ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 17. № 4 (2025). С. 63-73.

УДК 517.55

УРАВНЕНИЕ СВЕРТКИ В ПРОСТРАНСТВЕ БЫСТРО УБЫВАЮЩИХ ФУНКЦИЙ НА НЕОГРАНИЧЕННОМ ВЫПУКЛОМ МНОЖЕСТВЕ $\mathbb{R}^n$

И.Х. МУСИН, З.Ю. ФАЗУЛЛИН, Р.С. ЮЛМУХАМЕТОВ

Аннотация. В работе изучается проблема разрешимости уравнения свертки (в частности, дифференциально–разностного уравнения) в пространстве Шварца на неограниченном выпуклом множестве $\mathbb{R}^n$.

Ключевые слова: пространство Шварца, преобразование Фурье — Лапласа функционалов.

Mathematics Subject Classification: 46A04

1. Введение

1.1. О задаче. Пусть C — открытый выпуклый острый конус в $\mathbb{R}^n$ с вершиной в начале координат [1, глава 1, §4], b — выпуклая непрерывная позитивно однородная степени 1 функция на $\overline{C}$ — замыкании C. Пара (b, C) определяет замкнутое выпуклое неограниченное множество

$$U(b, C) = \{\xi \in \mathbb{R}^n : -\langle \xi, y\rangle \leqslant b(y),\ \forall y \in C\},$$

не содержащее целую прямую. Отметим, что внутренность $U(b, C)$ непуста и совпадает с множеством

$$V(b, C) = \{\xi \in \mathbb{R}^n : -\langle \xi, y\rangle < b(y),\ \forall y \in \overline{C}\},$$

а замыкание $V(b, C)$ есть $U(b, C)$. Для краткости в ряде случаев будем обозначать множество $U(b, C)$ через U, а множество $V(b, C)$ — через V.

Наиболее известный пример множества $U(b, C)$ получим, если в качестве функции b положить: $b(y) = r\|y\|$ с $r \geqslant 0$ для $y \in \overline{C}$. В этом случае [1, глава 1, §4, Лемма 3]

$$U(b, C) = C^* + B_r,$$

где

$$C^* = \{\xi \in \mathbb{R}^n : \langle \xi, y\rangle \geqslant 0,\ \forall y \in C\}$$

— сопряжённый конус, B_r — замкнутый шар радиуса r с центром в нуле. Этот пример допускает обобщение: если $\mathcal{K}$ — выпуклый компакт в $\mathbb{R}^n$,

$$b(y) = \sup_{t\in\mathcal{K}}(-\langle y, t\rangle) \quad \text{для} \quad y \in \overline{C},$$

то

$$U(b, C) = C^* + \mathcal{K}.$$

I.Kh. Musin, Z.Yu. Fazullin, R.S. Yulmukhametov, Convolution equation in space of fast decaying functions on unbounded convex set in $\mathbb{R}^n$.

Работа первого и второго авторов выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2025-1637), работа третьего автора выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (код научной темы FMRS-2025-0010).

Поступила 1 сентября 2025 г.

Для произвольного множества $M \subset \mathbb{R}^n$ определим функцию H_M в $\mathbb{R}^n$ по формуле

$$H_M(x) = \sup_{\xi \in M}(-\langle x, \xi \rangle), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Положим $\tilde{b}(y) = b(y)$ для $y \in \overline{C}$, $\tilde{b}(y) = +\infty$ для $y \notin \overline{C}$. Тогда

$$\operatorname{dom} \tilde{b} = \{y \in \mathbb{R}^n : \tilde{b}(y) < \infty\} = \overline{C}$$

— замкнутое множество в $\mathbb{R}^n$, $\tilde{b}$ непрерывна на C и, значит, функция $\tilde{b}$ – замкнутая [5, глава 2, §7]. Кроме того, согласно [5, Следствие 13.2.1],

$$\tilde{b} = H_U.$$

Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная выпуклая область, K — замыкание области D в $\mathbb{R}^n$. Образуем множество

$$G = U + K.$$

G — замкнутое выпуклое неограниченное множество. Для любого $y \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$H_G(y) = \sup_{\xi_1 \in U, \xi_2 \in K}(-\langle \xi_1 + \xi_2, y \rangle) = \sup_{\xi_1 \in U}(-\langle \xi_1, y \rangle) + \max_{\xi_2 \in K}(-\langle \xi_2, y \rangle) = \tilde{b}(y) + H_K(y).$$

Значит,

$$H_G(y) = b(y) + H_K(y), \quad y \in C.$$

Таким образом, функция H_G непрерывна на $\overline{C}$. Отметим, что

$$G = \{\xi \in \mathbb{R}^n : -\langle \xi, y \rangle \leqslant H_G(y),\, \forall y \in C\}.$$

Для $\Omega = U$ или $\Omega = G$ через $S(\Omega)$ обозначим пространство Шварца функций f класса C^∞ на Ω таких, что для любого $p \in \mathbb{Z}_+$

$$\|f\|_{p,\Omega} = \sup_{x \in \operatorname{int}\, \Omega, |\alpha| \leqslant p} |(D^\alpha f)(x)|(1 + \|x\|)^p < \infty.$$

Здесь $\|\cdot\|$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^n$. Топология в $S(\Omega)$ задаётся семейством норм $\|f\|_{p,\Omega}$ $(p \in \mathbb{Z}_+)$.

