ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 17. № 4 (2025). С. 74-83.

УДК 517.98

ЗАДАЧА АБЕЛЯ — ГОНЧАРОВА В ЯДРЕ ОПЕРАТОРА СВЕРТКИ

В.В. НАПАЛКОВ (МЛ.), А.А. НУЯТОВ

Аннотация. В работе доказана разрешимость задачи кратной интерполяции и, как следствие, задачи Абеля — Гончарова в ядре оператора свертки, когда нулевая последовательность характеристической функции оператора свертки и узловые точки, являющиеся нулями целой функции, лежат в некоторых углах комплексной плоскости, при этом узлы являются кратными.

Ключевые слова: кратная интерполяция, задача Абеля — Гончарова, оператор свертки, целые функции.

Mathematics Subject Classification: 46A13, 30D20

1. Введение

Задача Абеля — Гончарова — проблема в теории функций комплексного переменного, состоящая в нахождении множества всех функций $f(z)$ из того или иного класса, удовлетворяющих соотношениям

$$f^{(n)}(\lambda_n) = A_n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

где $\{A_n\}$ и $\{\lambda_n\}$ — допустимые для данного класса последовательности комплексных чисел (см. [1, стр. 29]).

Как показано далее, в ядре опрератора свертки задача Абеля — Гончарова является частным случаем многоточечной задачи Валле Пуссена для кратных узлов (или задачи кратной интерполяции) в том же пространстве. Изначально, многоточечная задача Валле Пуссена ставилась для однородного линейного дифференциального уравнения порядка n (см. [11])

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0, \tag{1.1}$$

коэффициенты которого $p_1(x)$, …, $p_{n-1}(x)$, $p_n(x)$ являются непрерывными функциями от x на отрезке $[a,b]$ с некоторым дополнительным условием.

Теорема существования и единственности говорит, что для данной точки x^0 из $[a,b]$ и данных значений y^0, y_1^0, …, y_{n-1}^0 существует одно и только одно решение $y(x)$ уравнения (1.1), удовлетворяющее начальным условиям

$$y(x^0) = y^0, \qquad y'(x^0) = y_1^0, \qquad \ldots, \qquad y^{(n-1)}(x^0) = y_{n-1}^0,$$

но в задачах математической физики и прикладной математики зачастую требуется найти решение уравнения (1.1) в случае, когда не все начальные условия заданы в одной и той же точке

V.V. Napalkov, A.A. Nuyatov, Abel — Goncharov problem in kernel of convolution operator.

Исследование В.В. Напалкова (мл.) выполнено при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках выполнения государственного задания (код научной темы FMRS-2025-0010).

Поступила 4 февраля 2025 г.

x^0. К примеру, для уравнения (1.1) требуется найти решение $y(x)$, график которого проходит через n заданных точек, другими словами, необходимо построить решение (1.1), удовлетворяющее условиям

$$y(a_k) = A_k, \qquad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.2}$$

Валле Пуссеном доказано, что в случае, когда $p_k(x) \in C[a, b]$, $k = 1, 2, \ldots, n$ и выполнено неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} l_k \frac{(b-a)^k}{k!} < 1,$$

где $l_k \geqslant |p_k(x)|$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $x \in [a, b]$, то существует единственное решение задачи (1.1), (1.2) для конечного числа узлов.

В 2001 году в работе [4] доказана разрешимость многоточечной задачи Валле Пуссена в ядре оператора свертки для бесконечного числа узлов, когда узлы принадлежат множеству $\{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$. Заметим, что задача кратной интерполяции рассматривалась в различных областях [2], [3], [8], [9].

2. Постановка задачи

Пусть $H(\mathbb{C})$ — пространство целых функций с топологией равномерной сходимости на компактах, $H^*(\mathbb{C})$ — сопряженное к $H(\mathbb{C})$, $P_{\mathbb{C}}$ — пространство целых функций экспоненциального типа. Функции $\varphi \in P_{\mathbb{C}}$ сопоставим функционал $F \in H^*(\mathbb{C})$ такой, что $\widehat{F}(z) = \varphi(z)$, где $\widehat{F}(z) = \langle F_\lambda, e^{\lambda z} \rangle$ — преобразование Лапласа функционала F. Оператор свертки в $H(\mathbb{C})$ запишем в виде

$$M_\varphi[f](z) = (F_t, f(z+t)), \qquad f \in H(\mathbb{C}).$$

Обозначим $\operatorname{Ker} M_\varphi = \{f \in H(\mathbb{C}) : M_\varphi[f] = 0\}$ — ядро оператора свертки M_φ.

Многоточечную задачу Валле Пуссена (или другими словами задачу кратной интерполяции) в $\operatorname{Ker} M_\varphi$ с узлами $\mu_j \in \mathbb{C}$, являющимися нулями $\psi \in H(\mathbb{C})$, с кратностями q_j, $j = 0, 1, 2, \ldots$, поставим следующим образом: для произвольной последовательности комплексных чисел a_j^k, $j = 0, 1, 2, \ldots$; $k = 0, 1, \ldots, q_j - 1$ существует ли функция $y \in \operatorname{Ker} M_\varphi$ такая, что

$$y^{(k)}(\mu_j) = a_j^k, \quad j = 0, 1, 2, \ldots; \quad k = 0, 1, \ldots, q_j - 1.$$

В работе [5] эта задача решена для случая, когда узлы простые и лежат на вещественной оси. В работе [6] решена задача интерполяции в ядре оператора свертки, когда узлы могут быть комплексные. В данной работе решается задача кратной интерполяции для комплексных узлов, лежащих в некотором угле, частным случаем которой является задача:

$$y^{(k)}(\mu_j) = a_j^k, \quad j = 0, 1, 2, \ldots; \quad k = \overline{0, j}.$$

Значит, в ядре оператора свёртки будет существовать функция $y(z)$, у которой для последовательности комплексных чисел a_0^0, a_1^1, …, a_n^n, … будет выполнено

$$y^{(k)}(\mu_k) = a_k^k.$$

Тем самым получаем задачу Абеля — Гончарова в ядре оператора свертки.

