ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 17. № 4 (2025). С. 84-98.

УДК 517.968.72

СУЩЕСТВОВАНИЕ КОНУСА РАСПРОСТРАНЕНИЯ ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО ВОЛНОВОГО ИНТЕГРО–ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С ДРОБНО–ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ ФУНКЦИЕЙ ПАМЯТИ

Н.А. РАУТИАН

Аннотация. Исследуется линейный вольтерров интегро–дифференциальный оператор, который представляет собой одномерный волновой линейный дифференциальный оператор с частными производными, возмущенный интегральным оператором вольтеровой свертки. Функция ядра интегрального оператора представляет собой сумму дробно–экспоненциальных функций (функций Работнова) с положительными коэффициентами. Устанавливается, что носитель фундаментального решения исследуемого интегро–дифференциального оператора локализован в конусе распространения соответствующего одномерного волнового дифференциального оператора. Соответствующее вольтеррово интегро–дифференциальное уравнение описывает колебания одномерного вязкоупргугого стержня, процесс распространения тепла в средах с памятью (уравнение Гуртина — Пипкина) и имеет ряд других важных приложений.

Ключевые слова: вольтерров интегро–дифференциальный оператор с частными производными, фундаментальное решение, преобразование Фурье — Лапласа, дробно–экспоненицальная функция.

Mathematics Subject Classification: 47G20, 45K05, 35R09

1. Введение

Работа посвящена исследованию линейного вольтеррова интегро–дифференциального оператора с частными производными, представляющего собой одномерный волновой линейный дифференциальный оперaратор с частными производными, возмущенный интегральным оператором вольтерровой свертки. Операторы подобного вида имеют многочисленные приложения в задачах наследственной механики, теории сильно неоднородных сред, теплопроводности в средах с памятью, кинетической теории газов, биологии, медицине и т. д.

В настоящее время существует обширная литература, посвященная исследованию вольтерровых интегро–дифференциальных уравнений и связанных с ними задач, возникающих в многочисленных приложениях (см., например, работы [3], [4], [6]–[14] и их библиографию).

N.A. Rautian, Existence of propagation cone for one–dimensional wave integro–differential operator with fractional–exponential memory function.

Исследования автора поддержаны Московским центром фундаментальной и прикладной математики МГУ имени М.В. Ломоносова по соглашению № 075-15-2025-345.

Поступила 3 марта 2025 г.

Исследуемый в работе интегро–дифференциальный оператор называется одномерным волновым интегро–дифференциальным оператором с дробно–экспоненциальной функцией памяти. Ядро интегрального оператора свертки представляет собой сумму дробно–экспоненциальных функций (функций Работнова см. [7]) с положительными коэффициентами.

В статье устанавливается существование и единственность фундаментального решения с носителем в конусе для исследуемого интегро–дифференциального оператора. Доказательство основных утверждений работы базируется на применении критерия Пэли — Винера — Владимирова (см. [2], [5]), устанавливающего изоморфизм пространства обобщенных функций медленного роста с носителем в конусе и пространства функций, аналитических в трубчатой области.

Статья состоит из девяти параграфов. Первый параграф является введением. Второй параграф содержит постановку задачи. Третий и четвертый параграфы посвящены формулировке определений конусов, трубчатых областей, преобразования Фурье — Лапласа, пространств обобщенных функций с носителем в конусе, пространств функций, аналитических в трубчатой области, а также формулировке теоремы Пэли — Винера — Владимирова, со ссылками на соответствующие источники. Пятый параграф содержит формулировки основных результатов статьи (три теоремы и одна лемма). Остальные четыре параграфа посвящены доказательству основных результатов, а также доказательству вспомогательных лемм.

Представленные в данной статье результаты являются продолжением и развитием исследований, опубликованных в работах [3], [8], [9], [10]–[14]).

С помощью полученных в статье результатов может быть установлена конечная скорость распространения возмущений для соответствующего одномерного волнового интегро–дифференциального уравнения с дробно–экспоненциальной функцией памяти.

2. Постановка задачи

Обозначим $\mathcal{D} := \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) := C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ — пространство всех финитных бесконечно дифференцируемых в $\mathbb{R}^n$ функций (пространство основных функций), $\mathcal{D}' = \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ — пространство всех обобщенных функций, заданных на пространстве $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ — пространство быстро убывающих функций, $\mathcal{S}' = \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ — пространство всех обобщенных функций медленного роста (см. [1, гл. 2]).

Пусть

$$\mathcal{L}_1(D_t, D_x)u(t,x) := \frac{\partial^2}{\partial t^2}u(t,x) - a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x) + K(t) * \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x) = f(t,x), \tag{2.1}$$

$f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$, линейное вольтеррово интегро–дифференциальное уравнение второго порядка, где константа $a > 0$, знак $*$ обозначает свертку обобщенных функций по переменной t (см. [1, гл. 2, §7.4]), функция $K(t)$ представима в виде суммы

$$K(t) = \sum_{i=1}^{N} c_i K_i(t), \quad c_i > 0, \quad i = 1, \dots, N, \tag{2.2}$$

$K_i\,(t)$ — дробно–экспоненциальные функции (функции Работнова) (см. [7, гл.I]), которые имеют следующий вид

$$K_i(t) = \begin{cases} t^{-\alpha}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\beta_i)^n t^{n(1-\alpha)}}{\Gamma[(n+1)(1-\alpha)]}, & t > 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \tag{2.3}$$

где $0<\alpha<1$, $\Gamma(\cdot)$ — гамма–функция Эйлера, $\beta_i>0$, $i=1,\dots,N$.

Замечание 2.1. *Функция $K_i(t)$, определенная формулой (2.3), при $t>0$ представляет собой обобщенную функцию Миттаг–Леффлера (см. [7, гл. I]):*

$$K_i(t)=t^{-\alpha}E_{1-\alpha,1-\alpha}\left(-\beta_i t^{1-\alpha}\right),\quad t>0.$$

Уравнение (2.1) мы будем называть *одномерным волновым интегро–дифференциальным уравнением с дробно–экспоненциальной функцией памяти (волновым уравнением с памятью).*

Вольтерров интегро–дифференциальный оператор второго порядка

$$\mathcal{L}_1(D_t,D_x):=\frac{\partial^2}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+K(t)*\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \tag{2.4}$$

в левой части уравнения (2.1) будем называть *одномерным волновым интегро–дифференциальным оператором с дробно–экспоненциальной функцией памяти (волновым оператором с памятью).*

Определение 2.1. *Обобщенная функция $\mathcal{E}_1(t,x)\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ называется фундаментальным решением оператора $\mathcal{L}_1(D_t,D_x)$, если*

$$\mathcal{L}_1(D_t,D_x)\mathcal{E}_1(t,x)=\delta(t,x). \tag{2.5}$$

3. Преобразование Фурье — Лапласа в трубчатой области

Рассмотрим в $\mathbb{R}^2$ замкнутый конус

$$\Gamma_1=\left\{(t,x)\in\mathbb{R}^2|\,t\geqslant 0,\,x\in\mathbb{R}\,,at\geqslant|x|\right\}, \tag{3.1}$$

где константа $a>0$. Тогда конус

$$\Gamma_1^*=\left\{(p,q)\in\mathbb{R}^2|\,pt+qx\geqslant 0,\,\forall(t,x)\in\Gamma_1\right\}, \tag{3.2}$$

будем называть *сопряженным конусом* к конусу Γ_1. Обозначим

$$C_1:=\operatorname{int}\Gamma_1^*=\left\{(p,q)\in\mathbb{R}^2|\,pt+qx>0,\,\forall(t,x)\in\Gamma_1\right\}. \tag{3.3}$$

Аналогично, можно рассмотреть замкнутый конус

$$\Gamma_0:=\{t\in\mathbb{R}\,|\,t\geqslant 0\}=:\Gamma_0^* \tag{3.4}$$

в $\mathbb{R}$ и обозначим

$$C_0:=\operatorname{int}\Gamma_0^*=\{p\in\mathbb{R}\,|\,p>0\}. \tag{3.5}$$

Определение 3.1 ([2, гл. II], [5, §12])**.** *Множество*

$$T^{C_1}:=\mathbb{R}^2+iC_1=\left\{(\lambda,\xi)\in\mathbb{C}^2|\ (\operatorname{Re}\lambda,\,\operatorname{Re}\xi)\in\mathbb{R}^2,\,(\operatorname{Im}\lambda,\,\operatorname{Im}\xi)\in C_1\right\}. \tag{3.6}$$

будем называть трубчатой областью в $\mathbb{C}^2$ с основанием C_1.