Пусть μ — линейный непрерывный функционал на пространстве $C^\infty(K)$ бесконечно дифференцируемых на K функций f с топологией, определяемой системой норм

$$\|f\|_m = \max_{x \in K, |\alpha| \leqslant m} |(D^\alpha f)(x)|, \quad m \in \mathbb{Z}_+.$$

Тогда при некоторых $p \in \mathbb{N}$ и $c_\mu > 0$

$$|\langle \mu, f \rangle| \leqslant c_\mu \|f\|_p, \quad f \in C^\infty(K). \tag{1.1}$$

Отметим, что для произвольной функции $f \in S(U + K)$ и любого $x \in U$ функция $f_x(t) = f(t + x)$ корректно определена для $t \in K$ и принадлежит классу $C^\infty(K)$. При этом линейный оператор $T_x : f \in S(U + K) \to f_x$ действует из $S(U + K)$ в $C^\infty(K)$ непрерывно (см. Лемму 3.1).

Определим свёртку $\mu * f$ функционала μ и функции $f \in S(U + K)$ по правилу

$$(\mu * f)(x) = \langle \mu_t, f(x + t) \rangle, \quad x \in U.$$

Отметим, что поскольку для любого $x \in U$ функция f_x принадлежит классу $C^\infty(K)$, тогда функция $\mu * f$ корректно определена на U. Более того, $\mu * f \in C^\infty(U)$ (см. Лемму 3.2), причём для любого $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$

$$(D^\beta(\mu * f))(x) = (\mu * D^\beta f)(x), \quad x \in U. \tag{1.2}$$

Отметим, что оператор $M_\mu : f \in S(U+K) \to \mu * f$ действует из $S(U+K)$ в $S(U)$. Действительно, пользуясь (1.1) и (1.2), имеем для любых $x \in U$, $m \in \mathbb{Z}_+$ и $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$ с $|\beta| \leqslant m$

$$(1+\|x\|)^m |(D^\beta(T_\mu f)(x)| \leqslant c_\mu \sup_{t\in K, |\alpha|\leqslant p} (1+\|x\|)^m |(D^{\alpha+\beta} f)(x+t)|.$$

Отсюда следует, что при некотором $A = A(m,K) > 0$

$$(1+\|x\|)^m |(D^\beta(M_\mu f)(x)| \leqslant A c_\mu \sup_{\substack{\xi\in G,\\ |\gamma|\leqslant m+p}} (1+\|\xi\|)^m |(D^\gamma f)(\xi)| \leqslant A c_\mu \|f\|_{m+p,G}.$$

Таким образом, для любого $m \in \mathbb{Z}_+$

$$\|M_\mu f\|_{m,U} \leqslant A c_\mu \|f\|_{m+p,G}, \quad f \in S(U+K).$$

Это неравенство означает, что $M_\mu(f) \in S(U)$ и линейный оператор M_μ действует из $S(U+K)$ в $S(U)$ непрерывно.

Естественным образом возникает задача найти условия на μ при выполнении которых оператор $M_\mu : S(U+K) \to S(U)$ является сюръективным. В данной заметке будет приведено достаточное условие сюръективности. Кроме того, представляет интерес задача о разрешимости линейного дифференциального уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами в $S(U)$.

1.2. Обозначения и определения. Для

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n, \qquad u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$$

полагаем

$$\|u\| = \sqrt{|u_1|^2 + \cdots + |u_n|^2}, \qquad |\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n,$$
$$\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!, \qquad u^\alpha = u_1^{\alpha_1} \cdots u_n^{\alpha_n},$$
$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial u_1^{\alpha_1} \cdots \partial u_n^{\alpha_n}}.$$

Для $u = (u_1, \ldots, u_n)$, $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$ пусть

$$\langle u, v\rangle := u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n.$$

$H(T_C)$ — пространство голоморфных функций в трубчатой области $T_C = \mathbb{R}^n + iC$.
$\Delta_C(y)$ — расстояние от точки $y \in C$ до границы конуса C.

Для $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ и $r > 0$

$$\Delta(z,r) = \{w = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{C}^n : |w_j - z_j| \leqslant r, \quad j = 1, \ldots, n\}.$$

$[x,\xi]$ — отрезок, соединяющий точки $x, \xi \in \mathbb{R}^n$.

Для произвольного локально выпуклого пространства X через X' обозначаем пространство линейных непрерывных функционалов на X, через X^* — сильное сопряжённое пространство.

2. О сопряженном к пространству $S(U)$

Известно [1], [11], что для любого $z \in \mathbb{R}^n + iC$ функция $f_z(\xi) = e^{i\langle \xi, z\rangle}$ принадлежит $S(U)$. Поэтому для произвольного функционала $\Phi \in S'(U)$ функция

$$\hat{\Phi}(z) = (\Phi, e^{i\langle \xi, z\rangle})$$

корректно определена в $T_C = \mathbb{R}^n + iC$. Она голоморфна в T_C [1], [11]. Функция $\hat{\Phi}$ называется преобразованием Фурье — Лапласа функционала Φ.