В случае, когда характеристической функцией оператора свёртки является многочлен, оператор свёртки становится линейным дифференциальным оператором конечного порядка с постоянными коэффициентами, а значит, важным частным следствием получаем, что для однородного линейного дифференциального уравнения конечного порядка с постоянными коэффициентами решается задача кратной интерполяции и задача Абеля — Гончарова (единственность пока открытый вопрос). Кроме того, дифференциально–разностный оператор, интегро–дифференциальный оператор, линейный дифференциальный оператор бесконечного порядка с постоянными коэффициентами также являются частным случаем оператора свёртки, и для соответствующих однородных уравнений как следствие решены эти задачи.

3. Предварительные результаты

Введем ряд вспомогательных понятий, которые необходимы для формулировки и доказательства основного результата.

Топология $\tau_{\mathbb{C}}$ пространства $P_{\mathbb{C}}$ определяется как индуктивный предел нормированных весовых пространств

$$B_n = \{\varphi(\lambda) \in P_{\mathbb{C}} : ||\varphi||_n = \sup_{\lambda\in\mathbb{C}} |\varphi(\lambda)|e^{-n|\lambda|} < \infty\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Пусть $S \subset \mathbb{C}$ — множество единственности в $P_{\mathbb{C}}$. Тогда в $P_{\mathbb{C}}$ можно ввести топологию τ_S индуктивного предела пространств

$$B_{n,S} = \{\varphi(\lambda) \in P_{\mathbb{C}} : ||\varphi||_{n,S} = \sup_{\lambda\in S} |\varphi(\lambda)|e^{-n|\lambda|} < \infty\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Для дальнейшего нам понадобится сходимость к нулю в топологии $\tau_{\mathbb{C}}$ (см. [7]): пусть f_m — счетная последовательность функций из $P_{\mathbb{C}}$, тогда $f_m \to 0$ при $m \to \infty$ в топологии $\tau_{\mathbb{C}}$ тогда и только тогда, когда найдутся числа $\sigma > 0$ и $M > 0$ такие, что

(a.1) $|f_m(z)| \leqslant Me^{\sigma|z|} \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad \forall z \in \mathbb{C};$

(b.1) для любого компакта $K_{\mathbb{C}} \subset \mathbb{C}$: $|f_m(z)| \rightrightarrows 0$ при $m \to \infty$, $z \in K_{\mathbb{C}}$.

Введем понятие достаточности множества $S \subset \mathbb{C}$ в $U \subset P_{\mathbb{C}}$ с индуцированной из $P_{\mathbb{C}}$ топологией.

Определение 3.1. *Будем говорить, что S — достаточное множество на U, если из условий*

(a.2) *для любой последовательности функций $q_k(z) \in U$ найдутся числа $\sigma > 0$ и $M > 0$ такие, что*

$$|q_k(z)| \leqslant Me^{\sigma|z|} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall z \in S;$$

(b.2) *для любого компакта $K_S \subset S : |q_k(z)| \rightrightarrows 0$ при $k \to \infty$, $z \in K_S$*

следует сходимость этой последовательности на U.

Условия (a.2) и (b.2) задают сходимость к нулю в топологии τ_S.

Функция $\psi(z) \in H(\mathbb{C})$ порождает в пространстве $P_{\mathbb{C}}$ (см. [10]) линейный и непрерывный оператор $M_\psi : P_{\mathbb{C}} \to P_{\mathbb{C}}$, действующий по правилу

$$M_\psi[f](z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C e^{z\xi}\psi(\xi)\gamma(\xi)d\xi,$$

где $\gamma(\xi)$ — функция, ассоциированная по Борелю с $f(z)$, C — замкнутый контур, охватывающий все особые точки $\gamma(\xi)$.

Обозначим через N_φ нулевое множество функции $\varphi \in P_{\mathbb{C}}$. В работе [5] доказана

Теорема 3.1. *Пусть $\varphi \in P_{\mathbb{C}}$, $\psi \in H(\mathbb{C})$ и N_φ является достаточным в* $\operatorname{Ker} M_\psi$, *тогда разрешима многоточечная задача Валле Пуссена в* $\operatorname{Ker} M_\varphi$.

4. Основной результат

Пусть $N_\varphi = \{\lambda_k\}_{k=1}^{+\infty}$ — нулевое множество функции $\varphi \in P_{\mathbb{C}}$, каждый нуль повторяется столько раз какова его кратность (для того чтобы не было громоздких обозначений в дальнейшем под $\lambda_{\tilde{k}}$, $\tilde{k} = 1, 2\ldots$ будем понимать некоторую подпоследовательность последовательности $\{\lambda_k\}_{k=1}^{+\infty}$); $N_\psi = \{\mu_k\}_{k=1}^{+\infty}$ — множество нулей функции $\psi \in H(\mathbb{C})$, каждый нуль повторяется столько раз какова его кратность; через q_j обозначим кратность нуля μ_j; $\tilde{N}_\psi$ — бесконечное множество, которое состоит из всех различных нулей функции $\psi \in H(\mathbb{C})$.