Замечание 3.1. *Определение трубчатой области можно сформулировать и для конуса C_0, определенного формулой (3.5). В этом случае*

$$T^{C_0}:=\mathbb{R}+iC_0=\{\lambda\in\mathbb{C}|\ \operatorname{Re}\lambda\in\mathbb{R},\,\operatorname{Im}\lambda>0\}. \tag{3.7}$$

Определение 3.2 ([5, §9–10])**.** *Совокупность обобщенных функций из $\mathcal{D}'$, носители которых лежат в конусе Γ_1, обозначим через $\mathcal{D}'(\Gamma_1)$.*

Обозначим через $\mathcal{S}'(\Gamma_1)$ совокупность обобщенных функций из $\mathcal{S}'$ с носителем в Γ_1. Обозначим S'_{Γ_1} пространство обобщенных функций медленного роста в конусе Γ_1.

Совокупность обобщенных функций $f(t)\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, обращающихся в нуль при $t<0$, обозначим через $\mathcal{D}'_+$ (см. [1, §7.7]).

Утверждение 3.1 ([5, §10]). *Пространства $\mathcal{S}'(\Gamma_1)$ и S'_{Γ_1} изоморфны.*

Определение 3.3 ([2, гл. II]). *Пусть $f \in \mathcal{S}'(\Gamma_1)$. Преобразованием Фурье — Лапласа $L[f]$ обобщенной функции f будем называть функцию переменных $(\lambda, \xi) \in T^{C_1}$, задаваемую формулой*

$$L[f](\lambda,\xi) = F\left[f(t,x)e^{-(t\operatorname{Im}\lambda + x\operatorname{Im}\xi)}\right](\operatorname{Re}\lambda, \operatorname{Re}\xi), \quad (t,x)\in\Gamma_1, \quad (\lambda,\xi)\in T^{C_1}, \tag{3.8}$$

где F — преобразование Фурье обобщенной функции .

Замечание 3.2 ([5, §12]). *Преобразование Фурье — Лапласа обобщенной функции $f \in \mathcal{S}'(\Gamma_1)$ можно представить в виде*

$$L[f](\lambda,\xi) = \left(f(t,x), e^{i(t\lambda + x\xi)}\right), \qquad (t,x)\in\Gamma_1. \tag{3.9}$$

Формула (3.9) имеет смысл, т.к. $e^{i(\lambda t + x\xi)} \in S_{\Gamma_1}$ при $(\lambda,\xi)\in T^{C_1}$.

Определение 3.4 ([5, §12]). *Пусть $f(t,x) \in \mathcal{S}'(\Gamma_0)$ по переменной t при каждом фиксированном значении x. Преобразованием Фурье — Лапласа $L_1[f]$ обобщенной функции $f(t,x)$ по переменной t при фиксированном значении x будем называть функцию переменных (λ, x), где $\lambda \in T^{C_0}$, $x\in\mathbb{R}$, задаваемую формулой*

$$L_1[f](\lambda,x) = F_1\left[f(t,x)e^{-t\operatorname{Im}\lambda}\right](\operatorname{Re}\lambda, x), \quad t\in\Gamma_0, \quad \lambda\in T^{C_0}, \quad x\in\mathbb{R}, \tag{3.10}$$

где F_1 — преобразование Фурье обобщенной функции по переменной t при фиксированном значении x.

4. Пространство $H(T^{C_1})$. Изоморфизм пространств $\mathcal{S}'(\Gamma_1)$ и $H(T^{C_1})$

Определения и утверждения этого параграфа содержатся в [5, §12].

Обозначим через $H^{(\alpha,\beta)}(T^{C_1})$, $\alpha \geqslant 0$, $\beta\geqslant 0$, $(\alpha,\beta\in\mathbb{Z})$ совокупность функций, аналитических в трубчатой области T^{C_1} и удовлетворяющих оценке

$$|f(\lambda,\xi)| \leqslant M_f\left(1+|\lambda|^2+|\xi|^2\right)^{\frac{\alpha}{2}}\left[1+\Delta^{-\beta}(\operatorname{Im}\lambda, \operatorname{Im}\xi)\right], \quad (\lambda,\xi)\in T^{C_1}, \tag{4.1}$$

где

$$\Delta(p,q) = \inf_{\substack{(t,x)\in\Gamma_1\\ t^2+x^2=1}} (tp+xq),$$

$(p,q)\in C_1$ — расстояние от точки $(p,q)\in C_1$ до границы конуса C_1, M_f — положительная константа.

Аналогично, обозначим через $H^{(\alpha,\beta)}(T^{C_0})$, $\alpha\geqslant 0$, $\beta\geqslant 0$, $(\alpha,\beta\in\mathbb{Z})$ совокупность функций, аналитических в трубчатой области T^{C_0} и удовлетворяющих оценке

$$|f(\lambda)| \leqslant M_f\left(1+|\lambda|^2\right)^{\frac{\alpha}{2}}\left[1+(\operatorname{Im}\lambda)^{-\beta}\right], \quad \lambda\in T^{C_0}. \tag{4.2}$$

Введем в $H^{(\alpha,\beta)}(H(T^{C_1}))$ топологию в соответствии с оценкой (4.1) с помощью нормы

$$\|f\|_1^{(\alpha,\beta)} = \sup_{(\lambda,\xi)\in T^{C_1}} \frac{|f(\lambda,\xi)|}{(1+|\lambda|^2+|\xi|^2)^{\frac{\alpha}{2}}\left[1+\Delta^{-\beta}(\operatorname{Im}\lambda,\operatorname{Im}\xi)\right]} \tag{4.3}$$

В свою очередь, в $H^{(\alpha,\beta)}(H(T^{C_0}))$ введем топологию в соответствии с оценкой (4.2) с помощью нормы

$$\|f\|_0^{(\alpha,\beta)} = \sup_{\lambda\in T^{C_0}} \frac{|f(\lambda)|}{(1+|\lambda|^2)^{\frac{\alpha}{2}}\left[1+(\operatorname{Im}\lambda)^{-\beta}\right]} \tag{4.4}$$

Замечание 4.1. *Пространства $H^{(\alpha,\beta)}(T^{C_i})$, $i=0,1$ банаховы. Кроме того, если*

$$\alpha' \geqslant \alpha, \qquad \beta' \geqslant \beta,$$

то

$$\|f\|_i^{(\alpha',\beta')} \leqslant \|f\|_i^{(\alpha,\beta)}$$

и, следовательно,

$$H^{(\alpha,\beta)}(H(T^{C_i})) \subset H^{(\alpha',\beta')}(H(T^{C_i})), \qquad i=0,1,$$

причем вложение непрерывно.

Обозначим

$$H(T^{C_i}) := \bigcup_{\alpha\geqslant 0,\, \beta\geqslant 0} H^{(\alpha,\beta)}(T^{C_i}), \quad i=0,1 \tag{4.5}$$

Теорема 4.1 (Пэли — Винера — Владимирова). *Для того, чтобы обобщенная функция $f(t,x)$ принадлежала пространству $\mathcal{S}'(\Gamma_1)$ необходимо и достаточно, чтобы ее преобразование Фурье — Лапласа $L[f](\lambda,\xi)$ принадлежало пространству $H(T^{C_1})$. Пространства $\mathcal{S}'(\Gamma_1)$ и $H(T^{C_1})$ изоморфны, и этот изоморфизм осуществляется преобразованием Фурье — Лапласа. Функция $L[f](\lambda,\xi)$ имеет в $S'(\mathbb{R}^2)$ граничное значение при $(\operatorname{Im}\lambda, \operatorname{Im}\xi) \to (0,0)$, $(\operatorname{Im}\lambda, \operatorname{Im}\xi) \in C'$, равное $F[f](\operatorname{Re}\lambda, \operatorname{Re}\xi)$, т.е. в $S'(\mathbb{R}^2)$ существует предел*

$$(L[f](\lambda,\xi), \varphi(\operatorname{Re}\lambda, \operatorname{Re}\xi)) \xrightarrow[\substack{(\operatorname{Im}\lambda, \operatorname{Im}\xi) \to (0,0) \\ (\operatorname{Im}\lambda, \operatorname{Im}\xi) \in C_1'}]{} (F[f](\operatorname{Re}\lambda, \operatorname{Re}\xi), \varphi(\operatorname{Re}\lambda, \operatorname{Re}\xi)) \tag{4.6}$$

для любого $\varphi(\operatorname{Re}\lambda, \operatorname{Re}\xi) \in S(\mathbb{R}^2)$, где F — преобразование Фурье обобщенной функции, C_1' — любой подконус конуса C_1 с вершиной в нуле, такой, что $\overline{C_1'} \subset C_1$.