Определим пространство $V_b(T_C)$ следующим образом. Для каждого $m \in \mathbb{N}$ определим нормированные пространства

$$V_{b,m}(T_C) = \left\{ f \in H(T_C) : N_m(f) = \sup_{z \in T_C} \frac{|f(z)|}{(1+\|z\|)^m (1+\frac{1}{\Delta_C(y)})^m e^{b(y)}} < \infty \right\},$$

где $z = x + iy$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in C$. Пусть

$$V_b(T_C) = \bigcup_{m=0}^{\infty} V_{b,m}(T_C).$$

С обычными операциями сложения и умножения на комплексные числа $V_b(T_C)$ — линейное пространство. Наделим $V_b(T_C)$ топологией индуктивного предела пространств $V_{b,m}(T_C)$. $V_b(T_C)$ — пространство (LN^*) [6] или, придерживаясь более современной терминологии, — пространство DFS [3].

Имеет место следующая теорема Пейли — Винера — Шварца для пространства $S(U)$.

Теорема 2.1. *Преобразование Фурье — Лапласа $\mathcal{F} : S^*(U) \to V_b(T_C)$, задаваемое по правилу $\mathcal{F}(T) = \hat{T}$, — изоморфизм.*

Теорема 2.1 установлена в работе [4] по схеме из [1]. Для $b(y) = a\|y\|$ $(a \geqslant 0)$ Теорема 2.1 получена В.С. Владимировым [1, глава 2, §12].

Замечание 2.1. *Определим для каждого $\varepsilon > 0$ функцию b_ε на $\overline{C}$ по правилу*

$$b_\varepsilon(y) = b(y) + \varepsilon\|y\|$$

и пространство $V_{b_\varepsilon}(T_C)$ — индуктивный предел нормированных пространств

$$V_{b_\varepsilon,k}(T_C) = \left\{ f \in H(T_C) : N_{k,\varepsilon}(f) = \sup_{z \in T_C} \frac{|f(z)|e^{-b_\varepsilon(y)}}{(1+\|z\|)^k (1+\frac{1}{\Delta_C(y)})^k} < \infty \right\},$$

где $k \in \mathbb{Z}_+$, $z = x + iy$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in C$. Пусть $H_b(T_C)$ — проективный предел пространств $V_{b_\varepsilon}(T_C)$. Известно [10, Теорема D], *что пространства $V_b(T_C)$ и $H_b(T_C)$ совпадают.*

3. Вспомогательные утверждения

Лемма 3.1. *Пусть $x \in U$. Тогда линейный оператор $T_x : f \in S(G) \to f_x$ действует из $S(G)$ в $C^\infty(K)$ и является непрерывным.*

Доказательство. Пусть $f \in S(U+K)$. Тогда для любого $m \in \mathbb{Z}_+$

$$|(D^\alpha f)(\xi)| \leqslant \frac{\|f\|_{m,G}}{(1+\|\xi\|)^m}, \quad |\alpha| \leqslant m, \quad \xi \in G. \tag{3.1}$$

Следовательно,

$$\|T_x(f)\|_m = \max_{t \in K, |\alpha| \leqslant m} |(D^\alpha f)(x+t)| \leqslant \frac{\|f\|_{m,G}}{(1+\|t+x\|)^m} \leqslant \|f\|_{m,G}.$$

Таким образом, линейный оператор T_x непрерывен. □

Лемма 3.2. *Пусть $f \in S(U+K)$. Тогда $\mu * f \in C^\infty(U)$.*

Доказательство. Покажем вначале, что функция $\mu * f$ непрерывна на V. Пусть x_0 — произвольная точка из V. Тогда

$$(\mu * f)(x) - (\mu * f)(x_0) = \langle \mu_t, f(x+t) - f(x_0+t) \rangle, \quad x \in V.$$

Так как при некоторых $m \in \mathbb{N}$ и $c_\mu > 0$

$$|\langle \mu, g\rangle| \leqslant c_\mu \|g\|_m, \quad g \in C^\infty(K), \tag{3.2}$$

имеем

$$\begin{aligned}|(\mu * f)(x) - (\mu * f)(x_0)| &= |\langle \mu, f_x - f_{x_0}\rangle| \leqslant c_\mu \|f_x - f_{x_0}\|_m \\ &= c_\mu \max_{\substack{t\in K,\\ |\alpha|\leqslant m}} |(D^\alpha(f_x(t) - f_{x_0}(t))| \\ &\leqslant 2c_\mu \max_{\substack{t\in K,\\ |\alpha|\leqslant m}} \max_{\substack{\xi\in[t+x_0,t+x],\\ \beta\in\mathbb{Z}_+^n:|\beta|=1}} |(D^{\alpha+\beta} f)(\xi)|\|x - x_0\|.\end{aligned}$$

Воспользовавшись неравенством (3.2), получим, что

$$|(\mu * f)(x) - (\mu * f)(x_0)| \leqslant 2c_\mu \|x - x_0\|\|f\|_{m+1,G}.$$

Таким образом, $\mu * f$ непрерывна в точке $x_0 \in V$. А так как x_0 — произвольная точка из V, $\mu * f$ непрерывна в V.