Согласно результату работы [10] пространство $\operatorname{Ker}\ M_\psi$ состоит из квазиполиномов с показателями из множества N_ψ, т.е. любой элемент $r(z) \in \operatorname{Ker}\ M_\psi$ запишется в виде

$$r(z) = \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=0}^{q_j-1} C_{ji}z^i e^{\mu_j z},$$

при этом все коэффициенты C_{ji} отличны от нуля. Введем функцию $Q(n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, которая определяется следующим образом

$$Q(n) = \sum_{j=1}^{n} q_j, \qquad q_j \in \mathbb{N},$$

значение $Q(N)$ определяет количество слагаемых в $r(z)$.

Укажем свойства квазиполинома, которые необходимы для доказательства основного результата.

Лемма 4.1. *Пусть для некоторого фиксированного* $\alpha \in [0, +\infty)$ *существует число* $\beta \in [0, +\infty)$ *такое, что* $\alpha \cdot \beta < 1$, *при этом выполнены условия:*

(a) $N_\varphi \subset D_\alpha = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| \leqslant \alpha \operatorname{Re} z\}$ *и существует подпоследовательность* $\lambda_{\tilde{k}}$ *такая, что*

$$\operatorname{Re}(\lambda_{\tilde{k}}) < \operatorname{Re}(\lambda_{\tilde{k}+1}), \quad \tilde{k} \in \mathbb{N}.$$

(b) $N_\psi \subset D_\beta = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| \leqslant \beta \operatorname{Re} z\}$, *при этом для элементов множества* $\tilde{N}_\psi$ *выполнено:*

$$\operatorname{Re}(\mu_k) < \frac{1 - \alpha\beta}{1 + \alpha\beta} \operatorname{Re}(\mu_{k+1}), \quad k \in \mathbb{N}. \tag{4.1}$$

Тогда при выполнении условия

$$|r(\lambda_k)| \leqslant M e^{\sigma|\lambda_k|}, M, \sigma > 0, \qquad \forall k \in \mathbb{N} \tag{4.2}$$

1) *имеет место оценка*

$$\operatorname{Re} \mu_j \leqslant \frac{(1 + \alpha)\sigma}{1 - \alpha\beta}, \quad j = 1, \ldots, N;$$

2) *справедлива оценка для коэффициентов квазиполинома:*

$$|C_{ji}| \leqslant C := Q(N)! M \left|\lambda_{\tilde{k}_{Q(N)}}\right|^{(Q(N)-1)} e^{((Q(N)-1)\frac{1+\alpha\beta}{1-\alpha\beta}+1)\sigma(1+\alpha)\operatorname{Re}\lambda_{\tilde{k}_{Q(N)}}}, \quad j = \overline{1, N}, \quad i = \overline{0, q_j - 1}.$$

Доказательство. 1) Проведем доказательство от противного. Пусть все μ_j, $j = 1, \ldots, N$ упорядочены по возрастанию реальных частей и предположим, что

$$\operatorname{Re} \mu_N > \frac{(1 + \alpha)\sigma}{1 - \alpha\beta}.$$

Рассмотрим отношение

$$\frac{\left|\lambda_k^{q_l - 1} e^{\mu_j \lambda_k}\right|}{\left|\lambda_k^{q_N - 1} e^{\mu_N \lambda_k}\right|} \leqslant \frac{|\lambda_k|^{q_l}\, e^{(1+\alpha\beta)\operatorname{Re}\mu_j \operatorname{Re}\lambda_k}}{|\lambda_k|^{q_N}\, e^{(1-\alpha\beta)\operatorname{Re}\mu_N \operatorname{Re}\lambda_k}} = |\lambda_k|^{q_l - q_N}\, e^{(1+\alpha\beta)\operatorname{Re}\mu_j \operatorname{Re}\lambda_k - (1-\alpha\beta)\operatorname{Re}\mu_N \operatorname{Re}\lambda_k}.$$

Для $j = 1, 2, \ldots, N - 1$ по условию (4.1) показатель экспоненты отрицателен, поэтому отношение модулей стремится к нулю при $\operatorname{Re} \lambda_k \to +\infty$, значит

$$\lim_{k \to +\infty} \left| r(\lambda_k) \lambda_k^{-q_N + 1} e^{-\mu_N \lambda_k} \right| = \left| C_{N, q_N - 1} \right|.$$

Поэтому рост квазиполинома будет определятся μ_N. С другой стороны, рост $r(\lambda_k)$ будет задаваться с помощью (4.2). Сделав оценки сверху и снизу в (4.2), получаем цепочку неравенств

$$\left| \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=0}^{q_j - 1} C_{ji} \lambda_k^{i - q_N + 1} e^{(\mu_j - \mu_N)\lambda_k} \right| |\lambda_k|^{q_N - 1} e^{(1-\alpha\beta)\operatorname{Re}\mu_N \operatorname{Re}\lambda_k} \leqslant |r(\lambda_k)|$$

$$\leqslant M e^{\sigma|\lambda_k|} \leqslant M e^{\sigma(1+\alpha)\operatorname{Re}\lambda_k}.$$