Замечание 4.2. *Теорема Пэли — Винера — Владимирова справедлива также для обобщенных функций $f(t,x) \in \mathcal{S}'(\Gamma_0)$ по переменной t при каждом фиксированном значении x, т.е. пространства $\mathcal{S}'(\Gamma_0)$ и $H(T^{C_0})$ изоморфны при каждом фиксированном значении x, и этот изоморфизм осуществляется преобразованием Фурье — Лапласа $L_t[\cdot](\lambda,x)$, определенным формулой (3.10), при каждом фиксированном значении x.*

5. Формулировка результатов

Определение 5.1. *Будем называть символом интегро–дифференциального оператора (2.4) функцию*

$$\hat{\mathcal{L}}_1(\lambda,\xi) := -\left(\lambda^2 - a^2\xi^2 + \hat{K}(\lambda)\xi^2\right), \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad \xi \in \mathbb{C}, \tag{5.1}$$

где

$$\hat{K}(\lambda) := \sum_{i=1}^{N} c_i \hat{K}_i(\lambda), \quad \hat{K}_i(\lambda) := \frac{1}{(-i\lambda)^{(1-\alpha)} + \beta_i}$$

— преобразование Фурье — Лапласа функции ядра интегрального оператора $K_i(t)$, $(i=1,\ldots,N)$, заданного формулой (2.2).

Теорема 5.1. *Пусть конус Γ_1 задан формулой (3.1), а конус $C_1 = \operatorname{int}\Gamma_1^*$ задан формулой (3.3). Тогда интегро–дифференциальный оператор $\mathcal{L}_1(D_t,D_x)$, определенный формулой (2.4), имеет фундаментальное решение $\mathcal{E}_1(t,x) \in \mathcal{D}'(\Gamma_1)$, представимое в виде*

$$\mathcal{E}_1(t,x) = e^{\lambda_0 t}\mathcal{E}_0(t,x), \tag{5.2}$$

где обобщенная функция $\mathcal{E}_0(t,x) \in \mathcal{S}'(\Gamma_1)$, λ_0 — достаточно большое положительное число.

Теорема 5.2. *Пусть конус Γ_1 задан формулой (3.1), конус $C_1 = \operatorname{int}\Gamma_1^*$ задан формулой (3.3) и $\mathcal{E}_1(t,x) \in \mathcal{D}'(\Gamma_1)$ — фундаментальное решение интегро–дифференциального оператора $\mathcal{L}_1(D_t, D_x)$. Тогда носитель фундаментального решения $\operatorname{supp}\mathcal{E}_1(t,x)$ не содержится ни в каком меньшем выпуклом конусе $\tilde{\Gamma}_1 \subset \Gamma_1$ с вершиной в нуле.*

Теорема 5.3. *Пусть конус Γ_1 задан формулой (3.1), а конус $C_1 = \operatorname{int}\Gamma_1^*$ задан формулой (3.3). Тогда фундаментальное решение (5.2) интегро–дифференциального оператора $\mathcal{L}_1(D_t, D_x)$, определенного формулой (2.4), единственно.*

Лемма 5.1. *Для того, чтобы обобщенная функция (5.2) была фундаментальным решением интегро–дифференциального оператора (2.4), необходимо и достаточно, чтобы преобразование Фурье — Лапласа $L[\mathcal{E}_0(t,x)](\lambda,\xi)$ обобщенной функции $\mathcal{E}_0(t,x) \in \mathcal{S}'(\Gamma_1)$ удовлетворяло уравнению*

$$\hat{\mathcal{L}}_1(\lambda + i\lambda_0, \xi) L[\mathcal{E}_0(t,x)](\lambda,\xi) = 1, \tag{5.3}$$

где $\hat{\mathcal{L}}_1(\lambda,\xi)$ символ интегро–дифференциального оператора (2.4), определенный формулой (5.1), и были выполнены следующие условия:

$$\hat{\mathcal{L}}_1(\lambda + i\lambda_0, \xi) \neq 0, \qquad \frac{1}{\hat{\mathcal{L}}_1(\lambda + i\lambda_0, \xi)} \in H(T^{C_1}). \tag{5.4}$$

6. Доказательство леммы 5.1 и теоремы 5.1

Доказательство леммы 5.1. Пусть $\mathcal{E}_1(t,x) = e^{\lambda_0 t}\mathcal{E}_0(t,x)$ фундаментальное решение оператора (2.4). Применяя преобразование Фурье — Лапласа к обеим частям равенства (2.5), получим равенство

$$\hat{\mathcal{L}}_1(\tilde{\lambda},\xi) L[e^{\lambda_0 t}\mathcal{E}_0(t,x)](\tilde{\lambda},\xi) = 1. \tag{6.1}$$

Из свойств преобразования Фурье — Лапласа (см. [2, гл. II, §9]) следует, что

$$L[e^{\lambda_0 t}\mathcal{E}_0(t,x)](\tilde{\lambda},\xi) = L[\mathcal{E}_0(t,x)](\tilde{\lambda} - i\lambda_0, \xi), \qquad (\tilde{\lambda} - i\lambda_0, \xi) \in T^{C_1}.$$

Обозначим $\lambda := \tilde{\lambda} - i\lambda_0$. Тогда уравнение (6.1) принимает вид (5.3). Обобщенная функция $\mathcal{E}_0(t,x)$ принадлежит пространству $\mathcal{S}'(\Gamma_1)$, следовательно, по теореме 4.1, функция $L[\mathcal{E}_0(t,x)](\lambda,\xi)$ принадлежит пространству $H(T^{C_1})$, т.е. выполнены условия (5.4).

Обратно, если функция $L[\mathcal{E}_0(t,x)](\lambda,\xi)$ удовлетворяет уравнению (5.3) и выполнены условия (5.4) то, согласно теореме 4.1, обобщенная функция $\mathcal{E}_0(t,x)$ принадлежит пространству $\mathcal{S}'(\Gamma_1)$ и, при замене переменных $\lambda := \tilde{\lambda} - i\lambda_0$, функция

$$L[\mathcal{E}_0(t,x)](\lambda,\xi) = L[e^{\lambda_0 t}\mathcal{E}_0(t,x)](\tilde{\lambda},\xi)$$

удовлетворяет уравнению (6.1). Следовательно, обобщенная функция

$$\mathcal{E}(t,x) = e^{\lambda_0 t}\mathcal{E}_0(t,x) \in \mathcal{D}'(\Gamma_1)$$

является фундаментальным решением оператора (2.4). Лемма 5.1 доказана. □

Обозначим $\tilde{\lambda} := \lambda + i\lambda_0$, где λ_0 — некоторая константа. Тогда для функции $\hat{\mathcal{L}}_1$, заданной формулой (5.1), справедливо следующее представление:

$$\hat{\mathcal{L}}_1(\tilde{\lambda},\xi) = -\left(\tilde{\lambda}^2 - (a^2 - \hat{K}(\tilde{\lambda}))\xi^2\right) = (a^2 - \hat{K}(\tilde{\lambda}))(\xi - \xi_1(\tilde{\lambda}))(\xi + \xi_1(\tilde{\lambda})), \tag{6.2}$$

где $\pm\xi_1(\tilde\lambda)$ — корни уравнения $\hat{\mathcal{L}}_1(\tilde\lambda,\xi)=0$, т.е.

$$\xi_1(\tilde\lambda)=\frac{\tilde\lambda}{\sqrt{a^2-\hat K(\tilde\lambda)}}. \tag{6.3}$$

Заметим, что для корня $\xi_1(\tilde\lambda)$ при достаточно больших $\lambda_0>0$ справедливо следующее асимптотическое представление

$$\xi_1(\tilde\lambda)=\frac{1}{a}\tilde\lambda+\frac{1}{2a^3}\tilde\lambda\hat K(\tilde\lambda)(1+o(1)),\qquad |\tilde\lambda|\to+\infty. \tag{6.4}$$

Действительно, из формулы (6.3), при достаточно больших $\lambda_0>0$, получаем

$$\xi_1(\tilde\lambda)=\frac{1}{a}\tilde\lambda\left(1-\frac{1}{a^2}\hat K(\tilde\lambda)\right)^{-\frac12}=\frac{1}{a}\tilde\lambda\left(1+\frac{1}{2a^2}\hat K(\tilde\lambda)(1+o(1))\right),\qquad |\tilde\lambda|\to+\infty.$$

Для доказательства теоремы 5.1 и теоремы 5.2 понадобятся следующие вспомогательные леммы 6.1 и 6.2, доказательства которых будут приведены в параграфе 9.