Далее покажем, что $\mu * f \in C^\infty(V)$ и что для любого $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$

$$(D^\alpha(\mu * f))(x) = (\mu * D^\alpha f)(x), \quad x \in V.$$

Возьмём произвольную точку x_0 из V. Пусть $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$. Для любого $h \in \mathbb{R}^n$ такого, что $x_0 + h \in V$ имеем

$$\begin{aligned}(D^\alpha(\mu * f))(x_0 + h) - (D^\alpha(\mu * f))(x_0) - \sum_{\beta\in\mathbb{Z}_+^n:|\beta|=1} \langle \mu, D^{\alpha+\beta} f_{x_0}\rangle h^\beta& \\ =\langle \mu, D^\alpha f_{x_0+h}\rangle - \langle \mu, D^\alpha f_{x_0}\rangle - \sum_{\beta\in\mathbb{Z}_+^n:|\beta|=1} \langle \mu, D^{\alpha+\beta} f_{x_0}\rangle h^\beta& \\ =\langle \mu, D^\alpha f_{x_0+h} - D^\alpha f_{x_0} - \sum_{\beta\in\mathbb{Z}_+^n:|\beta|=1} D^{\alpha+\beta} f_{x_0} h^\beta\rangle.&\end{aligned}$$

Отметим, что для любого $t \in K$ и любого $\gamma \in \mathbb{Z}_+^n$ с $|\gamma| \leqslant m$

$$\begin{aligned}(D^{\alpha+\gamma} f_{x_0+h})(t) - (D^{\alpha+\gamma} f_{x_0})(t) - \sum_{\beta\in\mathbb{Z}_+^n:|\beta|=1} (D^{\alpha+\gamma+\beta} f_{x_0})(t)h^\beta& \\ =(D^{\alpha+\gamma} f)(t + x_0 + h) - (D^{\alpha+\gamma} f)(t + x_0) - \sum_{\beta\in\mathbb{Z}_+^n:|\beta|=1} (D^{\alpha+\gamma+\beta} f)(t + x_0)h^\beta.&\end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}|(D^{\alpha+\gamma} f)(t + x_0 + h) - (D^{\alpha+\gamma} f)(t + x_0) - \sum_{\beta\in\mathbb{Z}_+^n:|\beta|=1} (D^{\alpha+\gamma+\beta} f)(t + x_0)h^\beta|& \\ \leqslant 2 \sum_{\beta\in\mathbb{Z}_+^n:|\beta|=2} \frac{(\max_{\xi\in[t+x_0,t+x_0+h]} |(D^{\alpha+\gamma+\beta} f)(\xi)|)|h^\beta|}{\beta!}& \\ \leqslant 2(\max_{\substack{\xi\in[t+x_0,t+x_0+h],\\ \beta\in\mathbb{Z}_+^n:|\beta|=2}} |(D^{\alpha+\gamma+\beta} f)(\xi)|) \sum_{\beta\in\mathbb{Z}_+^n:|\beta|=2} \frac{|h^\beta|}{\beta!}& \\ \leqslant \sum_{\beta\in\mathbb{Z}_+^n:|\beta|=2} \frac{2}{\beta!} \max_{\substack{\xi\in[x+y,x+y+h],\\ \beta\in\mathbb{Z}_+^n:|\beta|=2}} (|(D^{\alpha+\gamma+\beta} f)(\xi)|)\|h\|^2.&\end{aligned}$$

Отсюда, принимая во внимание неравенство (3.2), получим, что

$$|(D^{\alpha+\gamma}f)(t+x_0+h)-(D^{\alpha+\gamma}f)(t+x_0)-\sum_{\beta\in\mathbb{Z}_+^n:|\beta|=1}(D^{\alpha+\gamma+\beta}f)(t+x_0)h^\beta| \leqslant \sum_{\beta\in\mathbb{Z}_+^n:|\beta|=2}\frac{2\|f\|_{m+|\alpha|+2,G}}{\beta!}\|h\|^2.$$

Теперь с помощью неравенства (4.1) получим, что

$$|\langle\mu, D^\alpha f_{x_0+h}-D^\alpha f_{x_0}-\sum_{\beta\in\mathbb{Z}_+^n:|\beta|=1}D^{\alpha+\beta}f_{x_0}h^\beta\rangle|\leqslant c_\mu\sum_{\beta\in\mathbb{Z}_+^n:|\beta|=2}\frac{2\|f\|_{m+|\alpha|+2,G}}{\beta!}\|h\|^2.$$

Это означает, что функция $D^\alpha(\mu*f)$ дифференцируема в точке x_0 из V. А так как x_0 — произвольная точка из V, тогда $\mu*f$ дифференцируема в V. Также было показано, что для любого $\beta\in\mathbb{Z}_+^n$ с $|\beta|=1$

$$D^\beta(D^\alpha\mu*f)(x)=\langle\mu,(D^{\alpha+\beta}f)(x+t)\rangle,\quad x\in V.$$

