму объема Ω_α . В локальных координатах (y_α^k) форма Ω_α задается равенством

$$\Omega_\alpha = \sqrt{\det g_\alpha} dy_\alpha^1 \wedge \dots \wedge dy_\alpha^n,$$

где $\det g_\alpha$ — определитель матрицы метрического тензора g_α в локальных координатах (y_α^k) . Так как $\mathcal{N}$ — ориентированный орбифолд, все изометрии из группы Γ_α , а также любое вложение $\phi_{\alpha\beta}: \tilde{U}_\beta \rightarrow \tilde{U}_\alpha$, $\alpha, \beta \in J$, сохраняют ориентацию. Следовательно, форма объема Ω_α является Γ_α -инвариантной, а для любого вложения $\phi_{\alpha\beta}: \tilde{U}_\beta \rightarrow \tilde{U}_\alpha$ формы Ω_α и Ω_β , заданные на $\tilde{U}_\alpha$ и $\tilde{U}_\beta$, соответственно, согласованы: $\Omega_\beta = \phi_{\alpha\beta}^* \Omega_\alpha$. Таким образом, семейство $\Omega = \{\Omega_\alpha\}$ определяет n -форму на $\mathcal{N}$. Такая форма называется *формой объема* на орбифолде $\mathcal{N}$, заданной римановой метрикой g . Заметим, что n -форма $\Omega = \{\Omega_\alpha\}$ не обращается в ноль на $\mathcal{N}$.

Величина

$$\text{Vol}(\mathcal{N}) := \int_{\mathcal{N}} \Omega$$

называется *объемом* орбифолда $\mathcal{N}$. Если орбифолд $\mathcal{N}$ компактен, то $\text{Vol}(\mathcal{N}) < \infty$.

3. СТЕПЕНЬ СОБСТВЕННОГО ОТОБРАЖЕНИЯ ОРБИФОЛДОВ: РАЗЛИЧНЫЕ ПОДХОДЫ

Пусть $\mathcal{N}$ и $\mathcal{N}'$ — гладкие орбифолды. Гладкое отображение $f: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}'$ орбифолдов $\mathcal{N}$ и $\mathcal{N}'$ называется *собственным*, если для любого компактного подмножества $K \subset \mathcal{N}'$ прообраз $f^{-1}(K)$ является компактным в $\mathcal{N}$. Для компактного орбифолда $\mathcal{N}$ каждое гладкое отображение f является собственным.

3.1. Подход Паскотто и Рота. Напомним определение степени собственного отображения орбифолдов, известное из [12].

Пусть $f: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}'$ — гладкое отображение орбифолдов $\mathcal{N}$ и $\mathcal{N}'$. Возьмем произвольную точку $x \in \mathcal{N}$. Пусть $f_{\alpha\beta}: \tilde{V}_\beta \rightarrow \tilde{U}_\alpha$ — представитель отображения f в картах $(\tilde{V}_\beta, G_\beta, \psi_\beta)$ и $(\tilde{U}_\alpha, \Gamma_\alpha, \varphi_\alpha)$, $x \in V_\beta = \psi_\beta(\tilde{V}_\beta)$, $f(V_\beta) \subset U_\alpha = \varphi_\alpha(\tilde{U}_\alpha)$.

Точка $x \in \mathcal{N}$ называется f -регулярной, если дифференциал $df_{\alpha\beta}$ отображения $f_{\alpha\beta}$ в точке $\tilde{x} \in (\psi_\beta)^{-1}(x) \subset \tilde{V}_\beta$ является сюръективным линейным отображением. Можно показать, что определение f -регулярной точки не зависит от выбора карт $(\tilde{V}_\beta, G_\beta, \psi_\beta)$ и $(\tilde{U}_\alpha, \Gamma_\alpha, \varphi_\alpha)$, представителя $f_{\alpha\beta}$ отображения f в этих картах и точки $\tilde{x} \in (\psi_\beta)^{-1}(x)$. Точки называются f -сингулярными, если они не являются f -регулярными.

Если все точки орбифолда $\mathcal{N}$ являются f -регулярными, то отображение $f: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}'$ называется *регулярным*.

Точка $y \in \mathcal{N}'$ называется *регулярным значением*, если каждое $x \in f^{-1}(y)$ является f -регулярной точкой. Обозначим через $\text{Reg}(f)$ множество всех регулярных значений отображения f .

Следующий аналог теоремы Сарда доказан в [4, Теорема 4.1].

Теорема 3.1. Пусть $f: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}'$ — гладкое отображение орбифолдов. Тогда множество $\text{Reg}(f)$ регулярных значений отображения f всюду плотно в $\mathcal{N}'$.