Лемма 6.1. *Выполнены условия:*

1) *Пусть конус C_1 задан формулой (3.3), $(\operatorname{Im}\lambda,\operatorname{Im}\xi)\in C_1$. Тогда $\operatorname{Im}\lambda>0$.*
2) *Пусть $\operatorname{Im}\lambda>0$. Тогда, при достаточно больших $\lambda_0>0$, справедливы неравенства*

$$\operatorname{Im}\left(\tilde\lambda\hat K(\tilde\lambda)\right)>0,\quad \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\operatorname{Im}\left(\tilde\lambda\hat K(\tilde\lambda)\right)>\left|\operatorname{Re}\left(\tilde\lambda\hat K(\tilde\lambda)\right)\right|, \tag{6.5}$$

где $0<\alpha<1$, $\tilde\lambda:=\lambda+i\lambda_0$, и для корня $\xi_1(\tilde\lambda)$, определенного формулой (6.3), справедливо асимптотическое представление

$$\operatorname{Im}\xi_1(\tilde\lambda)=\frac{1}{a}\operatorname{Im}\tilde\lambda+\frac{1}{2a^3}\operatorname{Im}\left(\tilde\lambda\hat K(\tilde\lambda)\right)(1+o(1)),\qquad \operatorname{Im}\tilde\lambda\to+\infty. \tag{6.6}$$

Лемма 6.2. *Пусть конусы Γ_1 и C_1 определяются формулами (3.1)и (3.3), соответственно. Тогда для любых $(\lambda,\xi)\in T^{C_1}$ справедливы следующие неравенства:*

$$\frac{1}{a}(\operatorname{Im}\lambda\pm a\operatorname{Im}\xi)>\Delta(\operatorname{Im}\lambda,\operatorname{Im}\xi), \tag{6.7}$$

где

$$\Delta(\operatorname{Im}\lambda,\operatorname{Im}\xi)=\inf_{\substack{(t,x)\in\Gamma_1\\ t^2+x^2=1}}(t\operatorname{Im}\lambda+x\operatorname{Im}\xi)$$

— расстояние от точки $(\operatorname{Im}\lambda,\operatorname{Im}\xi)\in C_1$ до границы конуса C_1, константа $a>0$ входит в определение конуса Γ_1.

Доказательство теоремы 5.1. Согласно лемме 5.1, обобщенная функция (5.2) является фундаментальным решением интегро–дифференциального оператора (2.4), тогда и только тогда, когда преобразование Фурье — Лапласа $L[\mathcal{E}_0(t,x)](\lambda,\xi)$ обобщенной функции $\mathcal{E}_0(t,x)\in\mathcal{S}'(\Gamma_1)$ удовлетворяет уравнению (5.3) и выполнены условия (5.4). Следовательно, для доказательства теоремы 5.1 достаточно показать, что для некоторого достаточно большого положительного числа λ_0 выполнены условия (5.4).

Согласно условию (4.1), для этого достаточно показать, что найдутся такие числа $\alpha\geqslant0$, $\beta\geqslant0$, $(\alpha,\beta\in\mathbb{Z})$, при которых имеет место оценка

$$\left|\frac{1}{\hat{\mathcal{L}}_1(\lambda+i\lambda_0,\xi)}\right|\leqslant M\left(1+|\lambda|^2+|\xi|^2\right)^{\frac{\alpha}{2}}\left[1+\Delta^{-\beta}(\operatorname{Im}\lambda,\operatorname{Im}\xi)\right],\qquad (\lambda,\xi)\in T^{C_1}, \tag{6.8}$$

где

$$\Delta(p,q)=\inf_{\substack{(t,x)\in\Gamma_1\\ t^2+x^2=1}}(t\,p+x\,q)$$

— расстояние от точки $(p,q) \in C_1$ до границы конуса C_1, M — положительная константа.

Согласно представлению (6.2), для доказательства выполнения условия (6.8), достаточно получить оценки снизу для сомножителей $|a^2 - \hat{K}(\tilde{\lambda})|$, $|\xi - \xi_1(\tilde{\lambda})|$ и $|\xi + \xi_1(\tilde{\lambda})|$ функции $|\hat{\mathcal{L}}_1(\lambda + i\lambda_0, \xi)|$. Пусть $\tilde{\lambda} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где

$$r = |\tilde{\lambda}|, \qquad \varphi = \operatorname{Arg}\tilde{\lambda} \in (-\pi + 2\pi k, \pi + 2\pi k], \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Учитывая утверждения лемм 6.1 и 6.2, а также оценку (9.3), при достаточно больших $\lambda_0 > 0$, получаем следующие оценки:

$$\begin{aligned}
\left|\xi \pm \xi_1(\tilde{\lambda})\right| &\geqslant \frac{1}{a}\left|a\operatorname{Im}\xi_1(\tilde{\lambda}) \pm a\operatorname{Im}\xi\right| = \frac{1}{a}\left|a\operatorname{Im}\xi_1(\tilde{\lambda}) - \operatorname{Im}\lambda + \operatorname{Im}\lambda \pm a\operatorname{Im}\xi\right| \\
&= \frac{1}{a}\left(\lambda_0 + \frac{1}{2a^2}\operatorname{Im}(\tilde{\lambda}\hat{K}(\tilde{\lambda}))(1 + o(1)) + \operatorname{Im}\lambda \pm a\operatorname{Im}\xi\right) \\
&> \frac{1}{a}\left(\operatorname{Im}\lambda \pm a\operatorname{Im}\xi\right) > \Delta(\operatorname{Im}\lambda, \operatorname{Im}\xi)
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
&\left|a^2 - \hat{K}(\tilde{\lambda})\right| \geqslant \left|a^2 - |\hat{K}(\tilde{\lambda})|\right| \geqslant \left|a^2 - \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{|(-i\tilde{\lambda})^{1-\alpha} + \beta_i|}\right| \\
&= \left|a^2 - \sum_{i=1}^{N}\left|r^{1-\alpha}\left(\cos\left((1-\alpha)\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)\right) + i\sin\left((1-\alpha)\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)\right)\right) + \beta_i\right|^{-1}\right| \\
&= \left|a^2 - \sum_{i=1}^{N}\left(\left(r^{1-\alpha}\cos\left((1-\alpha)\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)\right) + \beta_i\right)^2 + r^{2(1-\alpha)}\sin^2\left((1-\alpha)\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)\right)\right)^{-\frac{1}{2}}\right| \\
&\geqslant \left|a^2 - \sum_{i=1}^{N}\left(r^{1-\alpha}\cos\left((1-\alpha)\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)\right) + \beta_i\right)^{-1}\right| > \frac{a^2}{2}
\end{aligned}$$

Наконец, выбирая достаточно большое $\lambda_0 > 0$, из последних двух оценок получаем искомую оценку (6.8) при $\alpha = 0$, $\beta = 2$, $M = \dfrac{2}{a^2}$:

$$\left|\frac{1}{\hat{\mathcal{L}}_1(\lambda + i\lambda_0, \xi)}\right| \leqslant \frac{2}{a^2}\Delta^{-2}(\operatorname{Im}\lambda, \operatorname{Im}\xi) < M\left[1 + \Delta^{-2}(\operatorname{Im}\lambda, \operatorname{Im}\xi)\right], \quad (\lambda, \xi) \in T^{C_1}.$$

Теорема 5.1 доказана. □

7. Доказательство теоремы 5.2

Из теоремы 5.1 следует, что интегро–дифференциальный оператор $\mathcal{L}_1(D_t, D_x)$, заданный формулой (2.4), имеет фундаментальное решение $\mathcal{E}_1(t,x) \in \mathcal{D}'(\Gamma_1)$, представимое в виде (5.2). Рассмотрим преобразование Фурье — Лапласа $L_1[\mathcal{E}_0(t,x)](\lambda, x)$ обобщенной функции $\mathcal{E}_0(t,x) = e^{-\lambda_0 t}\mathcal{E}_1(t,x)$ по переменной t:

$$\hat{\mathcal{E}}_{01}(\lambda, x) := L_1[\mathcal{E}_0(t,x)](\lambda, x) = F_1\left[\mathcal{E}_0(t,x)e^{-t\operatorname{Im}\lambda}\right](\operatorname{Re}\lambda, x), \quad t \in \Gamma_0, \quad \lambda \in T^{C_0},$$

где F_t — преобразование Фурье обобщенной функции по переменной t, конус Γ_0 и трубчатая область T^{C_0} определены формулами (3.4) и (3.7), соответственно.