Рассмотрим крайние элементы неравенства

$$\left| \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=0}^{q_j - 1} C_{ji} \lambda_k^{i - q_N + 1} e^{(\mu_j - \mu_N)\lambda_k} \right| |\lambda_k|^{q_N - 1} e^{((1-\alpha\beta)\operatorname{Re}\mu_N - \sigma(1+\alpha))\operatorname{Re}\lambda_k} \leqslant M.$$

Из неравенства $\operatorname{Re}\mu_N > \frac{(1+\alpha)\sigma}{1-\alpha\beta}$ следует, что левая часть стремится к $+\infty$, когда $\operatorname{Re}\lambda_k \to +\infty$ (как доказано выше, первый множитель стремится к $|C_{N,q_N-1}|$). Получаем противоречие с тем, что оно должно быть ограниченым. Таким образом, $\operatorname{Re}\mu_N \leqslant \frac{(1+\alpha)\sigma}{1-\alpha\beta}$. Мы показали, что в квазиполиноме $r(z)$ участвуют лишь $e^{\mu_j z}$ с показателем μ_j, удовлетворяющие оценке

$$\operatorname{Re}\mu_j \leqslant \frac{(1+\alpha)\sigma}{1-\alpha\beta},$$

и поскольку μ_j — нули целой функции, тогда показателей в квазиполиноме $r(z)$ конечное число. Пункт 1 доказан.

2) Мы воспользуемся простым замечанием, что если набор из $Q(N)$ нулей $\lambda_{\tilde{k}_p}$ выбрать так, что определитель матрицы

$$A = (\lambda^i_{\tilde{k}_p} e^{\mu_j \lambda_{\tilde{k}_p}}), \quad j = 1, \dots, N, \quad i = 0, \dots, q_j - 1, \quad p = 1, \dots, Q(N)$$

отличен от нуля, то коэффициенты C_{ji} являются решениями системы линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^{N} \sum_{i=0}^{q_j-1} C_{ji} \lambda^i_{\tilde{k}_p} e^{\mu_j \lambda_{\tilde{k}_p}} = r(\lambda_{\tilde{k}_p}), \qquad p = 1, \dots, Q(N).$$

Докажем по индукции по параметру $t = 1, 2, \dots$, что набор нулей можно выбрать так, что модули определителей матриц

$$A(t) = (\lambda^i_{\tilde{k}_p} e^{\mu_j \lambda_{\tilde{k}_p}}), \quad j = 1, \dots, N(t), \quad i = 0, \dots, q_j - 1, \quad p = 1, \dots, t$$

будут больше 1. Вначале рассмотрим $t = 1$:

$$|\det A(1)| = e^{\operatorname{Re}(\mu_1 \lambda_{\tilde{k}_1})} \geqslant e^{(1-\alpha\beta)\operatorname{Re}\mu_1 \operatorname{Re}\lambda_{\tilde{k}_1}} \geqslant 1.$$

В качестве $\lambda_{\tilde{k}_1}$ можно взять первый элемент последовательности $\lambda_{\tilde{k}}$.

Допустим, что нули $\lambda_{\tilde{k}_p}$, $p = 1, 2, \dots, t-1$ выбраны таким образом, что модули главных миноров больше 1, причем $\operatorname{Re}\lambda_{\tilde{k}_p}$ возрастает по p. Определитель матрицы A_t разложим по последней строке

$$\det A(t) = \sum_{j=1}^{N(t)} \sum_{i=0}^{q_j-1} (-1)^{l(i,j)+t} \det A_{l(i,j),t} \lambda^i_{\tilde{k}_t} e^{\mu_j \lambda_{\tilde{k}_t}},$$

где $(-1)^{l(i,j)+t} \det A_{l(i,j),t}$ — алгебраическое дополнение элемента $\lambda^i_{\tilde{k}_t} e^{\mu_j \lambda_{\tilde{k}_t}}$ и

$$l(i,j) = i + 1 + \sum_{s=0}^{j-1} q_s, \qquad q_0 = 0.$$

Отсюда

$$|\det A(t)| \geqslant \left| \sum_{i=0}^{q_{N(t)}-1} (-1)^{l(i,N(t))+t} \det A_{l(i,N(t)),t} \lambda^i_{\tilde{k}_t} e^{\mu_{N(t)} \lambda_{\tilde{k}_t}} \right| - \left| \sum_{j=1}^{N(t)-1} \sum_{i=0}^{q_j-1} (-1)^{l(i,j)+t} \det A_{l(i,j),t} \lambda^i_{\tilde{k}_t} e^{\mu_j \lambda_{\tilde{k}_t}} \right|.$$

Обозначим первое слагаемое в правой части неравенства через B_1, второе через B_2 и оценим их снизу и сверху соответственно. Но сначала оценим сверху $\left|\det A_{l(i,j),t}\right|$. Этот определитель есть сумма $(Q(N(t)) - 1)!$ слагаемых, каждое слагаемое есть произведение $Q(N(t)) - 1$ множителей вида

$$\lambda^i_{\tilde{k}_p} e^{\mu_j \lambda_{\tilde{k}_p}}, \quad j = 1, \dots, N(t), \quad i = 0, \dots, q_j - 1, \quad p = 1, \dots, t - 1.$$

Учитывая монотонность наборов μ_j и $\lambda_{\tilde{k}_p}$ получим

$$\left|\det A_{l(i,j),t}\right| \leqslant (Q(N(t)) - 1)! |\lambda_{\tilde{k}_{t-1}}|^{(Q(N(t))-1)} e^{(Q(N(t))-1)(1+\alpha\beta)\operatorname{Re}\mu_{N(t)} \operatorname{Re}\lambda_{\tilde{k}_{t-1}}}. \tag{4.3}$$