Покажем теперь, что для любого мультииндекса $\alpha\in\mathbb{Z}_+^n$ частная производная $D^\alpha(\mu*f)$ продолжается до непрерывной в U функции. Для любых

$$x=(x_1,\dots,x_n),\quad \xi=(\xi_1,\dots,\xi_n)\in V,\quad t\in K$$

и любого $\gamma\in\mathbb{Z}_+^n$ с $|\gamma|\leqslant m$ имеем

$$|(D^{\alpha+\gamma}f)(t+x)-(D^{\alpha+\gamma}f)(t+\xi)|\leqslant\sum_{\beta\in\mathbb{Z}_+^n:|\beta|=1}\max_{\eta\in[t+x,t+\xi]}|(D^{\alpha+\gamma+\beta}f)(\eta)|)|(x-\xi)^\beta| \leqslant n\|f\|_{m+|\alpha|+1,G}\|x-\xi\|.$$

Далее,

$$(D^\alpha(\mu*f))(x)-(D^\alpha(\mu*f))(\xi)=\langle\mu,(D^\alpha f)(x+t)-(D^\alpha f)(\xi+t)\rangle.$$

Пользуясь неравенством (4.1) и предыдущим неравенством, имеем

$$|(D^\alpha(\mu*f))(x)-(D^\alpha(\mu*f))(\xi)|\leqslant c_\mu\max_{t\in K}|(D^{\alpha+\gamma}f)(t+x)-(D^{\alpha+\gamma}f)(t+\xi)| \leqslant c_\mu n\|f\|_{m+|\alpha|+1,G}\|x-\xi\|.$$

Из этой оценки на основании критерия Коши заключаем, что какова бы ни была точка ζ, лежащая на границе ∂V, существует конечный предел

$$\lim_{\xi\to\zeta,\xi\in V}(D^\alpha(\mu*f))(\xi).$$

Определим функцию F_α на U следующим образом:

$$F_\alpha(x)=(D^\alpha(\mu*f))(x),\qquad x\in V;\qquad\quad F_\alpha(x)=\lim_{\xi\to x,\xi\in V}(D^\alpha f)(\xi),\qquad x\in\partial V.$$

Из последней оценки легко сделать вывод, что функция F_α непрерывна на U. Более того, она равномерно непрерывна на U. Таким образом, для любого $\alpha\in\mathbb{Z}_+^n$ частная производная $D^\alpha(\mu*f)$ допускает (единственное) продолжение с V до непрерывной в U функции. За функцией F_α сохраняем обозначение $D^\alpha(\mu*f)$.

□

4. Основные результаты

Теорема 4.1. *Пусть μ — линейный непрерывный функционал на пространстве $C^\infty(K)$. Допустим, что его преобразование Фурье — Лапласа — функция*

$$\hat{\mu}(z) = (\mu, e^{i\langle \xi, z\rangle}), \quad z \in \mathbb{C}^n,$$

такова, что существуют положительные числа $A, L, N > 1$ такие, что какова бы ни была точка $z \in \mathbb{C}^n$ для любого $\varepsilon \in (0,1)$ найдётся не превосходящее $\frac{L}{\varepsilon^N}$ число $a_\varepsilon \geqslant 1$ такое, что

$$e^{H_K(Im\, z) - A\ln(1+\|z\|)} \leqslant a_\varepsilon \max_{w\in\Delta(z,\varepsilon)} |\hat{\mu}(w)|.$$

Тогда оператор $T_\mu : S(U+K) \to S(U)$ является сюръективным.

Доказательству Теоремы 4.1 предпошлём следующие два утверждения.

Лемма 4.1. *Пусть Γ — открытый выпуклый конус в $\mathbb{R}^n$ с вершиной в начале координат. Пусть h — выпуклая непрерывная позитивно однородная степени 1 функция на $\overline{\Gamma}$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует постоянная $A_\varepsilon > 0$ такая, что для любых $y_1, y_2 \in \Gamma$ таких, что $\|y_2 - y_1\| \leqslant 1$*

$$|h(y_2) - h(y_1)| \leqslant \varepsilon\|y_1\| + \varepsilon\|y_2\| + A_\varepsilon.$$

Лемма 3.1 получена в [10, Lemma 9].

Лемма 4.2. *Пусть Φ_1, Φ_2, $\Phi = \frac{\Phi_1}{\Phi_2}$ — голоморфные функции в шаре $B(0,R)$. Пусть*

$$|\Phi_1(w)| \leqslant B, \qquad |\Phi_2(w)| \leqslant A \quad \text{для} \quad w \in B(0,R).$$

Тогда

$$|\Phi(w)| \leqslant BA^{\frac{2\|w\|}{R-\|w\|}} |\Phi_2(0)|^{-\frac{R+\|w\|}{R-\|w\|}}, \quad w \in B(0,R).$$

Лемма 3.2 установлена в [9].