Для доказательства теоремы 5.2 понадобится следующая вспомогательная лемма 7.1, доказательство которой будет приведено в параграфе 9.

Лемма 7.1. *Пусть* $\tilde{\lambda} := \lambda + i\lambda_0$,

$$A(\tilde{\lambda}) := \frac{1}{2\xi_1(\tilde{\lambda})\left(a^2 - \hat{K}(\tilde{\lambda})\right)}, \tag{7.1}$$

где $\xi_1(\tilde{\lambda})$ *— корень уравнения* $\hat{\mathcal{L}}_1(\tilde{\lambda}, \xi) = 0$, *функция* $\hat{\mathcal{L}}_1(\tilde{\lambda}, \xi)$ *определяется формулой* (6.2). *Тогда*

$$\left|\hat{\mathcal{E}}_{01}(\lambda, x)\right| = \left|A(\tilde{\lambda})\right| e^{-|x| \operatorname{Im} \xi_1(\tilde{\lambda})}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{7.2}$$

Доказательство теоремы 5.2. Согласно теореме 5.1, $\mathcal{E}_0(t,x) \in \mathcal{S}'(\Gamma_1)$, следовательно, $\mathcal{E}_0(t,x) \in \mathcal{S}'(\Gamma_0)$, для любого фиксированного $x \in \mathbb{R}$. Из замечания 4.2 к теореме 4.1 следует, что $L_1[\mathcal{E}_0(t,x)](\lambda, x)$ принадлежит пространству $H(T^{C_0})$ для любого фиксированного $x \in \mathbb{R}$. Поскольку $\mathcal{E}_0(t,x) \in \mathcal{S}'(\Gamma_1)$, носитель функции $\mathcal{E}_0(t,x)$ содержится в конусе

$$\Gamma_1 = \left\{(t,x) \in \mathbb{R}^2 | \, t \geqslant 0, \, x \in \mathbb{R}, \, at \geqslant |x|\right\}.$$

Тогда носитель функции

$$\tilde{\mathcal{E}}_0(t,x) := \mathcal{E}_0\Big(t + \frac{|x|}{a}, x\Big)$$

принадлежит конусу $\Gamma_0 = \{t \in \mathbb{R} \, | \, t \geqslant 0\}$ для любого фиксированного $x \in \mathbb{R}$. Следовательно, ее преобразование Фурье — Лапласа $L_1[\tilde{\mathcal{E}}_0(t,x)](\lambda, x)$ по переменной t для любого фиксированного $x \in \mathbb{R}$ принадлежит пространству $H(T^{C_0})$, т.е. существуют такие $\alpha \geqslant 0$ и $\beta \geqslant 0$, $(\alpha, \beta \in \mathbb{Z})$, что для любого фиксированного $x \in \mathbb{R}$ справедлива оценка

$$\left|L_1[\tilde{\mathcal{E}}_0(t,x)](\lambda, x)\right| \leqslant M \left(1 + |\lambda|^2\right)^{\frac{\alpha}{2}} \left[1 + (\operatorname{Im} \lambda)^{-\beta}\right], \qquad \lambda \in T^{C_0}, \tag{7.3}$$

где M — положительная константа. Кроме того,

$$L_1[\tilde{\mathcal{E}}_0(t,x)](\lambda, x) = L_1[\mathcal{E}_0\left(t + \frac{|x|}{a}, x\right)](\lambda, x) = e^{-i\frac{|x|}{a}\lambda} L_1[\mathcal{E}_0(t,x)](\lambda, x).$$

Следовательно,

$$\left|L_1[\tilde{\mathcal{E}}_0(t,x)](\lambda, x)\right| = e^{\frac{|x|}{a}\operatorname{Im}\lambda} \left|L_1[\mathcal{E}_0\left(t,x\right)](\lambda, x)\right|$$

Отсюда и из оценки (7.3) получаем оценку

$$\begin{aligned} \left|L_1[\mathcal{E}_0\left(t,x\right)](\lambda, x)\right| &= \left|L_1[\tilde{\mathcal{E}}_0(t,x)](\lambda, x)\right| e^{-\frac{|x|}{a}\operatorname{Im}\lambda} \\ &\leqslant M \left(1 + |\lambda|^2\right)^{\frac{\alpha}{2}} \left[1 + (\operatorname{Im} \lambda)^{-\beta}\right] e^{-\frac{|x|}{a}\operatorname{Im}\lambda} \end{aligned} \tag{7.4}$$

при $\lambda \in T^{C_0}$.

Покажем, теперь, что носитель фундаментального решения $\operatorname{supp}\mathcal{E}_1(t,x)$ не содержится ни в каком меньшем выпуклом конусе

$$\Gamma_{1\varepsilon} := \left\{(t,x) \in \mathbb{R}^2 | \, t \geqslant 0, \, x \in \mathbb{R}, \, (a - \varepsilon)t \geqslant |x|\right\} \subset \Gamma_1$$

с вершиной в нуле, где $\varepsilon \in (0, a)$.

Допустим противное, тогда для преобразования Фурье — Лапласа $L_1\left(\mathcal{E}_0(t,x)\right)(\lambda, x)$ обобщенной функции $\mathcal{E}_0(\tilde{t}, x)$ по переменной $\tilde{t}$ справедлива следующая оценка (аналогичная оценке (7.4)):

$$\left|L_1\left(\mathcal{E}_0(t,x)\right)(\lambda, x)\right| \leqslant M_\varepsilon \left(1 + |\lambda|^2\right)^{\frac{\alpha}{2}} \left[1 + (\operatorname{Im} \lambda)^{-\beta}\right] e^{-\frac{|x|}{a-\varepsilon}\operatorname{Im}\lambda}, \tag{7.5}$$

где M_ε — положительная константа. Используя равенство (7.2), получаем следующую оценку

$$e^{-|x| \operatorname{Im} \xi_1(\tilde{\lambda})} \leqslant M_{1\varepsilon} \left(1 + |\lambda|^2\right)^{\frac{\alpha}{2}} \left[1 + (\operatorname{Im} \lambda)^{-\beta}\right] e^{-\frac{|x|}{a-\varepsilon}\operatorname{Im}\lambda}.$$

Далее, полагая $x \neq 0$ и подставляя вместо $\operatorname{Im} \xi_1(\tilde{\lambda})$, соответствующее асимптотическое представление (6.6), получаем, при достаточно больших $\operatorname{Im} \lambda > 0$, следующее неверное неравенство:

$$\frac{\operatorname{Im} \lambda}{a} > \frac{\operatorname{Im} \lambda}{a - \varepsilon}(1 + o(1)), \qquad \operatorname{Im} \lambda \to +\infty.$$

Таким образом, пришли к противоречию, следовательно, носитель фундаментального решения $\operatorname{supp} \mathcal{E}(t, x)$ не содержится ни в каком меньшем выпуклом конусе $\tilde{\Gamma}_1 \subset \Gamma_1$ с вершиной в нуле. Теорема 5.2 доказана. □

8. Доказательство теоремы 5.3

Введем обозначения

$$D_t := \frac{\partial}{\partial t}, \qquad D_x := \frac{\partial}{\partial x}, \qquad P_0(D_t, D_x) := \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \qquad P_1(D_x) := \frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

Допустим, что существует другое фундаментальное решение $\tilde{\mathcal{E}}(t, x)$ оператора (2.4). Рассмотрим обобщенную функцию

$$u(t, x) := \mathcal{E}_1(t, x) - \tilde{\mathcal{E}}(t, x),$$

которая является решением уравнения

$$\mathcal{L}_1(D_t, D_x) u(t, x) = 0, \tag{8.1}$$

где оператор $\mathcal{L}_1(D_t, D_x)$ задан формулой (2.4). Покажем, что уравнение (8.1) имеет только нулевое решение в классе обобщенных функций, для которых существуют свертки

$$K(t) * P_1(D_t, D_x)\tilde{\mathcal{E}}(t, x) \quad \text{и} \quad (u * \mathcal{E}_1)(t, x)$$

(здесь и далее свертка с функцией $K(t)$ означает свертку по переменной t при фиксированном значении x). Действительно,

$$\begin{aligned} u(t, x) &= u(t, x) * \delta(t, x) = u(t, x) * \mathcal{L}_1(D_t, D_x)\mathcal{E}_1(t, x) \\ &= u(t, x) * P_0(D_t, D_x)\mathcal{E}_1(t, x) + u(t, x) * (K(t) * P_1(D_t, D_x)\mathcal{E}_1(t, x)). \end{aligned}$$