Пусть $f: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}'$ — гладкое собственное отображение n -мерных ориентированных орбифолдов $(\mathcal{N}, \mathcal{A})$ и $(\mathcal{N}', \mathcal{A}')$. Пусть $y \in \text{Reg}(f)$ и $x \in f^{-1}(y)$. Рассмотрим линеаризованные карты $(\tilde{V}_\beta, G_\beta, \psi_\beta)$ и $(\tilde{U}_\alpha, \Gamma_\alpha, \varphi_\alpha)$ в x и y , соответственно. Пусть $f_{\alpha\beta}$ — представитель отображения f в этих картах. Поскольку орбифолды $\mathcal{N}$ и $\mathcal{N}'$ ориентированы, можно считать, что якобианы матриц перехода от одних координат к другим в точках x и y положительны. Если $(\tilde{x}_\beta^m)$ и $(\tilde{y}_\alpha^l)$ — локальные координаты в указанных картах, то знак якобиана $\det \left(\frac{\partial \tilde{y}_\alpha^l}{\partial \tilde{x}_\beta^m} \right)_x$ отображения $\tilde{y}_\alpha^l = \tilde{y}_\alpha^l(\tilde{x}_\beta^m)$ в $0 \in \tilde{V}_\beta = \mathbb{R}^n$ не зависит от выбора карт $(\tilde{V}_\beta, G_\beta, \psi_\beta)$ и $(\tilde{U}_\alpha, \Gamma_\alpha, \varphi_\alpha)$, следовательно, знак $\text{sgn} \left(\det \left(\frac{\partial \tilde{y}_\alpha^l}{\partial \tilde{x}_\beta^m} \right)_x \right)$ полностью определяется точкой x .

Пусть $(\Gamma_\alpha)_y$ и $(G_\beta)_x$ — стационарные подгруппы групп Γ_α и G_β в точках y и x , соответственно. Число

$$\deg(f; y) := \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{sgn} \left(\det \left(\frac{\partial \tilde{y}_\alpha^l}{\partial \tilde{x}_\beta^m} \right)_x \right) \frac{|(\Gamma_\alpha)_y|}{|(G_\beta)_x|} \quad (3.1)$$

называется степенью отображения f в точке y .

В [12] произведение $\mathcal{N} \times [0, 1]$ рассматривается как орбифолд с $(n+1)$ -мерной стратой $\Delta_n \times [0, 1]$, где Δ_n — множество регулярных точек в $\mathcal{N}$. Тогда орбифолдная группа $\Gamma_{(x,t)}$ точки $(x, t) \in \mathcal{N} \times [0, 1]$ изоморфна Γ_x . Пусть $f, g: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}'$ — два собственных отображения орбифолдов. Если существует такое собственное отображение орбифолдов $F: \mathcal{N} \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{N}'$, что

$$F|_{\mathcal{N} \times \{0\}}(x, 0) = f(x), \quad F|_{\mathcal{N} \times \{1\}}(x, 1) = g(x) \quad \forall x \in \mathcal{N},$$

то f и g называются гладко гомотопными.

Согласно [12, Теорема 3.10] для собственного отображения орбифолдов $f: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}'$ число $\deg(f; y)$ не зависит от выбора $y \in \text{Reg}(f)$ и $\deg(f; y)$ является гомотопическим инвариантом.

Таким образом, степень гладкого собственного отображения $f: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}'$ ориентированных орбифолдов одной размерности — это число, задаваемое формулой

$$\deg(f) = \deg(f; y),$$

где y является регулярным значением отображения f .

3.2. Новый подход. Пусть $f: \mathcal{N}_1 \rightarrow \mathcal{N}_2$ — собственное отображение ориентированных n -мерных орбифолдов $\mathcal{N}_1$ и $\mathcal{N}_2$.

Напомним, что подмножество $S \subset X$ всюду плотно в топологическом пространстве X тогда и только тогда, когда $U \cap S \neq \emptyset$ для каждого открытого подмножества $U \subset X$.

Для полноты изложения мы приводим доказательство следующего утверждения, которое используется в дальнейшем.

Лемма 3.1. *Если $f: \mathcal{N}_1 \rightarrow \mathcal{N}_2$ — собственное отображение ориентированных n -мерных орбифолдов, то пересечение $\text{Reg}(f) \cap \Delta_n^{\mathcal{N}_2}$ является открытым всюду плотным подмножеством в $\mathcal{N}_2$.*

Доказательство. Согласно [11, Следствие] каждое непрерывное собственное отображение $f: X \rightarrow Y$ топологического пространства X в метризуемое пространство Y является замкнутым. Поскольку каждый орбифолд метризуем, собственное гладкое отображение между орбифолдами $f: \mathcal{N}_1 \rightarrow \mathcal{N}_2$ является замкнутым. Так как множество f -регулярных точек гладкого отображения орбифолдов открыто в $\mathcal{N}_1$, тогда множество Sing всех f -сингулярных точек отображения f замкнуто в $\mathcal{N}_1$. Следовательно, образ $f(\text{Sing})$ — замкнутое подмножество в $\mathcal{N}_2$. Заметим, что

$$\mathcal{N}_2 = f(\text{Sing}) \sqcup \text{Reg}(f),$$

поэтому $\text{Reg}(f)$ открытое подмножество в $\mathcal{N}_2$. Согласно теореме Сарда для орбифолдов (теорема 3.1) множество $\text{Reg}(f)$ всюду плотно в $\mathcal{N}_2$. Так как $\Delta_n^{\mathcal{N}_2}$ открыто и всюду плотно в $\mathcal{N}_2$, мы получаем, что $\text{Reg}(f) \cap \Delta_n^{\mathcal{N}_2}$ также открыто и всюду плотно в $\mathcal{N}_2$. $\square$