Доказательство Теоремы 4.1. Пусть

$$N_{\hat{\mu}} = \{z \in T_C : \hat{\mu}(z) = 0\}.$$

Для $z \in \mathbb{C}^n$ через f_z обозначим функцию

$$f_z(\xi) = e^{i\langle \xi, z\rangle}, \quad x \in U.$$

Для $z \in T_C \setminus N_{\hat{\mu}}$ рассмотрим уравнение $Lf = f_z$. Оно имеет решение $\frac{f_z}{\hat{\mu}(z)}$. Отсюда и из полноты системы $\{f_z\}_{z\in T_C\setminus N_{\hat{\mu}}}$ следует, что образ оператора L плотен в $S(U)$. Покажем, что образ оператора L замкнут в $S(U)$. По теореме Дьедонне — Шварца [2] замкнутость образа оператора L эквивалентна замкнутости в $S^*(G)$ образа сопряжённого оператора L^*. Определим оператор $\hat{L}^*$ на $V_b(T_C)$ по правилу

$$\hat{L}^*(F) = \mathcal{F}(L^*(\mathcal{F}^{-1}(F))), \quad F \in V_b(T_C).$$

В силу Теоремы A линейный оператор $\hat{L}^*$ действует из $V_b(T_C)$ в $V_{H_G}(T_C)$ (пространство $V_{H_G}(T_C)$ определяется по тому же правилу, что и пространство $V_b(T_C)$), причём непрерывно. Далее, для произвольной функции $F \in V_b(T_C)$ при любом $z \in T_C$

$$\begin{aligned}\hat{L}^*(F)(z) = (L^*(\mathcal{F}^{-1}(F)), f_z) = (\mathcal{F}^{-1}(F)), L(f_z)) = (\mathcal{F}^{-1}(F)), \hat{\mu}(z)f_z) \\ = \hat{\mu}(z)(\mathcal{F}^{-1}(F)), f_z) = \hat{\mu}(z)F(z).\end{aligned}$$

Из результатов работы [6] следует, что образ $\operatorname{im}\hat{L}^*$ оператора $\hat{L}^*$ замкнут в $V_{H_G}(T_C)$ тогда и только тогда, когда множество $\operatorname{im}\hat{L}^* \cap V_{H_G,m}(T_C)$ замкнуто в $V_{H_G,m}(T_C)$ для любого $m \in \mathbb{Z}_+$. Итак, пусть $m \in \mathbb{Z}_+$ и функция F принадлежит замыканию множества $\operatorname{im}\hat{L}^* \cap V_{H_G,m}(T_C)$ в $V_{H_G,m}(T_C)$. Тогда существует последовательность $(F_k)_{k=1}^\infty$ функций $F_k \in \operatorname{im}\hat{L}^* \cap$

$V_{H_G,m}(T_C)$, сходящаяся к F в $V_{H_G,m}(T_C)$. В частности, последовательность $(F_k)_{k=1}^{\infty}$ функций F_k сходится к F равномерно на компактах из T_C. Отсюда и из того, что функции F_k имеют вид

$$F_k(z) = \hat{\mu}(z)\psi_k(z), \quad \text{где} \quad \psi_k \in V_b(T_C), \quad z \in T_C,$$

следует, что функция

$$\psi(z) = \frac{F(z)}{\hat{\mu}(z)}, \quad z \in T_C,$$

голоморфна в T_C. Оценим рост функции ψ. Пусть

$$z = x + iy \in T_C, \quad \text{где} \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Пусть $\delta \in (0, 1)$ произвольно. Положим

$$\varepsilon = \min\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\Delta_C(y)\right).$$

В силу условия на $\hat{\mu}$ найдётся точка

$$z' \in T_C : \|z - z'\| \leqslant \varepsilon$$

такая, что

$$e^{h_K(\operatorname{Im} z) - A\ln(1+\|z\|)} \leqslant \tilde{a}_\varepsilon |\hat{\mu}(z')|,$$

где $\tilde{a}_\varepsilon = a_{\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}}$. Так как $F \in V_{H_G,m}(T_C)$, при некотором $A_F > 0$

$$\ln|F(w)| \leqslant A_F + m\ln(1 + \|w\|) + m\ln\left(1 + \frac{1}{\Delta_C(\operatorname{Im} w)}\right) + H_G(\operatorname{Im} w), \quad w \in T_C.$$

Поскольку (учтем Лемму 4.1) для любого $\delta > 0$ можно найти постоянную $C_\delta > 0$ такую, что

$$\sup_{z'' \in B(z', 2\varepsilon)} H_G(\operatorname{Im} z'') \leqslant H_G(\operatorname{Im} z) + \delta|\operatorname{Im} z| + C_\delta,$$

получим

$$\sup_{z'' \in B(z', 2\varepsilon)} \ln|F(z'')| \leqslant A_F + m\ln(2 + \|z\|) + m\ln\left(1 + \frac{4}{\Delta_C(y)}\right) + H_G(y) + \delta|y| + C_\delta. \tag{4.1}$$

Так как при некоторых $c_\mu > 0$ и $p \in \mathbb{Z}_+$

$$|\hat{\mu}(z)| \leqslant c_\mu(1 + \|z\|)^p e^{H_K(\operatorname{Im} z)},$$

при некотором $b_{\mu,K} > 0$ (не зависящем от ε) имеем

$$\sup_{z'' \in B(z', 2\varepsilon)} |\hat{\mu}(z'')| \leqslant b_{\mu,K} + p\ln(2 + \|z\|) + H_K(\operatorname{Im} z). \tag{4.2}$$

Положим

$$\Phi_1(w) = F(z' + w), \qquad \Phi_2(w) = \hat{\mu}(z' + w), \quad \text{где} \quad \|w\| < 2\varepsilon.$$