Согласно правилу дифференцирования свертки обобщенных функций (см. [1, §7.5]),

$$u(t, x) * P_0(D_t, D_x)\mathcal{E}_1(t, x) = P_0(D_t, D_x)u(t, x) * \mathcal{E}_1(t, x). \tag{8.2}$$

Покажем, что

$$u(t, x) * (K(t) * P_1(D_t, D_x)\mathcal{E}_1(t, x)) = (K(t) * P_1(D_t, D_x)u(t, x)) * \mathcal{E}_1(t, x). \tag{8.3}$$

Поскольку $\mathcal{E}_1(t, x) \in \mathcal{D}'(\Gamma_1)$, тогда $\mathcal{E}_1(t, x) \in \mathcal{D}'_+$ по переменной t при фиксированном значении x, кроме того, $K(t) \in \mathcal{D}'_+$, по определению. Следовательно, выполнены условия теоремы из монографии [1, §7.7], свертка $K(t) * P_1(D_t, D_x)\mathcal{E}_1(t, x)$ существует и представляется в виде формулы (25) из [1, §7.7]:

$$(K(t) * P_1(D_t, D_x)\mathcal{E}_1(t, x), \varphi_x(t)) = (K(t) \times P_1(D_t, D_x)\mathcal{E}_1(\tau, x), \tilde{\eta}_1(t)\tilde{\eta}_2(\tau)\varphi_x(t + \tau))$$

при всех $\varphi_x(t) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, где $\tilde{\eta}_i(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$ $(i = 1, 2)$ любые функции, равные 1 в окрестности полуоси $[0, +\infty)$ и 0 при достаточно больших отрицательных t.

Рассмотрим последовательность функций $\eta_k(t, \tau) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, сходящихся к 1 в $\mathbb{R}^2$, которая используется для определения свертки обобщенных функций (см. [1, §7.4]). Согласно определению свертки обобщенных функций и теореме из монографии [1, §7.7], при всех $\varphi_x(t) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, будем иметь

$$
\begin{aligned}
&(u(t,x) * (K(t) * P_1(D_t,D_x)\mathcal{E}_1(t,x)), \varphi_x(t)) \\
&\quad = \lim_{k\to\infty} (u(t,x) \times (K(\tau) * P_1(D_t,D_x)\mathcal{E}_1(\tau,x)), \eta_k(t,\tau)\varphi_x(t+\tau)) \\
&\quad = \lim_{k\to\infty} ((K(\tau) * P_1(D_t,D_x)\mathcal{E}_1(\tau,x)), (u(t,x), \eta_k(t,\tau)\varphi_x(t+\tau))) \\
&\quad = \lim_{k\to\infty} ((K(\tau) \times P_1(D_t,D_x)\mathcal{E}_1(\tau',x)), \tilde\eta_1(\tau)\tilde\eta_2(\tau')\,(u(t,x), \eta_k(t,\tau+\tau')\varphi_x(t+\tau+\tau'))) \\
&\quad = \lim_{k\to\infty} ((K(\tau) \times P_1(D_t,D_x)\mathcal{E}_1(\tau',x)) \times u(t,x), \tilde\eta_1(\tau)\tilde\eta_2(\tau')\eta_k(t,\tau+\tau')\varphi_x(t+\tau+\tau'))\,.
\end{aligned}
$$

Здесь мы воспользовались леммой из [1, §7.7], согласно которой

$$(u(t,x), \eta_k(t,\tau)\varphi_x(t+\tau)) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

Замечая, что $\tilde\eta_1(\tau)\tilde\eta_2(\tau')\eta_k(t,\tau+\tau')\varphi_x(t+\tau+\tau') \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$, пользуясь коммутативностью и ассоциативностью прямого произведения обобщенных функций [1, §7.2-7.3], и замечая, что

$$(K(\tau) \times P_1(D_t,D_x)u(t,x)) = 0, \qquad \mathcal{E}_1(\tau',x) = 0 \quad \text{при} \quad \tau < 0, \quad \tau' < 0,$$

применяем теорему из [1, §7.7] и совершаем предельный переход в цепочке равенств:

$$
\begin{aligned}
&(u(t,x) * (K(t) * P_1(D_t,D_x)\mathcal{E}_1(t,x)), \varphi_x(t)) \\
&\quad = \lim_{k\to\infty} ((K(\tau) \times P_1(D_t,D_x)u(t,x)) \times \mathcal{E}_1(\tau',x), \tilde\eta_1(\tau)\tilde\eta_2(\tau')\eta_k(t,\tau+\tau')\varphi_x(t+\tau+\tau')) \\
&\quad = ((K(t) * P_1(D_t,D_x)u(t,x)) * \mathcal{E}_1(t,x), \varphi_x(t))\,.
\end{aligned}
$$

Заметим, что свертка $(K(t) * P_1(D_t,D_x)u(t,x)) * \mathcal{E}_1(t,x)$ по переменной x существует, т.к. $\mathcal{E}_1(t,x) \in \mathcal{D}'(\Gamma_1)$, т.е. обобщенная функция $\mathcal{E}_1(t,x)$ является финитной по переменной x при каждом фиксированном значении t (см. [1, §7.6]).

Из формул (8.2) и (8.3) получаем следующую цепочку равенств:

$$u(t,x) = u(t,x) * \delta(t,x) = u(t,x) * \mathcal{L}_1(D_t,D_x)\mathcal{E}_1(t,x) = \mathcal{L}_1(D_t,D_x)u(t,x) * \mathcal{E}_1(t,x) = 0.$$

Теорема 5.3 доказана.

9. Доказательство леммы 6.1, леммы 6.2 и леммы 7.1

Доказательство леммы 6.1. 1) Из определения конусов Γ_1 и C_1 следует, что неравенство

$$t\,\mathrm{Im}\,\lambda + x\,\mathrm{Im}\,\xi > 0$$

выполняется тогда и только тогда, когда $(\mathrm{Im}\,\lambda, \mathrm{Im}\,\xi) \in C_1$ и $(t,x) \in \Gamma_1$. Следовательно, если точка $(t_1,x) \notin \Gamma_1$, т.е. $at_1 < |x|$, то для всех $(\mathrm{Im}\,\lambda, \mathrm{Im}\,\xi) \in C_1$ справедливо неравенство $t_1\,\mathrm{Im}\,\lambda + x\,\mathrm{Im}\,\xi \leqslant 0$, т.е.

$$t\,\mathrm{Im}\,\lambda + x\,\mathrm{Im}\,\xi > 0 \Leftrightarrow at \geqslant |x|, \quad -t_1\,\mathrm{Im}\,\lambda - x\,\mathrm{Im}\,\xi \geqslant 0 \Leftrightarrow -at_1 > -|x|.$$

Таким образом, $(t-t_1)\,\mathrm{Im}\,\lambda > 0$ и $t - t_1 > 0$, следовательно, $\mathrm{Im}\,\lambda > 0$.

2) Пусть $\tilde\lambda = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где

$$r = |\tilde\lambda|, \qquad \varphi = \mathrm{Arg}\,\tilde\lambda \in (-\pi + 2\pi k, \pi + 2\pi k], \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Тогда

$$\left(-i\tilde\lambda\right)^{1-\alpha} = r^{1-\alpha}\left(\cos\left((1-\alpha)\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)\right) + i\sin\left((1-\alpha)\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)\right)\right)$$

и

$$\tilde{\lambda}\hat{K}_i(\tilde{\lambda}) = \frac{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}{r^{1-\alpha}\left(\cos\left((1-\alpha)\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)\right) + i\sin\left((1-\alpha)\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)\right)\right) + \beta_i}, \quad i = 1, \ldots, N.$$

Отсюда получаем

$$\operatorname{Re}\left(\tilde{\lambda}\hat{K}_i(\tilde{\lambda})\right) = \frac{r^{2-\alpha}\sin\left(\alpha\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)\right) + \beta_i r\cos\varphi}{\left(r^{(1-\alpha)}\cos\left((1-\alpha)\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)\right) + \beta_i\right)^2 + r^{2(1-\alpha)}\sin^2\left((1-\alpha)\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)\right)}, \tag{9.1}$$

$$\operatorname{Im}\left(\tilde{\lambda}\hat{K}_i(\tilde{\lambda})\right) = \frac{r^{2-\alpha}\cos\left(\alpha\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)\right) + \beta_i r\sin\varphi}{\left(r^{(1-\alpha)}\cos\left((1-\alpha)\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)\right) + \beta_i\right)^2 + r^{2(1-\alpha)}\sin^2\left((1-\alpha)\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)\right)}. \tag{9.2}$$