Оценим B_1

$$B_1 \geqslant \left|\lambda_{\tilde{k}_t}\right|^{q_{N(t)}-1} e^{(1-\alpha\beta)\operatorname{Re}\mu_{N(t)}\operatorname{Re}\lambda_{\tilde{k}_t}} \left|\sum_{i=0}^{q_{N(t)}-1} (-1)^{l(i,N(t))+t} \det A_{l(i,N(t)),t} \lambda_{\tilde{k}_t}^{i-(q_{N(t)}-1)}\right|$$
$$\geqslant \left|\lambda_{\tilde{k}_t}\right|^{q_{N(t)}-1} e^{(1-\alpha\beta)\operatorname{Re}\mu_{N(t)}\operatorname{Re}\lambda_{\tilde{k}_t}} \left(1 - \sum_{i=0}^{q_{N(t)}-2} \left|\det A_{l(i,N(t)),t}\right| \left|\lambda_{\tilde{k}_t}\right|^{i-(q_{N(t)}-1)}\right).$$

В последнем неравенстве мы воспользовались тем, что перед последним элементом последней строки стоит главный минор, который совпадает с $\det A_{t,t}$ и его модуль по предположению индукции больше или равен 1. Используя неравенство (4.3), получим окончательную оценку на B_1

$$B_1 \geqslant \left|\lambda_{\tilde{k}_t}\right|^{q_{N(t)}-1} e^{(1-\alpha\beta)\operatorname{Re}\mu_{N(t)}\operatorname{Re}\lambda_{\tilde{k}_t}}$$
$$\cdot \left(1 - \left|\lambda_{\tilde{k}_t}\right|^{-1} (q_{N(t)}-1)(Q(N(t))-1)!|\lambda_{\tilde{k}_{t-1}}|^{(Q(N(t))-1)} e^{(Q(N(t))-1)(1+\alpha\beta)\operatorname{Re}\mu_{N(t)}\operatorname{Re}\lambda_{\tilde{k}_{t-1}}}\right),$$

поскольку $\lambda_{\tilde{k}_{t-1}}$ и $\mu_{N(t)}$ на данный момент фиксированные величины и по доказанному выше $\left|\lambda_{\tilde{k}_t}\right|^{-1}$ стремится к нулю, когда $\operatorname{Re}\lambda_{\tilde{k}_t} \to +\infty$, второе слагаемое в скобках будет стремиться к нулю.

Обозначим $q_{max} = \max\limits_{s=1,\ldots,N(t)-1} q_s$ и оценим сверху B_2

$$B_2 \leqslant (Q(N(t)-1))|\det A_{l(i,j),t}| \left|\lambda_{\tilde{k}_t}\right|^{q_{max}-1} e^{(1+\alpha\beta)\operatorname{Re}\mu_{N(t)-1}\operatorname{Re}\lambda_{\tilde{k}_t}}$$
$$\leqslant (Q(N(t)-1))(Q(N(t))-1)!|\lambda_{\tilde{k}_{t-1}}|^{(Q(N(t))-1)} e^{(Q(N(t))-1)(1+\alpha\beta)\operatorname{Re}\mu_{N(t)}\operatorname{Re}\lambda_{\tilde{k}_{t-1}}}$$
$$\cdot \left|\lambda_{\tilde{k}_t}\right|^{q_{max}-1} e^{(1+\alpha\beta)\operatorname{Re}\mu_{N(t)-1}\operatorname{Re}\lambda_{\tilde{k}_t}}.$$

В последнем неравенстве только последние два множителя являются переменными величинами, зависящими от $\operatorname{Re}\lambda_{\tilde{k}_t}$, остальные множители являются фиксированными. Оценка на модуль определителя запишется в виде

$$|\det A(t)| \geqslant \left|\lambda_{\tilde{k}_t}\right|^{q_{N(t)}-1} e^{(1-\alpha\beta)\operatorname{Re}\mu_{N(t)}\operatorname{Re}\lambda_{\tilde{k}_t}}$$
$$\cdot \left(1 - \left|\lambda_{\tilde{k}_t}\right|^{-1} (q_{N(t)}-1)(Q(N(t))-1)!|\lambda_{\tilde{k}_{t-1}}|^{(Q(N(t))-1)} e^{(Q(N(t))-1)(1+\alpha\beta)\operatorname{Re}\mu_{N(t)}\operatorname{Re}\lambda_{\tilde{k}_{t-1}}}\right)$$
$$- (Q(N(t)-1))(Q(N(t))-1)!|\lambda_{\tilde{k}_{t-1}}|^{(Q(N(t))-1)} e^{(Q(N(t))-1)(1+\alpha\beta)\operatorname{Re}\mu_{N(t)}\operatorname{Re}\lambda_{\tilde{k}_{t-1}}}$$
$$\cdot \left|\lambda_{\tilde{k}_t}\right|^{q_{max}-1} e^{(1+\alpha\beta)\operatorname{Re}\mu_{N(t)-1}\operatorname{Re}\lambda_{\tilde{k}_t}} = \left|\lambda_{\tilde{k}_t}\right|^{q_{N(t)}-1} e^{(1-\alpha\beta)\operatorname{Re}\mu_{N(t)}\operatorname{Re}\lambda_{\tilde{k}_t}} \Big[\Big(1-$$
$$\left|\lambda_{\tilde{k}_t}\right|^{-1} (q_{N(t)}-1)(Q(N(t))-1)!|\lambda_{\tilde{k}_{t-1}}|^{(Q(N(t))-1)} e^{(Q(N(t))-1)(1+\alpha\beta)\operatorname{Re}\mu_{N(t)}\operatorname{Re}\lambda_{\tilde{k}_{t-1}}}\Big)$$
$$- (Q(N(t)-1))(Q(N(t))-1)!|\lambda_{\tilde{k}_{t-1}}|^{(Q(N(t))-1)} e^{(Q(N(t))-1)(1+\alpha\beta)\operatorname{Re}\mu_{N(t)}\operatorname{Re}\lambda_{\tilde{k}_{t-1}}}$$
$$\cdot \frac{\left|\lambda_{\tilde{k}_t}\right|^{q_{max}}}{\left|\lambda_{\tilde{k}_t}\right|^{qN(t)}} e^{\left((1+\alpha\beta)\operatorname{Re}\mu_{N(t)-1} - (1-\alpha\beta)\operatorname{Re}\mu_{N(t)}\right)\operatorname{Re}\lambda_{\tilde{k}_t}}\Big]$$