Воспользуемся Леммой 4.2 с $R = 2\varepsilon$ и $w = z - z'$. Имеем

$$\begin{aligned}
\ln\left|\frac{F(z)}{\hat{\mu}(z)}\right| \leqslant & A_F + m\ln\Big(2 + \|z\|\Big) + m\ln\left(1 + \frac{4}{\Delta_C(y)}\right) + H_G(y) \\
& + \delta|y| + C_\delta + \frac{2\|z - z'\|}{R - \|z - z'\|}(b_{\mu,K} + p\ln(2 + \|z\|) + H_K(y)) \\
& - \frac{R + \|z - z'\|}{R - \|z - z'\|}(H_K(y) - A\ln(1 + \|z\|) - \ln\tilde{a}_\varepsilon) \\
\leqslant & A_F + m\ln(2 + \|z\|) + m\ln(1 + \frac{4}{\Delta_C(y)}) + b(y) + H_K(y) + \delta\|y\| + C_\delta \\
& + \frac{2\|z - z'\|}{R - \|z - z'\|}(b_{\mu,K} + p\ln(2 + \|z\|)) + \frac{\|z - z'\|}{R - \|z - z'\|}H_K(y)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- \frac{R}{R - \|z - z'\|} H_K(y) + \frac{R + \|z - z'\|}{R - \|z - z'\|}(A \ln(1 + \|z\|) + \ln \tilde{a}_\varepsilon) \\
&\leqslant A_F + m \ln(2 + \|z\|) + m \ln\left(1 + \frac{4}{\Delta_C(y)}\right) + b(y) + \delta|y| + C_\delta \\
&\quad + 2(b_{\mu,K} + p \ln(2 + \|z\|)) + 3(A \ln(1 + \|z\|) + \ln \tilde{a}_\varepsilon).
\end{aligned}
$$

Таким образом,

$$
\left|\frac{F(z)}{\hat{\mu}(z)}\right| \leqslant L^3 e^{A_F + 2b_{\mu,K}} 4^{3N+m} e^{C_\delta} (2 + \|z\|)^{m+2p+3A} \left(1 + \frac{1}{\Delta_C(y)}\right)^{3N+m} e^{b(y)+\delta|y|}.
$$

Следовательно, при любом $\delta > 0$

$$
\left|\frac{F(z)}{\hat{\mu}(z)}\right| \leqslant C e^{C_\delta} (1 + \|z\|)^{m+2p+3A} \left(1 + \frac{1}{\Delta_C(y)}\right)^{3N+m} e^{b(y)+\delta|y|},
$$

где $C = 2^{6N+3m+2p+3A} L^3 e^{A_F + 2b_{\mu,K}}$. С учётом Замечания 2.1 имеем $\psi \in V_b(T_C)$. Так как

$$
F(z) = \psi(z) g(z), \quad z \in T_C, \quad \text{тогда} \quad F \in \operatorname{im} \hat{L}^*.
$$

Итак, множество $\operatorname{im} \hat{L}^* \cap V_{H_G,m}(T_C)$ замкнуто в $V_{H_G,m}(T_C)$ для любого $m \in \mathbb{Z}_+$. Следовательно, образ $\operatorname{im} \hat{L}^*$ оператора $\hat{L}^*$ замкнут в $V_{H_G}(T_C)$. Но тогда образ оператора L замкнут в $S(U)$. А так как ещё образ оператора L плотен в $S(U)$, находим $\operatorname{im} L = S(U)$. Тем самым, Теорема 4.1 доказана. □

В качестве применения Теоремы 4.1 рассмотрим вопрос о существовании в $S(U)$ решений дифференциально–разностного уравнения, которое определим следующим образом. Зафиксируем $m \in \mathbb{N}$. Для

$$
\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n \quad \text{с} \quad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n \leqslant m \quad \text{пусть} \quad a_\alpha \in \mathbb{C}^n, \quad h_\alpha \in \mathbb{R}^n.
$$

Пусть K — выпуклая оболочка точек h_α, причём внутренность K не пуста. Отметим, что

$$
H_K(y) = \max_{|\alpha| \leqslant m}(-\langle y, h_\alpha \rangle) \quad \forall y \in \mathbb{R}^n.
$$

Для $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ и $r > 0$ пусть

$$
T(z, r) = \{w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^n : |w_j - z_j| = r, \ j = 1, \dots, n\},
$$

Для функции g, голоморфной на $\Delta(z, r)$, пусть

$$
[g(z)]_r = \frac{1}{(2\pi r)^n} \int\limits_{z \in T(z,r)} |g(z)||d\, z|.
$$

Известен следующий результат [7, Proposition 3].