Т.к. $\operatorname{Im}\lambda > 0$, выбирая $\lambda_0 > 0$, получаем, что $\operatorname{Im}\tilde{\lambda} > 0$ и $\varphi \in (2\pi k, \pi + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$. Следовательно,

$$\alpha\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) \subset \left(\alpha\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right), \alpha\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)\right) \subset \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right), \quad k \in \mathbb{Z}$$

при $\alpha \in (0,1)$ и

$$\cos\left(\alpha\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)\right) > 0, \quad \alpha \in (0,1). \tag{9.3}$$

Таким образом, при достаточно больших $\lambda_0 > 0$ справедливо неравенство $\operatorname{Im}\left(\tilde{\lambda}\hat{K}_i(\tilde{\lambda})\right) > 0$, $i = 1, .., N$ и, следовательно,

$$\operatorname{Im}\left(\tilde{\lambda}\hat{K}(\tilde{\lambda})\right) > 0.$$

Покажем, что при достаточно больших $\lambda_0 > 0$ и $0 < \alpha < 1$ выполняется второе из неравенств (6.5). Используя представления (9.1), (9.2), получаем, что выражение, которое стоит в числителе разности

$$\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\operatorname{Im}\left(\tilde{\lambda}\hat{K}_i(\tilde{\lambda})\right)\right)^2 - \left(\operatorname{Re}\left(\tilde{\lambda}\hat{K}_i(\tilde{\lambda})\right)\right)^2,$$

имеет вид

$$\operatorname{tg}^2\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\left(r^{2-\alpha}\cos\left(\alpha\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)\right) + \beta_i r\sin\varphi\right)^2 - \left(r^{2-\alpha}\sin\left(\alpha\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)\right) + \beta_i r\cos\varphi\right)^2$$
$$:= A_1(r,\varphi) + A_2(r,\varphi) + A_3(r,\varphi),$$

где

$$A_1(r,\varphi) := r^{2(2-\alpha)}\left[\operatorname{tg}^2\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\cos^2\left(\alpha\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\right) - \sin^2\left(\alpha\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\right)\right],$$
$$A_2(r,\varphi) := 2r^{3-\alpha}\beta_i\left(\operatorname{tg}^2\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\cos\left(\alpha\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\right)\sin\varphi - \sin\left(\alpha\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\right)\cos\varphi\right),$$
$$A_3(r,\varphi) := r^2\beta_i^2\left(\operatorname{tg}^2\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\sin^2\varphi - \cos^2\varphi\right).$$

Заметим, что при $0 < \alpha < 1$ справедлива оценка

$$A_1(r,\varphi) > r^{2(2-\alpha)}\left[\sin^2\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) - \sin^2\left(\alpha\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\right)\right] = r^{2(2-\alpha)}\sin(\alpha(\pi - \varphi))\sin\varphi > 0$$

Кроме того,

$$r = \sqrt{(\operatorname{Re}\lambda)^2 + (\operatorname{Im}\lambda + \lambda_0)^2}, \quad \operatorname{Im}\lambda > 0, \quad 0 < \alpha < 1$$

и

$$2(2-\alpha) = (1-\alpha) + 3 - \alpha > 3 - \alpha = (1-\alpha) + 2 > 2.$$

Таким образом, получаем, что при достаточно больших $\lambda_0 > 0$ сумма $A_1(r,\varphi) + A_2(r,\varphi) + A_3(r,\varphi) > 0$, откуда вытекает справедливость второго из неравенств (6.5).

Рассмотрим асимптотическое представление (6.4). Пусть $\psi(\tilde{\lambda}) = o(1)$ при $|\tilde{\lambda}| \to +\infty$. Покажем, что при достаточно больших $\lambda_0 > 0$, справедливо асимптотическое представление (6.6). Действительно,

$$\operatorname{Im}\left(\psi(\tilde{\lambda})\tilde{\lambda}\hat{K}(\tilde{\lambda})\right) = \operatorname{Im}\left(\psi(\tilde{\lambda})\right)\operatorname{Re}\left(\tilde{\lambda}\hat{K}(\tilde{\lambda})\right) + \operatorname{Re}\left(\psi(\tilde{\lambda})\right)\operatorname{Im}\left(\tilde{\lambda}\hat{K}(\tilde{\lambda})\right).$$

Тогда, учитывая второе неравенство (6.5), получаем оценку

$$\left|\operatorname{Im}\left(\psi(\tilde{\lambda})\tilde{\lambda}\hat{K}(\tilde{\lambda})\right)\right| < \operatorname{Im}\left(\tilde{\lambda}\hat{K}(\tilde{\lambda})\right)\left(\left|\operatorname{Re}\left(\psi(\tilde{\lambda})\right)\right| + \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\left|\operatorname{Im}\left(\psi(\tilde{\lambda})\right)\right|\right)$$

из которой следует, что

$$\operatorname{Im}\left(\psi(\tilde{\lambda})\tilde{\lambda}\hat{K}(\tilde{\lambda})\right) = o\left(\operatorname{Im}\left(\tilde{\lambda}\hat{K}(\tilde{\lambda})\right)\right) \quad \text{при} \quad \operatorname{Im}\tilde{\lambda} \to +\infty.$$

Таким образом, из асимптотического представления (6.4) получаем асимптотическое представление (6.6). Лемма 6.1 доказана. □

Доказательство леммы 6.2. Учитывая п. 1) леммы 6.1, для любых $(\lambda,\xi) \in T^{C_1}$ получаем

$$\begin{aligned}
\Delta(\operatorname{Im}\lambda, \operatorname{Im}\xi) &= \inf_{\substack{at\geqslant|x|\\ t^2+x^2=1}} (t\,\operatorname{Im}\lambda + x\operatorname{Im}\xi)\\
&= \inf_{at\geqslant|x|}\left(\frac{t}{\sqrt{t^2+x^2}}\operatorname{Im}\lambda + \frac{x}{\sqrt{t^2+x^2}}\operatorname{Im}\xi\right)\\
&= \inf_{at\geqslant|x|}\left(\frac{t}{\sqrt{t^2+x^2}}\operatorname{Im}\lambda - \frac{|x|}{\sqrt{t^2+x^2}}|\operatorname{Im}\xi|\right)\\
&= \inf_{at\geqslant|x|}\left(\frac{t}{\sqrt{t^2+x^2}}\operatorname{Im}\lambda - \frac{at}{\sqrt{t^2+x^2}}|\operatorname{Im}\xi|\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\left(\operatorname{Im}\lambda - a|\operatorname{Im}\xi|\right) < \frac{1}{a}\left(\operatorname{Im}\lambda - a|\operatorname{Im}\xi|\right)\\
&\leqslant \frac{1}{a}\left(\operatorname{Im}\lambda + a|\operatorname{Im}\xi|\right),
\end{aligned}$$

где последнее равенство справедливо, т.к.

$$\frac{t}{\sqrt{t^2+x^2}} \geqslant \frac{t}{\sqrt{t^2+(at)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}.$$

Таким образом, получаем оценки (6.7). Лемма 6.2 доказана. □

Доказательство леммы 7.1. Из равенства (5.3) получаем следующее представление для обобщенной функции $L[\mathcal{E}_0(t,x)](\lambda,\xi)$:

$$L[\mathcal{E}_0(t,x)](\lambda,\xi) = \frac{1}{\hat{\mathcal{L}}_1(\lambda+i\lambda_0,\xi)} = \frac{1}{\hat{\mathcal{L}}_1(\tilde{\lambda},\xi)}, \qquad (\lambda,\xi)\in T^{C_1}. \tag{9.4}$$

Используя представление (6.2), получим следующее разложение

$$\frac{1}{\hat{\mathcal{L}}_1(\lambda+i\lambda_0,\xi)} = \frac{1}{\hat{\mathcal{L}}_1(\tilde{\lambda},\xi)} = A(\tilde{\lambda})\left[\frac{1}{\xi-\xi_1(\tilde{\lambda})} - \frac{1}{\xi+\xi_1(\tilde{\lambda})}\right], \tag{9.5}$$

где $\tilde{\lambda} := \lambda + i\lambda_0$, $\xi_1(\tilde{\lambda})$ — корень уравнения $\hat{\mathcal{L}}_1(\tilde{\lambda},\xi) = 0$, который определяется формулой (6.3), $A(\tilde{\lambda})$ определяется формулой (7.1).