В последнем равенстве, когда $\operatorname{Re}\lambda_{\tilde{k}_t} \to +\infty$, круглая скобка стремится к 1 (в силу описанного выше), а последний множитель в квадратных скобках стремится к нулю (по условию (4.1) показатель экспоненты отрицателен). Таким образом, если нуль $\lambda_{\tilde{k}_t}$ выбрать с достаточно большим $\operatorname{Re}\lambda_{\tilde{k}_t}$, то $\Delta = |\det A(t)|$ будет больше 1.

По правилу Крамера

$$C_{ji} = \frac{\Delta_{l(i,j)}}{\Delta},$$

где $\Delta_{l(i,j)}$ — определитель матрицы, полученной из A_N заменой $l(i,j)$-того столбца столбцом свободных членов. Для того, чтобы оценить $\Delta_{l(i,j)}$ сверху разложим соответствующую матрицу по $l(i,j)$-му столбцу

$$\Delta_{l(i,j)} = \sum_{p=1}^{Q(N)} (-1)^{l(i,j)+p} \det A_{l(i,j),p} r(\lambda_{\tilde{k}_p}),$$

Также, как соотношение (4.3) получим оценку

$$\left|\det A_{l(i,j),p}\right| \leqslant (Q(N)-1)! |\lambda_{\tilde{k}_{Q(N)}}|^{(Q(N)-1)} e^{(Q(N)-1)(1+\alpha\beta)\operatorname{Re}\mu_N \operatorname{Re}\lambda_{\tilde{k}_{Q(N)}}},$$

а по условию (4.4)

$$|r(\lambda_{\tilde{k}_p})| \leqslant M e^{(1+\alpha)\sigma \operatorname{Re}\lambda_{\tilde{k}_{Q(N)}}}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}\left|\Delta_{l(i,j)}\right| &\leqslant Q(N)! M \left|\lambda_{\tilde{k}_{Q(N)}}\right|^{(Q(N)-1)} e^{(Q(N)-1)(1+\alpha\beta)\operatorname{Re}\mu_N \operatorname{Re}\lambda_{\tilde{k}_{Q(N)}}} e^{(1+\alpha)\sigma \operatorname{Re}\lambda_{\tilde{k}_{Q(N)}}} \\ &\leqslant Q(N)! M \left|\lambda_{\tilde{k}_{Q(N)}}\right|^{(Q(N)-1)} e^{((Q(N)-1)\frac{1+\alpha\beta}{1-\alpha\beta}+1)\sigma(1+\alpha)\operatorname{Re}\lambda_{\tilde{k}_{Q(N)}}}\end{aligned}$$

и

$$|C_{ji}| \leqslant C := Q(N)! M \left|\lambda_{\tilde{k}_{Q(N)}}\right|^{(Q(N)-1)} e^{((Q(N)-1)\frac{1+\alpha\beta}{1-\alpha\beta}+1)\sigma(1+\alpha)\operatorname{Re}\lambda_{\tilde{k}_{Q(N)}}}.$$

□

Пусть последовательность

$$r_m(z) = \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=0}^{q_j-1} C_{ji}(m) z^i e^{\mu_j z}$$

стремится к нулю в топологии τ_{N_φ}. С помощью условий (a.2) и (b.2), учитывая дискретность множества N_φ, условие сходимости к нулю в топологии τ_{N_φ} можно записать в виде: для некоторых постоянных σ, $M > 0$ выполняются соотношения

$$|r_m(\lambda_k)| \leqslant M e^{\sigma|\lambda_k|}, \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad \forall k \in \mathbb{N} \tag{4.4}$$

и для любого $k \in \mathbb{N}$ последовательность сходится равномерно на компактных подмножествах N_φ, т.е.

$$|r_m(\lambda_k)| \to 0, \quad m \to \infty. \tag{4.5}$$

Для разрешимости задачи кратной интерполяции в ядре оператора свертки по теореме 3.1 требуется показать, что $r_m(z) \to 0$ в $\operatorname{Ker} M_\psi$, $z \in \mathbb{C}$. Сформулируем основной результат

Теорема 4.1. *Пусть для некоторого фиксированного $\alpha \in [0, +\infty)$ существует число $\beta \in [0, +\infty)$ такое, что $\alpha \cdot \beta < 1$, при этом выполнены условия:*