Возьмем $y \in \text{Reg}(f) \cap \Delta_n^{\mathcal{N}_2}$. Так как $y \in \text{Reg}(f)$, каждая точка $x \in f^{-1}(y)$ является f -регулярной. Более того, поскольку $y \in \Delta_n^{\mathcal{N}_2}$, согласно [4, Теорема 4.2] (см. также [12, Следствие 2.7]), каждая точка $x \in f^{-1}(y)$ является регулярной точкой орбифолда $\mathcal{N}_1$, т.е. $x \in \Delta_n^{\mathcal{N}_1}$ (в [12] такие точки x называются гладкими). Пусть $f^{-1}(y) = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$. Тогда $f(x_i) = y$, $1 \leq i \leq k$, где $x_i \in \Delta_n^{\mathcal{N}_1}$ и $y \in \Delta_n^{\mathcal{N}_2}$. Следовательно, в каждой точке x_i существует такая окрестность $U_i \subset \Delta_n^{\mathcal{N}_1}$, что сужение $f|_{U_i}: U_i \rightarrow f(U_i) \subset \text{Reg}(f) \cap \Delta_n^{\mathcal{N}_2}$ является диффеоморфизмом. Пусть (x_i^m) и (y^l) — локальные координаты в окрестностях U_i и $f(U_i)$ точек x_i и y , соответственно. Обозначим через $\det \left(\frac{\partial y^l}{\partial x_i^m} \right)_{x_i}$ якобиан отображения $f|_{U_i}$ в точке x_i . Отметим, что $\det \left(\frac{\partial y^l}{\partial x_i^m} \right)_{x_i} \neq 0$. Определим степень собственного отображения f в произвольной точке $y \in \text{Reg}(f) \cap \Delta_n^{\mathcal{N}_2}$ по следующей формуле

$$\text{Deg}(f; y) := \sum_{i=1}^k \text{sgn} \det \left(\frac{\partial y^l}{\partial x_i^m} \right)_{x_i}. \quad (3.2)$$

Положим по определению

$$\text{Deg}(f) := \text{Deg}(f; y). \quad (3.3)$$

Из равенств (3.1) и (3.2) вытекает, что для каждой точки $y \in \text{Reg}(f) \cap \Delta_n^{\mathcal{N}_2}$ имеет место равенство $\text{Deg}(f; y) = \deg(f; y)$. Согласно [12, Теорема 3.10] величина $\deg(f) = \deg(f; y)$ не зависит ни от выбора точки $y \in \text{Reg}(f)$, ни от гомотопического класса отображения f . В силу равенства $\text{Deg}(f; y) = \deg(f; y)$ мы имеем

$$\text{Deg}(f) = \deg(f). \quad (3.4)$$

Следовательно, предложенное определение степени корректно, т.е. $\text{Deg}(f)$ не зависит от выбора точки $y \in \text{Reg}(f) \cap \Delta_n^{\mathcal{N}_2}$, более того, значение $\text{Deg}(f)$ инвариантно относительно гомотопической эквивалентности. Благодаря равенству $\text{Deg}(f) = \deg(f)$ далее будем обозначать $\text{Deg}(f)$ через $\deg(f)$.

Предложенное нами определение степени отображения, задаваемое формулами (3.2) и (3.3), является более простым, чем определение Паскотто и Рота, поскольку не включает в себя орбифолдные группы. В то же время, наше определение эквивалентно определению Паскотто и Рота.

Таким образом, имеет место следующее утверждение.

Предложение 3.1. Пусть $f: \mathcal{N}_1 \rightarrow \mathcal{N}_2$ — собственное отображение орбифолдов размерности n , $M_2 := \text{Reg}(f) \cap \Delta_n^{\mathcal{N}_2}$, $M_1 := f^{-1}(M_2)$ и $F := f|_{M_1}$. Тогда $F: M_1 \rightarrow M_2$ — собственное отображение открытых подмногообразий в $\mathcal{N}_1$ и $\mathcal{N}_2$, соответственно, которые могут быть несвязными, причем степени $\deg(f)$ и $\deg(F)$ равны:

$$\deg(f) = \deg(F). \quad (3.5)$$

3.3. Доказательство теоремы 1.1. Пусть $M_2 := \text{Reg}(f) \cap \Delta_n^{\mathcal{N}_2}$, $M_1 := f^{-1}(M_2)$ и $F := f|_{M_1}$. Согласно предложению 3.1 $\deg(F) = \deg(f)$. По лемме 3.1 M_2 является открытым всюду плотным подмногообразием в $\mathcal{N}_2$. Заметим, что M_2 — открытое всюду плотное многообразие в $\Delta_n^{\mathcal{N}_2}$. Следовательно, как известно из теории интегрирования на многообразиях, имеет место следующее равенство

$$\int_{\Delta_n^{\mathcal{N}_2}} \omega = \int_{M_2} \omega.$$

С другой стороны, из теоремы 2.1 следует

$$\int_{\mathcal{N}_2} \omega = \int_{\Delta_n^{\mathcal{N}_2}} \omega.$$

Принимая это во внимание, а также равенство $\deg(F) = \deg(f)$, мы получаем

$$\deg(f) \int_{\mathcal{N}_2} \omega = \deg(F) \int_{M_2} \omega. \quad (3.6)$$

Докажем, что

$$\int_{\mathcal{N}_1} f^* \omega = \int_{M_1} f^* \omega. \quad (3.7)$$

Согласно теореме 2.1 имеем

$$\int_{\mathcal{N}_1} f^* \omega = \int_{\Delta_n^{\mathcal{N}_1}} f^* \omega.$$

Проверим равенство

$$\int_{\Delta_n^{\mathcal{N}_1}} f^* \omega = \int_{M_1} f^* \omega. \quad (3.8)$$

Заметим, что точки из $\Delta_n^{\mathcal{N}_1}$ могут быть как f -сингулярными, так и f -регулярными.