Определенное выше преобразование Фурье — Лапласа $\hat{\mathcal{E}}_{01}(\lambda, x) = L_1[\mathcal{E}_0(t,x)](\lambda,x)$ обобщенной функции $\mathcal{E}_0(t,x)$ по переменной t можно представить, как обращение по переменной ξ преобразования Фурье — Лапласа $L_2^{-1}[\hat{\mathcal{E}}_0(\lambda,\xi)](\lambda,x)$ функции

$$\hat{\mathcal{E}}_0(\lambda,\xi) := L[\mathcal{E}_0(t,x)](\lambda,\xi),$$

т.е.

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{E}}_{01}(\lambda,x) &= L_1\left[\mathcal{E}_0(t,x)\right](\lambda,x) = L_2^{-1}\left[L\left[\mathcal{E}_0(t,x)\right](\lambda,\xi)\right](\lambda,x)\\ &= e^{x\operatorname{Im}\xi}F_2^{-1}\left[L\left[\mathcal{E}_0(t,x)\right](\lambda,\xi)\right](\lambda,x) = e^{x\operatorname{Im}\xi}F_2^{-1}\left[\hat{\mathcal{L}}_1^{-1}(\tilde{\lambda},\xi)\right](\lambda,x).\end{aligned}$$

Далее, учитывая представление (9.4), аналитичность функции $\hat{\mathcal{L}}_1^{-1}(\tilde{\lambda},\xi)$ в трубчатой области T^{C_1}, разложение (9.5) и применяя теорему Коши о вычетах при $x \leqslant 0$, $\operatorname{Im}\xi > 0$, $(\lambda,\xi)\in T^{C_1}$ получаем следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{E}}_{01}(\lambda,x) =& e^{x\operatorname{Im}\xi}F_2^{-1}\left[L\left[\mathcal{E}_0(t,x)\right](\lambda,\xi)\right](\lambda,x) = e^{x\operatorname{Im}\xi}F_2^{-1}\left[\hat{\mathcal{L}}_1^{-1}(\tilde{\lambda},\xi)\right](\lambda,x)\\ =& \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{x\operatorname{Im}\xi - ix\operatorname{Re}\xi}}{\hat{\mathcal{L}}_1(\tilde{\lambda},\xi)}d\operatorname{Re}\xi = \frac{1}{2\pi}\lim_{R\to+\infty}\int\limits_{-R}^{R}A(\tilde{\lambda})\left[\frac{1}{\xi-\xi_1(\tilde{\lambda})} - \frac{1}{\xi+\xi_1(\tilde{\lambda})}\right]e^{-ix\xi}d\operatorname{Re}\xi\\ =& \frac{1}{2\pi}\lim_{R\to+\infty}\left[\int\limits_{R}^{R+iR} + \int\limits_{R+iR}^{-R+iR} + \int\limits_{-R+iR}^{-R}\right]\left(A(\tilde{\lambda})\left[\frac{1}{\xi-\xi_1(\tilde{\lambda})} - \frac{1}{\xi+\xi_1(\tilde{\lambda})}\right]e^{-ix\xi}d\operatorname{Re}\xi\right)\\ &+ iA(\tilde{\lambda})e^{-ix\xi_1(\tilde{\lambda})} = iA(\tilde{\lambda})e^{-ix\xi_1(\tilde{\lambda})}.\end{aligned}$$

Последнее равенство вытекает из следующих оценок для интегралов при $x \leqslant 0$, $\operatorname{Im}\xi > 0$, $(\lambda,\xi)\in T^{C_1}$:

$$\begin{aligned}\left|\int\limits_{\pm R}^{\pm R+iR}\frac{e^{-ix\xi}}{\hat{\mathcal{L}}_1(\tilde{\lambda},\xi)}d\xi\right| &= \left|\int\limits_0^R\frac{e^{-ix(\pm R + i\operatorname{Im}\xi)}d\operatorname{Im}\xi}{\tilde{\lambda}^2 + \left(a^2 - \hat{K}(\tilde{\lambda})\right)(\pm R + i\operatorname{Im}\xi)^2}\right|\\ &\leqslant \int\limits_0^R\frac{e^{x\operatorname{Im}\xi}d\operatorname{Im}\xi}{\left|\left|a^2-\hat{K}(\tilde{\lambda})\right|(R^2+(\operatorname{Im}\xi)^2) - |\tilde{\lambda}|^2\right|}\\ &\leqslant \frac{R}{\left|\left|a^2-\hat{K}(\tilde{\lambda})\right|R^2 - |\tilde{\lambda}|^2\right|} \to 0, \qquad R\to+\infty,\\ \left|\int\limits_{R+iR}^{-R+iR}\frac{e^{-ix\xi}}{\hat{\mathcal{L}}_1(\tilde{\lambda},\xi)}d\xi\right| &= \left|\int\limits_R^{-R}\frac{e^{-ix(\operatorname{Re}\xi + iR)}d\operatorname{Re}\xi}{\tilde{\lambda}^2 + \left(a^2 - \hat{K}(\tilde{\lambda})\right)(\operatorname{Re}\xi + iR)^2}\right|\\ &\leqslant \int\limits_{-R}^R\frac{e^{xR}d\operatorname{Re}\xi}{\left|\left|a^2-\hat{K}(\tilde{\lambda})\right|(R^2+(\operatorname{Re}\xi)^2) - |\tilde{\lambda}|^2\right|}\\ &\leqslant \frac{2R}{\left|\left|a^2-\hat{K}(\tilde{\lambda})\right|R^2 - |\tilde{\lambda}|^2\right|} \to 0, \qquad R\to+\infty.\end{aligned}$$

Аналогично, при $x > 0$, $\operatorname{Im}\xi < 0$, $(\lambda,\xi)\in T^{C_1}$ можно установить равенство

$$\hat{\mathcal{E}}_{01}(\lambda,x) = -iA(\tilde{\lambda})e^{ix\xi_1(\tilde{\lambda})}.$$

Лемма 7.1 доказана. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. В.С. Владимиров. *Уравнения математической физики.* М.: Наука (1988).
2. В.С. Владимиров. *Обобщенные функции в математической физике.* М.: Наука (1979).
3. В.В. Власов, Н.А. Раутиан. *Корректная разрешимость вольтерровых интегро–дифференциальных уравнений в гильбертовых пространствах* // Диффер. уравн. **58**:10, 1414–1430 (2022).
4. Д.В. Георгиевский. *Модели теории вязкоупругости.* М.: ЛЕНАНД (2023).
5. Ю.Н. Дрожжинов, Б.И. Завьялов. *Введение в теорию обобщенных функций.* М.: МИАН (2006).
6. А.А. Ильюшин, Б.Е. Победря. *Основы математической теории термовязкоупругости.* М.: Наука (1970).
7. Ю.Н. Работнов. *Элементы наследственной механики твердых тел.* М.: Наука (1977).
8. Н.А. Раутиан. *Экспоненциальная устойчивость полугрупп, порождаемых вольтерровыми интегро–дифференциальными уравнениями* // Уфим. мат. ж. **13**:4, 65–81 (2021).
9. Н.А. Раутиан. *Представления решений вольтерровых интегро–дифференциальных уравнений в гильбертовых пространствах* // Докл. росс. акад. наук, Матем., информ., проц. упр. **517**, 85–91 (2024).
10. G. Amendola, M. Fabrizio, J.M. Golden. *Thermodynamics of Materials with memory. Theory and applications.* Springer, New–York (2012).
11. C.M. Dafermos. *Asymptotic stability in viscoelasticity* // Arch. Ration. Mech. Anal. **37** 297–308 (1970).
12. M.E. Gurtin, A.C. Pipkin. *General theory of heat conduction with finite wave speed* // Arch. Ration. Mech. Anal. **31**:2, 113–126 (1968).
13. R.K. Miller. *An integrodifferential equation for rigid heat conductors with memory* // J. Math. Anal. Appl. **66**:2, 313–332 (1978).
14. J.E. Muñoz Rivera. *Asymptotic behaviour in linear viscoelasticity* // Q. Appl. Math. **52**:4, 629–648 (1994).

Надежда Александровна Раутиан,
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,
механико-математический факультет,
Московский центр фундаментальной и прикладной математики
ГСП–1, Ленинские горы, д. 1,
119991, Москва, Россия
E-mail: nrautian@mail.ru