(a) $N_\varphi \subset D_\alpha = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| \leqslant \alpha \operatorname{Re} z\}$ *и существует подпоследовательность $\lambda_{\tilde{k}}$ такая, что*

$$\operatorname{Re}(\lambda_{\tilde{k}}) < \operatorname{Re}(\lambda_{\tilde{k}+1}), \quad \tilde{k} \in \mathbb{N}.$$

(b) $N_\psi \subset D_\beta = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| \leqslant \beta \operatorname{Re} z\}$, *при этом для элементов множества $\tilde{N}_\psi$ выполнено:*

$$\operatorname{Re}(\mu_k) < \frac{1-\alpha\beta}{1+\alpha\beta} \operatorname{Re}(\mu_{k+1}), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Тогда при выполнении условий (4.4) и (4.5) множество N_φ является достаточным в $\operatorname{Ker} M_\psi$.

Доказательство. По доказанному в лемме 4.1 модуль определителя матрицы однородной системы

$$r_m(\lambda_{\tilde{k}_p}) = 0 \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

будет больше 1, поэтому все коэффициенты системы равны нулю, т.е.

$$r_m(z) \equiv 0,$$

а это значит, что N_φ является множеством единственности в $\operatorname{Ker} M_\psi$.

Докажем, что

$$\lim_{m\to\infty} C_{ji}(m) = 0, \quad j = \overline{1,N}, \quad i = \overline{0, q_j - 1}.$$

Поскольку из леммы 4.1 следует, что для $|C_{ji}(m)|$ в силу (4.5) справедливо

$$|C_{ji}(m)| \leqslant |\Delta_{l(i,j)}|$$
$$\leqslant Q(N)!|\lambda_{\tilde{k}_{Q(N)}}|^{Q(N)-1} e^{(Q(N)-1)(1+\alpha\beta)\frac{\sigma(1+\alpha)}{1-\alpha\beta}\operatorname{Re}\lambda_{\tilde{k}_{Q(N)}}} \cdot |r_m(\lambda_{\tilde{k}_{Q(N)}})| \to 0$$

при $m \to \infty$ и $\forall N \in \mathbb{N}$, имеем

$$\lim_{m\to\infty} C_{ji}(m) = 0, \qquad j = \overline{1,N}, \quad i = \overline{0, q_j - 1}.$$

Закончим доказательство достаточности множества N_φ. В лемме 4.1 мы доказали, что

$$\operatorname{Re}\mu_j \leqslant \frac{\sigma(1+\alpha)}{1-\alpha\beta} \qquad \text{и} \qquad |C_{ji}(m)| \leqslant C$$

для $m = 1, 2, \ldots$, $j = 1, \ldots, N$, $i = 0, \ldots, q_j - 1$. Оценим сверху $r_m(z)$ при условии, что $z \neq 0$

$$|r_m(z)| \leqslant Q(N)C|z|^{\max\limits_{j=\overline{1,N}} q_j} e^{|\mu_N||z|} \leqslant Q(N)Ce^{\max\limits_{j=\overline{1,N}} q_j \ln|z| + \frac{\sigma(1+\alpha)}{1-\alpha\beta}(1+\beta)|z|}.$$

Следовательно,

$$|r_m(z)| \leqslant Q(N)Ce^{2\max\left(\max\limits_{j=\overline{1,N}} q_j, \frac{\sigma(1+\alpha)(1+\beta)}{1-\alpha\beta}\right)|z|}. \tag{4.6}$$

Оценим для случая, когда $z = 0$:

$$|r_m(0)| = \sum_{j=1}^{N} |C_{j0}(m)| \leqslant N \cdot C \leqslant Q(N) \cdot C.$$

Получается, что оценка (4.6) справедлива и для случая $z = 0$, таким образом (4.6) верно для $z \in \mathbb{C}$.

В начале мы доказали, что $C_{ji}(m) \to 0$, $m \to \infty$ при любых j, i, значит,

$$\max_{j,i} |C_{ji}(m)| \to 0.$$

Поэтому для любого компакта $K_{\mathbb{C}}$ при $z \in K_{\mathbb{C}}$

$$|r_m(z)| \leqslant Q(N) \max_{j=\overline{1,N}, i=\overline{0,q_j}} |C_{ji}(m)| e^{2\max\left(\max\limits_{j=\overline{1,N}} q_j, \frac{\sigma(1+\alpha)(1+\beta)}{1-\alpha\beta}\right)\max\limits_{z\in K_{\mathbb{C}}}|z|} \to 0.$$

Из этого следует, что $r_m(z) \to 0$ в $\operatorname{Ker} M_\psi$, $z \in \mathbb{C}$. □

Замечание 4.1. *При $\beta = 0$ получаем, что узлы вещественные и коэффициент условия (4.1) будет равен 1, т.е. узлы можно расположить в порядке возрастания, следовательно, теорему 4.1 можно рассматривать, как обобщение результатов работы [5].*

Замечание 4.2. *При $\alpha = 0$ нули характеристической функции будут лежать на вещественной оси, при этом коэффициент условия (4.1) будет равен 1, значит, узлы будут расположены в порядке возрастания реальных частей, при этом не требуется дополнительного ограничения на удаленность друг от друга.*