Пусть точка $x \in \Delta_n^{\mathcal{N}_1}$ является f -сингулярной точкой отображения f . Пусть $(\tilde{V}_\beta, G_\beta, \psi_\beta)$ и $(\tilde{U}_\alpha, \Gamma_\alpha, \varphi_\alpha)$ — линеаризованные карты в x и $f(x)$ с координатными окрестностями V_β и U_α , соответственно. Не теряя общности, будем считать, что $f(V_\beta) \subset U_\alpha$. Обозначим через $f_{\alpha\beta}: \tilde{V}_\beta \rightarrow \tilde{U}_\alpha$ представитель отображения f в этих картах. Заметим, что $G_\beta = \{\text{id}_{\tilde{V}_\beta}\}$ и n -форма ω определяет n -форму ω_α на $\tilde{U}_\alpha$. Следовательно, n -форма $(f_{\alpha\beta})^* \omega_\alpha$ является представителем n -формы $f^* \omega$ на $\tilde{V}_\beta$. Поскольку точка $x = \psi_\beta(0)$ является f -сингулярной, дифференциал $df_{\alpha\beta}: T_0 \tilde{V}_\beta \rightarrow T_0 \tilde{U}_\alpha$ отображения $f_{\alpha\beta}$ в 0 не является изоморфизмом этих векторных пространств. Это означает, что образы $df_{\alpha\beta}(X_1), df_{\alpha\beta}(X_2), \dots, df_{\alpha\beta}(X_n)$ произвольных n векторов $X_1, X_2, \dots, X_n \in T_0 \tilde{V}_\beta$ являются линейно зависимыми, поэтому n -форма $(f_{\alpha\beta})^* \omega_\alpha$ равна нулю в точке $0 \in \tilde{V}_\beta$. Следовательно, n -форма $f^* \omega$ равна нулю в точке x . Таким образом, в каждой f -сингулярной точке $x \in \Delta_n^{\mathcal{N}_1}$ n -форма $f^* \omega$ равна нулю и мы можем не учитывать f -сингулярные точки при интегрировании по $\Delta_n^{\mathcal{N}_1}$.

Пусть $x \in \Delta_n^{\mathcal{N}_1}$ — f -регулярная точка отображения f . Поскольку множество f -регулярных точек открыто в $\mathcal{N}_1$, существует такая карта $(\tilde{V}, \Gamma_V, \varphi_V)$ в $x \in V$ с координатной окрестностью $V \subset \Delta_n^{\mathcal{N}_1}$, что каждая точка из V является f -регулярной. Обозначим через $\tilde{f}: \tilde{V} \rightarrow \tilde{U}$ представителя отображения f в картах $(\tilde{V}, \Gamma_V, \varphi_V)$ и $(\tilde{U}, \Gamma_U, \varphi_U)$, где $(\tilde{U}, \Gamma_U, \varphi_U)$ — карта в точке $f(x)$ с координатной окрестностью U . Не теряя общности, можно считать, что $f(V) = U$. Тогда $\tilde{f}$ — диффеоморфизм $\tilde{V}$ на образ $\tilde{f}(\tilde{V}) = \tilde{U}$. Согласно лемме 3.1 пересечение $M_2 = \text{Reg}(f) \cap \Delta_n^{\mathcal{N}_2}$ открыто и всюду плотно в $\mathcal{N}_2$. Следовательно, пересечение $U \cap M_2$ открыто и всюду плотно в U и интеграл

$$\int_V f^* \omega$$

достаточно вычислять только по множеству точек $x \in V$, для которых $f(x) \in U \cap M_2$, то есть $x \in M_1$. Таким образом,

$$\int_V f^* \omega = \int_{V \cap M_1} f^* \omega. \quad (3.9)$$

Так как $x \in \Delta_n^{\mathcal{N}_1}$ — произвольная f -регулярная точка, равенство (3.9) влечет равенство (3.8).

Благодаря равенствам $\deg(f) = \deg(F)$, (3.6) и (3.7), доказательство теоремы 1.1 сводится к проверке равенства

$$\int_{M_1} f^* \omega = \deg(f) \int_{M_2} \omega, \quad (3.10)$$

где носитель $\text{supp } \omega$ формы ω лежит в M_2 .

Так как носитель $\text{supp } \omega$ формы ω является компактным подмножеством в M_2 , существует конечное покрытие $\xi = \{U_k\}_{k=1, \dots, m}$ носителя $\text{supp } \omega$ координатными окрестностями U_k . Пусть $\{f_k\}_{k=1, \dots, m}$ — семейство функций на M_2 , задающее конечное разбиение единицы, подчиненное покрытию ξ . По определению

$$\int_{M_2} \omega = \sum_{k=1}^m \int_{U_k} f_k \omega,$$

где $\text{supp } f_k \omega \subset U_k$.