Теорема 4.2. *Пусть*

$$
P(z) = \sum_{k=1}^{m} P_k(z) e^{\langle \alpha_k, z \rangle},
$$

где P_k — аналитический полином в $\mathbb{C}^n$ для каждого k и $\alpha_k \in \mathbb{C}$. Пусть

$$
h_P(z) = \max_k \operatorname{Re}\langle \alpha_k, z \rangle, \quad z \in \mathbb{C}^n.
$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдётся постоянная $C(\varepsilon, P) > 0$ такая, что если f — аналитическая функция в полидиске $\Delta(z, \varepsilon)$, то

$$
|f(z)| e^{h_P(z)} \leqslant C(\varepsilon, P) [f(z) P(z)]_\varepsilon. \tag{4.3}
$$

Замечание 4.1. *Анализ доказательства Теоремы 4.2 показывает, что при некоторых $L > 0$ и $N \in \mathbb{N}$, не зависящих от ε и z, справедливо неравенство*

$$C(\varepsilon, P) \leqslant \frac{L}{\varepsilon^N}, \quad \varepsilon \in (0,1).$$

Замечание 4.2. *В условиях Теоремы thB из (4.2) следует, что для любой аналитической в полидиске $\Delta(z,\varepsilon)$ функции f*

$$|f(z)|e^{h_P(z)} \leqslant C(\varepsilon, P) \max_{w\in\Delta(z,\varepsilon)} |f(w)P(w)|. \tag{4.4}$$

Отметим, что линейный непрерывный функционал F на пространстве $C^\infty(K)$, определяемый по правилу:

$$F(f) = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n:|\alpha|\leqslant m} a_\alpha (D^\alpha f)(h_\alpha),$$

задает дифференциально–разностный оператор L на $S(G)$:

$$(Lf)(x) = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n:|\alpha|\leqslant m} a_\alpha (D^\alpha f)(x+h_\alpha), \quad x \in U.$$

Очевидно, $Lf \in S(U)$ для любого $f \in S(G)$ и оператор L — линейный и непрерывный. Кроме того,

$$\hat{F} = P, \quad h_P(z) = H_K(\operatorname{Im} z) \quad \text{для} \quad z \in \mathbb{C}^n.$$

В силу (4.3) F удовлетворяет условиям Теоремы 4.1. Таким образом, по Теореме 4.1 имеем следующее следствие.

Следствие 4.1. *Оператор L действует из $S(G)$ в $S(U)$ сюръективно.*

Теорема 4.3. *Пусть*

$$P(z) = \sum_{|\alpha|\leqslant N} a_\alpha z^\alpha$$

— полином степени N,

$$P(D) = \sum_{|\alpha|\leqslant N} a_\alpha D^\alpha$$

— дифференциальный оператор конечного порядка, соответствующий полиному P. Тогда оператор $P(D)$ сюръективен в пространстве $S(U)$.

Теорема 4.3 доказывается по той же схеме, что и Теорема 4.1. При этом важную роль играет следующая лемма, известная как Лемма Эренпрайса — Мальгранжа (см., напр., [8]).

Лемма 4.3. *Пусть p — полином степени m. Тогда существует число $c > 0$ такое, что для любых $r > 0$, $z \in \mathbb{C}^n$ и для любой функции $f \in H(B(z,r))$ такой, что*

$$\frac{f(\cdot)}{p(\cdot)} \in H(B(z,r))$$

справедливо неравенство

$$\left|\frac{f(z)}{p(z)}\right| \leqslant cr^{-m} \sup_{\zeta\in B(z,r)} |f(\zeta)|.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. В.С.Владимиров. *Обобщенные функции в математической физике.* М.: Наука. 1979.
2. Ж. Дьедонне, Л. Шварц. *Двойственность в пространствах* (F) *и* (LF) // Математика **2**:2, 77–108 (1958).
3. В.В. Жаринов. *Компактные семейства ЛВП и пространства* FS *и* DFS // Усп. мат. наук **34**:4(208), 97–131 (1979).
4. И.Х. Мусин, П.В. Федотова *Теорема типа Пэли — Винера для ультрараспределений* // Мат. заметки **85**:6, 894–914 (2009).
5. Р.Т. Рокафеллар. *Выпуклый анализ.* М.: Мир. 1973.
6. Ж. Себаштьян-и-Сильва. *О некоторых классах локально выпуклых пространств, важных в приложениях* // Математика **1**:1, 60–77 (1957).
7. C.A. Berenstein, M.A. Dostal. *Some remarks on convolution equations* // Ann. Inst. Fourier **23**:1, 55–74 (1973).
8. S. Hansen. *On the «Fundamental Prinsiple» of L. Ehrenpries* // Banach Center Publications **10**:1, 185–201 (1983).
9. L. Hörmander. *On the range of convolution operators* // Ann. Math. (2) **76**, 148–170 (1962).
10. I.Kh. Musin, P.V. Yakovleva. *On a space of smooth functions on a convex unbounded set in* $\mathbb{R}^n$ *admitting holomorphic extension in* $\mathbb{C}^n$ // Cent. Eur. J. Math. **10**:2, 665–692 (2012).
11. J.W. de Roever. *Analytic representations and Fourier transforms of analytic functionals in* Z' *carried by the real space* // SIAM J. Math. Anal.

Ильдар Хамитович Мусин,
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН,
ул.Чернышевского, 112,
450076, г. Уфа, Россия
E-mail: musin_ildar@mail.ru

Зиганур Юсупович Фазуллин,
Уфимский университет науки и технологий,
ул. Заки Валиди, 32,
450077, г. Уфа, Россия
E-mail: fazullinzu@mail.ru

Ринад Салаватович Юлмухаметов,
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН,
ул.Чернышевского, 112,
450077, г. Уфа, Россия,

Уфимский университет науки и технологий,
ул. Заки Валиди, 32,
450076, г. Уфа, Россия
E-mail: Yulmukhametov@mail.ru