5. Иллюстративный пример

Рассмотрим случай, когда нули функций φ и ψ лежат на верхней границе угла

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{Re} z \right\},$$

тогда константы теоремы 4.1 будут иметь следующие значения: $\alpha = \beta = \frac{\pi}{6}$. Коэффициент упорядочивания нулей $\psi(z)$ будет равен

$$\frac{1-\alpha\beta}{1+\alpha\beta} = \frac{1}{2}.$$

Построим последовательность μ_i, $i = 1, 2, \ldots$ для этого коэффициента. Возьмем $\operatorname{Re}\mu_1 > 0$, в качестве $\operatorname{Re}\mu_2$ можно взять $2\operatorname{Re}\mu_1 + 1$, поскольку

$$\frac{2\operatorname{Re}\mu_1 + 1}{\operatorname{Re}\mu_1} = 2 + \frac{1}{\operatorname{Re}\mu_1} > 2.$$

Аналогично в качестве $\operatorname{Re}\mu_3$ можно взять $2\operatorname{Re}\mu_2 + 1$, тогда

$$\operatorname{Re}\mu_3 = 2(2\operatorname{Re}\mu_1 + 1) + 1 = 4\operatorname{Re}\mu_1 + 3.$$

Реальная часть n-го члена последовательности будет иметь вид

$$\operatorname{Re}\mu_n = 2^{n-1}\operatorname{Re}\mu_1 + 2^{n-1} - 1.$$

Так как аргумент всех нулей $\frac{\pi}{6}$, общий член нулевой последовательности $\psi(z)$ будет иметь вид

$$(2^{n-1}\operatorname{Re}\mu_1 + 2^{n-1} - 1)\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}} i\right)$$

или, если переписать в показательной форме

$$\mu_n = \frac{2}{\sqrt{3}}(2^{n-1}\operatorname{Re}\mu_1 + 2^{n-1} - 1)e^{i\frac{\pi}{6}}, \qquad \operatorname{Re}\mu_1 > 0, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{5.1}$$

В качестве λ_n можно взять

$$\lambda_n = ne^{i\frac{\pi}{6}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Построенные последовательности λ_n и μ_n удовлетворяют всем условиям теоремы 4.1. Следовательно, для функций $\varphi \in P_{\mathbb{C}}$ и $\psi \in H(\mathbb{C})$, нулевые множества которых совпадают с построенными последовательностями, разрешима задача интерполяции в ядре оператора свертки. Следует отметить, что последовательность μ_n построена с помощью реальной части первого нуля, которая может быть выбрана с единственным условием - неотрицательность. Таким образом, если взять какое-либо неотрицательное число, то по формуле (5.1) можно получить общий член последовательности μ_n для коэффициента упорядочивания равного 0.5. При необходимости, аналогичную процедуру построения нулей функции ψ можно проделать и для других углов, при условии, что коэффициент

$$\frac{1-\alpha\beta}{1+\alpha\beta}$$

будет меньше единицы.

Функция ψ может иметь кратные корни, тогда можно считать, что была проделана процедура построения элементов множества $\tilde{N}_\psi$ (N_ψ легко получается из $\tilde{N}_\psi$). Нули функции φ могут быть выбраны не обязательно на одном луче, часть нулей может располагаться ниже луча $\arg z = \frac{\pi}{6}$, основное требование, в данном случае, чтобы реальные части строго возрастали с учетом коэффициента. Кроме того, у функции $\varphi(z)$ также могут быть кратные корни, но должна существовать подпоследовательность, элементы которой строго упорядочены по возрастанию.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Математическая энциклопедия.* Т.1. М.: Советская Энциклопедия. 1977.
2. А.М. Коточигов. *Свободная кратная интерполяция* // Зап. научн. сем. ПОМИ **401**, 103–121 (2012).
3. К.Г. Малютин. *Задача кратной интерполяции в полуплоскости в классе аналитических функций конечного порядка и нормального типа* // Мат. сб. **184**:2, 129–144 (1993).
4. В.В. Напалков. *Комплексный анализ и задача Коши для операторов свертки* // Тр. мат. инст. Стеклова 235, 165–168 (2001).
5. В.В. Напалков, А.А. Нуятов. *Многоточечная задача Валле Пуссена для операторов свертки* // Мат. сб. **203**:2, 77–86 (2012).
6. В.В. Напалков, А.А. Нуятов. *Многоточечная задача Валле Пуссена для операторов свертки с узлами, заданными в угле* // Теор. мат. физ. **180**:2, 264–271 (2014).
7. Ж. Себаштьян-и-Силва. *О некоторых классах локально-выпуклых пространств, важных в приложениях* // Математика **1**:1, 60–77 (1957).
8. M. Krosky, A. Schuster. *Multiple interpolation and extremal functions in the Bergman spaces* // J. Anal. Math. **85**:1, 141–156 (2001).
9. G.G. Lorentz, K.L. Zeller. *Birkhoff Interpolation* // SIAM J. numer. Anal. **8**:1, 43–48 (1971).
10. H. Muggli. *Differentialgleichungen unendlich hoher Ordnung mit konstanten Koeffizienten* // Comment. Math. Helv. **11**:1, 151–179 (1938).
11. Ch. J. De La Vallee Poussin. *Sur l'équation différentielle linéaire du second ordre. Détermination d'une intégrale par deux valeurs assignées. Extension aux équations d'ordre n* // J. Math. Pures Appl. **9**:8, 125–144 (1929).

Валерий Валентинович Напалков,
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: `vnap@mail.ru`

Андрей Александрович Нуятов,
Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева,
ул. Минина, 24,
603155, г. Нижний Новгород, Россия
E-mail: `nuyatov1aa@rambler.ru`