В силу предложения 3.1 отображение $F = f|_{M_1}$ является собственным, следовательно, носитель $\text{supp } f^* \omega$ также компактен. Более того, $\eta = \{V_k = f^{-1}(U_k)\}_{k=1, \dots, m}$ — конечное покрытие $\text{supp } f^* \omega$.

Нетрудно видеть, что семейство $\{g_k := f_k \circ f\}_{k=1, \dots, m}$ является конечным разбиением единицы, подчиненным покрытию η , и $\text{supp}(g_k f^* \omega) \subset V_k \forall k = 1, \dots, m$. Поэтому

$$\int_{M_1} f^* \omega = \sum_{k=1}^m \int_{V_k} g_k f^* \omega.$$

Таким образом, для доказательства равенства (3.10) достаточно проверить следующее равенство

$$\int_{V_k} g_k f^* \omega = \deg(f) \int_{U_k} f_k \omega.$$

Рассмотрим такую произвольную карту $(\tilde{U}, \Gamma_U, \varphi_U)$ с координатной окрестностью $U = \varphi_U(\tilde{U})$, что $\text{supp } \omega \subset U$. В этом случае $\text{supp } f^*\omega \subset W = f^{-1}(U)$. Проверим равенство

$$\int_W f^*\omega = \deg(f) \int_U \omega. \quad (3.11)$$

Вообще говоря, многообразие W является несвязным. Обозначим через W_i , $i = 1, \dots, s$, связные компоненты многообразия W . Для каждого $i = 1, \dots, s$ ограничение $f|_{W_i}: W_i \rightarrow U$ является диффеоморфизмом односвязных многообразий. Без потери общности, можно считать, что W_i — координатная окрестность многообразия M_1 . Пусть (x_i^m) и (y^l) — локальные координаты в W_i и U , соответственно. Запишем диффеоморфизм $f|_{W_i}: W_i \rightarrow U$ в локальных координатах:

$$y^l = y^l(x_i^m) = y^l(x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^n), \quad l, m = 1, \dots, n. \quad (3.12)$$

В координатах (x_i^m) и (y^l) формы ω и $f^*\omega$ имеют вид:

$$\begin{aligned} \omega &= \varphi(y^l) dy^1 \wedge dy^2 \wedge \dots \wedge dy^n, \\ f^*\omega &= \varphi(y^l(x_i^m)) \det \left(\frac{\partial y^l}{\partial x_i^m} \right) dx_i^1 \wedge dx_i^2 \wedge \dots \wedge dx_i^n, \end{aligned}$$

где $\det \left(\frac{\partial y^l}{\partial x_i^m} \right)$ — якобиан замены переменных (3.12). Запишем формулу замены переменных в кратном интеграле

$$\int_U \varphi(y^l) dy^1 \wedge dy^2 \wedge \dots \wedge dy^n = \int_{W_i} \varphi(y^l(x_i^m)) \left| \det \left(\frac{\partial y^l}{\partial x_i^m} \right) \right| dx_i^1 \wedge dx_i^2 \wedge \dots \wedge dx_i^n. \quad (3.13)$$

Заметим, что

$$\det \left(\frac{\partial y^l}{\partial x_i^m} \right) = \text{sgn} \det \left(\frac{\partial y^l}{\partial x_i^m} \right) \left| \det \left(\frac{\partial y^l}{\partial x_i^m} \right) \right|. \quad (3.14)$$

Из (3.13) и (3.14) следует, что

$$\begin{aligned} \int_{W_i} f^*\omega &= \int_{W_i} \varphi(y^l(x_i^m)) \det \left(\frac{\partial y^l}{\partial x_i^m} \right) dx_i^1 \wedge dx_i^2 \wedge \dots \wedge dx_i^n \\ &= \text{sgn} \det \left(\frac{\partial y^l}{\partial x_i^m} \right) \int_{W_i} \varphi(y^l(x_i^m)) \left| \det \left(\frac{\partial y^l}{\partial x_i^m} \right) \right| dx_i^1 \wedge dx_i^2 \wedge \dots \wedge dx_i^n \\ &= \text{sgn} \det \left(\frac{\partial y^l}{\partial x_i^m} \right) \int_U \varphi(y^l) dy^1 \wedge dy^2 \wedge \dots \wedge dy^n = \text{sgn} \det \left(\frac{\partial y^l}{\partial x_i^m} \right) \int_U \omega. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\int_{W_i} f^*\omega = \text{sgn} \det \left(\frac{\partial y^l}{\partial x_i^m} \right) \int_U \omega. \quad (3.15)$$

Суммируя равенства (3.15) по $i \in \{1, \dots, s\}$ и используя определение степени собственного отображения между гладкими многообразиями, получим следующую цепочку равенств

$$\begin{aligned} \int_W f^*\omega &= \sum_{i=1}^s \int_{W_i} f^*\omega = \sum_{i=1}^s \text{sgn} \det \left(\frac{\partial y^l}{\partial x_i^m} \right) \int_U \omega \\ &= \left(\sum_{i=1}^s \text{sgn} \det \left(\frac{\partial y^l}{\partial x_i^m} \right) \right) \int_U \omega = \deg(f) \int_U \omega. \end{aligned}$$

Таким образом, формула (3.11) верна и теорема 1.1 полностью доказана.

3.4. Доказательство теоремы 1.2. Пусть $f: \mathcal{N}_1 \rightarrow \mathcal{N}_2$ — собственное отображение связных ориентированных гладких орбифолдов одной размерности n , Ω — форма объема на компактном орбифолде $\mathcal{N}_2$, заданная римановой метрикой g , $\text{Vol}(\mathcal{N}_2)$ — объем орбифолда $\mathcal{N}_2$ (см. раздел 2.4). Поскольку орбифолд $\mathcal{N}_2$ компактен, $\text{Vol}(\mathcal{N}_2) < \infty$.

Согласно доказательству теоремы 1.1, n -форма $f^*\Omega$ равна нулю в каждой f -сингулярной точке. Следовательно, вообще говоря, $f^*\Omega$ не является формой объема на $\mathcal{N}_1$ (см. пример 3.1).

Заменяя интеграл в правой части равенства (1.1) на $\text{Vol}(\mathcal{N}_2)$, мы получаем равенство из теоремы 1.2

$$\deg(f) = \frac{1}{\text{Vol}(\mathcal{N}_2)} \int_{\mathcal{N}_1} f^*\Omega.$$

Благодаря теореме 1.1, правая часть этого равенства не зависит от выбора римановой метрики g на $\mathcal{N}_2$.

Таким образом, теорема 1.2 доказана.

3.5. Доказательство следствия 1.1. Напомним понятие накрывающего отображения для орбифолдов [15, Глава 13]. Гладкое отображение орбифолдов $f: \mathcal{N}_1 \rightarrow \mathcal{N}_2$ называется накрывающим или накрытием, если для каждой точки $x \in \mathcal{N}_2$ существует такая карта $(\tilde{U}, \Gamma, \varphi)$ с координатной окрестностью $U \ni x$, что для каждой связной компоненты U' прообраза $f^{-1}(U)$ существует такой гомеоморфизм $q': \tilde{U}/\Gamma' \rightarrow U'$, что $f|_{U'} \circ \varphi' = \varphi$, где Γ' — некоторая подгруппа группы Γ , а $\varphi': \tilde{U} \rightarrow U'$ является композицией отображения q' с фактор-отображением $\tilde{U} \rightarrow \tilde{U}/\Gamma'$. Карта $(\tilde{U}, \Gamma, \varphi)$ в этом определении называется правильно накрытой.

Пусть $f: \mathcal{N}_1 \rightarrow \mathcal{N}_2$ — накрывающее отображение. Накрывающим преобразованием называется такой автоморфизм $h: \mathcal{N}_1 \rightarrow \mathcal{N}_1$ накрывающего орбифолда $\mathcal{N}_1$, что $f \circ h = f$. Множество $G(f)$ всех накрывающих преобразований накрытия $f: \mathcal{N}_1 \rightarrow \mathcal{N}_2$ определяет группу. Накрытие $f: \mathcal{N}_1 \rightarrow \mathcal{N}_2$ называется регулярным, если $\mathcal{N}_2 = \mathcal{N}_1/G(f)$.

Число листов накрывающего отображения $f: \mathcal{N}_1 \rightarrow \mathcal{N}_2$ определяется как число прообразов точки из $\Delta_n^{\mathcal{N}_2}$.

Перейдем к доказательству следствия 1.1. Пусть $f: \mathcal{N}_1 \rightarrow \mathcal{N}_2$ — сюръективное регулярное отображение между компактными орбифолдами $\mathcal{N}_1$ и $\mathcal{N}_2$. В силу компактности орбифолда $\mathcal{N}_1$ отображение f является собственным. Пусть Ω — форма объема на компактном орбифолде $\mathcal{N}_2$, заданная римановой метрикой g . Поскольку $f: \mathcal{N}_1 \rightarrow \mathcal{N}_2$ — регулярное отображение, $f^*\Omega$ является формой объема на $\mathcal{N}_1$. Обозначим через $\text{Vol}(\mathcal{N}_1)$ объем компактного орбифолда $\mathcal{N}_1$. Тогда формула (1.2) может быть записана в следующем виде

$$\deg(f) = \frac{\text{Vol}(\mathcal{N}_1)}{\text{Vol}(\mathcal{N}_2)},$$

что завершает доказательство утверждения 2) следствия 1.1.

Так как $f: \mathcal{N}_1 \rightarrow \mathcal{N}_2$ является сюръективным регулярным отображением, все точки орбифолда $\mathcal{N}_2$ являются регулярными значениями отображения f , то есть $\text{Reg}(f) = \mathcal{N}_2$, следовательно, $M_2 = \Delta_n^{\mathcal{N}_2}$. Таким образом, $f|_{M_1}: M_1 \rightarrow M_2$ является конечнолистным регулярным накрытием. Обозначим через k число листов этого накрытия. Из (3.10) мы получаем, что $k = \deg(f)$. Итак, утверждение 1) следствия 1.1 доказано.

3.6. Примеры.

Пример 3.1. Пусть $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ отображение окружности $\mathbb{S}^1$ на себя как на Рис. 1. Отображение f является сюръективным собственным отображением. Отметим, что прообразы точек z_1 и z_2 являются компактными множествами в $\mathbb{S}^1$ и представляют собой отрезки: $f^{-1}(z_i) = [x_i, y_i]$, $i = 1, 2$. Точки этих отрезков f -сингулярны, а все остальные точки окружности $\mathbb{S}^1$ являются f -регулярными.

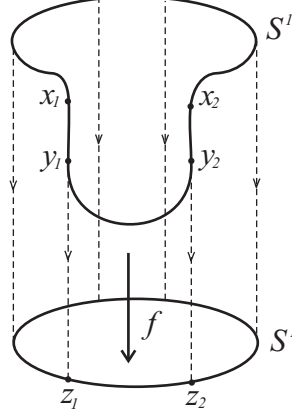


РИС. 1. Форма $f^*\Omega$ не является формой объема.

Пусть на $\mathbb{S}^1$ задана форма объема Ω . Согласно доказательству теоремы 1.1 форма $f^*\Omega$ обращается в ноль в каждой точке отрезков $[x_1, y_1]$ и $[x_2, y_2]$. Таким образом, $f^*\Omega$ не является формой объема на $\mathbb{S}^1$. Очевидно, что степень отображения f равна 1.

Пример 3.2. Пусть $\mathcal{N}_1$ — двумерная сфера $\mathbb{S}^2$, γ — вращение сферы $\mathbb{S}^2$ на угол $\frac{2\pi}{k}$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, вокруг прямой l , проходящей через центр O сферы $\mathbb{S}^2$. Группа Γ , порожденная отображением γ , изоморфна группе $\mathbb{Z}_k$ классов вычетов по модулю k . Факторпространство $\mathcal{N}_2 = \mathbb{S}^2/\Gamma$ гомеоморфно сфере $\mathbb{S}^2$ и является двумерным орбифолдом (см. Рис. 2).

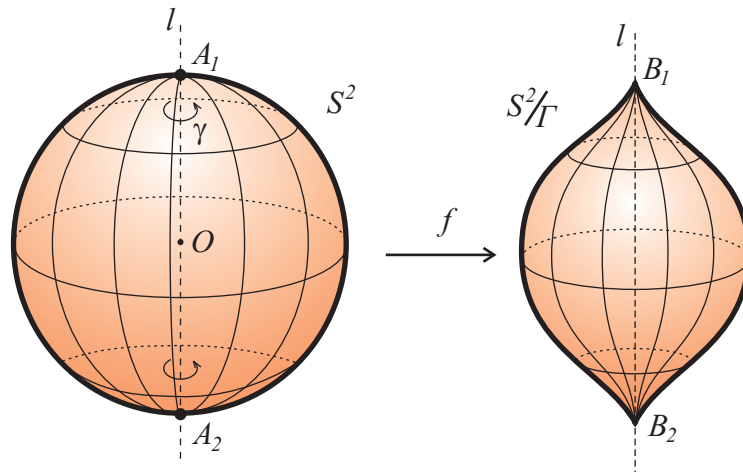


РИС. 2. k -Листное накрытие $f: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2/\Gamma$.

Фактор-отображение $f: \mathcal{N}_1 \rightarrow \mathcal{N}_2$ является k -листным накрытием. Поскольку группа Γ оставляет неподвижными только две точки $A_1, A_2 \in l \cap \mathbb{S}^2$, орбифолд $\mathcal{N}_2$ имеет только две сингулярные точки $B_1 = f(A_1)$, $B_2 = f(A_2)$, остальные точки орбифолда $\mathcal{N}_2$ регулярны. Таким образом, $\mathcal{N}_2$ имеет стратификацию $\{\Delta_0^{\mathcal{N}_2}, \Delta_2^{\mathcal{N}_2}\}$, где $\Delta_0^{\mathcal{N}_2} = \{B_1, B_2\}$, $\Delta_2^{\mathcal{N}_2} = \mathcal{N}_2 \setminus \Delta_0^{\mathcal{N}_2}$.

Отметим, что все точки орбифолда $\mathcal{N}_2$ являются регулярными значениями: $\text{Reg}(f) = \mathcal{N}_2$. Следовательно, $M_2 = \Delta_2^{\mathcal{N}_2}$, $M_1 = f^{-1}(M_2) = \mathbb{S}^2 \setminus \{A_1, A_2\}$. Согласно следствию 1.1, степень отображения f равна k .

Пример 3.3. Пусть $\mathcal{N}_1 = \mathbb{T}^n = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid |z_k| = 1, k = 1, \dots, n\}$ — n -мерный тор. Зададим отображение $\gamma: \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$ формулой $\gamma(z_1, \dots, z_n) = (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n)$, где $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{T}^n$, а $\bar{z}_k$ — комплексное число, сопряженное с z_k , $k = 1, \dots, n$. Группа Γ , порожденная отображением γ , изоморфна группе $\mathbb{Z}_2$ классов вычетов по модулю 2. Фактор-пространство $\mathcal{N}_2 = \mathbb{T}^n / \Gamma$ является n -мерным компактным ориентированным орбифолодом. Группа Γ оставляет неподвижными 2^n точек $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{T}^n$, где $z_k \in \{1, -1\}$, $k = 1, \dots, n$. Поэтому орбифолд $\mathcal{N}_2$ имеет 2^n сингулярных точек, орбифолдная группа которых изоморфна $\mathbb{Z}_2$. В совокупности эти сингулярные точки составляют нульмерную страту $\Delta_0^{\mathcal{N}_2}$, остальные точки орбифолда $\mathcal{N}_2$ регулярны. Таким образом, $\mathcal{N}_2$ имеет стратификацию $\{\Delta_0^{\mathcal{N}_2}, \Delta_n^{\mathcal{N}_2}\}$.

Фактор-отображение $f: \mathcal{N}_1 \rightarrow \mathcal{N}_2$ является 2-листным регулярным накрытием. Все точки орбифолда $\mathcal{N}_2$ являются регулярными значениями отображения f , т.е. $\text{Reg}(f) = \mathcal{N}_2$. Из следствия 1.1 вытекает, что степень отображения f равна 2 и $\text{Vol}(\mathcal{N}_1) = 2 \text{Vol}(\mathcal{N}_2)$.

При $n = 4$ орбифолд $\mathcal{N}_2$ имеет 16 сингулярных точек и называется поверхностью Кумера [1, Пример 1.9].

При $n = 2$ орбифолд $\mathcal{N}_2$ имеет 4 сингулярные точки, гомеоморфен 2-мерной сфере $\mathbb{S}^2$ и называется «Подушкой» (см. Рис. 3).

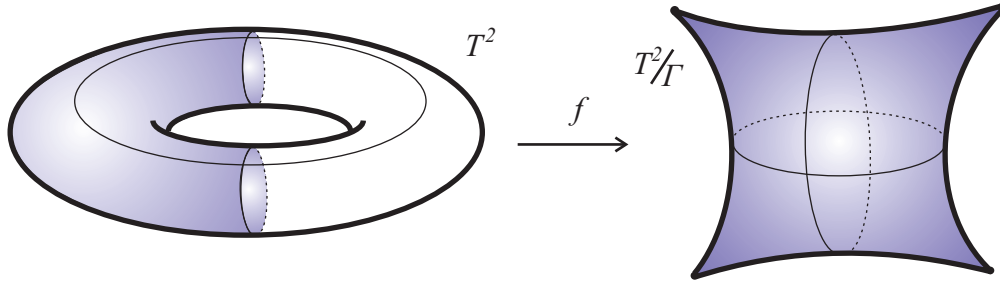


Рис. 3. 2-Листное накрытие орбифолда $\mathcal{N}_2$ тором $\mathbb{T}^2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. A. Adem, J. Leida, Y. Ruan. *Orbifolds and stringy topology*. Cambridge University Press, Cambridge (2007).
2. A.V. Bagaev, N.I. Zhukova. *The isometry group of Riemannian orbifolds* // Sib. Math. J. **48**:4, 579–592 (2007).
3. E. Bick, F.D. Steffen (eds). *Topology and Geometry in Physics*. Springer, Berlin (2005).
4. J.E. Borzellino, V. Brunsten. *Elementary orbifold differential topology* // Topol. Appl. **159**:17, 3583–3589 (2012).
5. L.E.J. Brouwer. *Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten* // Math. Ann. **71**:1, 97–115 (1911).
6. N. Manton, P. Sutcliffe. *Topological Solitons*. Cambridge University Press, Cambridge (2004).
7. I. Moerdijk, D.A. Pronk. *Simplicial cohomology of orbifolds* // Indag. Math. **10**:2, 269–293 (1999).
8. G.L. Naber. *Topology, Geometry, and Gauge Fields*. Springer-Verlag, New York (2000).
9. M. Nakahara. *Geometry, Topology and Physics. 2nd ed.* Institute of Physics (IOP), Bristol (2003).
10. E. Outerelo, J.M. Ruiz. *Mapping degree theory*. Amer. Math. Soc., Providence, RI (2009).
11. R.S. Palais. *When proper maps are closed* // Proc. Am. Math. Soc. **24**:4, 835–836 (1970).
12. F. Pasquotto, T. Rot. *Degree theory for orbifolds* // Topol. Appl. **282**, 107326 (2020).

13. I. Satake. *On a generalization of the notion of manifold* // Proc. Nat. Acad. Sci. USA **42**:6, 359–363 (1956).
14. J. Szczęсны, M. Biesiada, M. Szydłowski. *Topological quantum numbers and curvature — examples and applications* // Int. J. Geom. Methods Mod. Phys. **6**:3, 533–553 (2009).
15. W.P. Thurston. *The geometry and topology of three-manifolds*. Princeton Univ. Math. Dept., Princeton (1979).

Андрей Владимирович Багаев,
Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»,
ул. Большая Печерская, 25/12,
603155, г. Нижний Новгород, Россия
E-mail: abagaev@hse.ru

Нина Ивановна Жукова,
Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»,
ул. Большая Печерская, 25/12,
603155, г. Нижний Новгород, Россия
E-mail: nzhukova@hse.ru