

УДК 517.574 : 517.982.1 : 517.55 : 517.987.1

ОБОБЩЕНИЯ УСЛОВИЙ ЛИНДЕЛЁФА ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КОРНЕЙ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

Е.Г. КУДАШЕВА, Э.Б. МЕНЬШИКОВА, Б.Н. ХАБИБУЛЛИН

Аннотация. Условие Линделёфа — первый пример нерадиального условия на распределение корней целых функций конечного целого порядка. Дальнейшее его развитие использовано в классической теореме Рубела — Тейлора. В ней также в качестве тестовых функций используются целые отрицательные степени комплексной переменной. Мы обобщаем условие Линделёфа, заменяя тестовые степенные функции на любые гармонические функции на концентрических кольцах. В частности, из этого обобщения легко получаем необходимость условий Линделёфа и в теореме Рубела — Тейлора.

Ключевые слова: голоморфная функция, целая функция, распределение корней, субгармоническая функция, распределение масс, условие Линделёфа.

Mathematics Subject Classification: 30D20, 31A05, 30D35, 30C15

1. КЛАССИЧЕСКОЕ УСЛОВИЕ ЛИНДЕЛЁФА ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КОРНЕЙ

Далее $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ — множества соответственно натуральных, вещественных и комплексных чисел в их всевозможных алгебраических, геометрических и топологических трактовках с расширениями

$$\mathbb{N}_0 := \{0\} \cup \mathbb{N}, \quad \overline{\mathbb{N}}_0 := \mathbb{N}_0 \cup \{+\infty\}, \quad \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\},$$

с положительной полуосью $\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ и её расширением $\overline{\mathbb{R}}^+ := \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.

Пусть D — область, т.е. открытое связное множество, в комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Любую функцию Z на D со значениями в $\overline{\mathbb{N}}_0 := \{0, 1, 2, \dots, +\infty\}$ называем *распределением точек на D с кратностями* $Z(z) \in \overline{\mathbb{N}}_0$ точек $z \in D$ в Z [6, пп. 0.1.2–0.1.3], [7, п. 1.2.3]. Если f — голоморфная функция на области D , то распределение точек с кратностью в каждой точке, равной кратности корня функции f в этой точке, обозначаемое как

$$\text{Zero}_f: z \mapsto \sup_{z \in D} \left\{ p \in \overline{\mathbb{N}}_0 \mid \limsup_{z \neq w \rightarrow z} \frac{|f(w)|}{|w - z|^p} < +\infty \right\} \in \overline{\mathbb{N}}_0, \quad (1.1)$$

называем *распределением корней* голоморфной функции f на D .

Следующий классический результат был установлен в начале XX в. [11], [3, гл. I, § 11, теорема 15], [9, гл. 2, п. 2.10, теорема Линделёфа], [10, лекция 5, п. 5.2, теоремы 3, 4].

E.G. KUDASHEVA, E.B. MENSHIKOVA, B.N. KHABIBULLIN, GENERALIZATIONS OF LINDELOF CONDITIONS FOR DISTRIBUTION OF ZEROS OF ENTIRE FUNCTIONS.

© Кудашева Е.Г., Меньшикова Э.Б., Хабибуллин Б.Н. 2025.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках выполнения государственного задания (код научной темы FMRS-2025-0010).

Поступила 10 июля 2025 г.

Теорема 1.1 (Линделёф [11]). Пусть $0 < \rho \in \mathbb{R}$, Z — распределение точек на $\mathbb{C}$, для радиальной считающей функции которого

$$Z^{\mathbf{r}}(t) := \sum_{|z| \leq t} Z(z) < +\infty \quad \text{при всех } t \in \mathbb{R}^+. \quad (1.2)$$

Существование целой функции f с распределением корней $\text{Zero}_f = Z$ и ограничением

$$\limsup_{\mathbb{C} \ni z \rightarrow \infty} \frac{\ln |f(z)|}{|z|^\rho} < +\infty$$

равносильно конечности верхней плотности при порядке ρ

$$\limsup_{0 < r \rightarrow +\infty} \frac{Z^{\mathbf{r}}(r)}{r^\rho} < +\infty \quad (1.3)$$

распределения точек Z , дополненной условием Линделёфа

$$\sup_{1 < R \in \mathbb{R}^+} \left| \sum_{1 < |z| \leq R} \frac{Z(z)}{z^\rho} \right| < +\infty \quad \text{при } \rho \in \mathbb{N}. \quad (1.4)$$

В части достаточности теорема Линделёфа легко выводится из оценок представления Вейерштрасса — Адамара для целых функций с распределением корней конечной верхней плотности (1.3), в то время как доказательство необходимости условия Линделёфа (1.4) при натуральном $\rho \in \mathbb{N}$ потребовало в исходном подходе нетривиальных оценок снизу для многочленов и целых функций.

Для радиальной функции $M(z) =_{z \in \mathbb{C}} M(|z|)$ на $\mathbb{C}$, возрастающей на радиальных лучах, и класса целых функций f с ограничениями вида

$$\ln |f(z)| \leq C_f M(c_f |z|) \quad \text{при всех } z \in \mathbb{C}, \quad (1.5)$$

где $c_f \geq 0$ и $C_f \geq 0$ — какие-либо числа, свои для каждой функции f , окончательные результаты по описанию распределений корней для таких классов целых функций были получены совместно Л.А. Рубелом и Б.А. Тейлором методом рядов Фурье [13], [14], восходящему к исследованиям А.Н. Ахиезера [1, § 7] и получившему дальнейшее развитие в работах А.А. Кондратьюка [2], К.Г. Малютина [4] и многих др.

Теорема 1.2 (Рубел — Тейлор [13], [14, гл. 14, лемма], [1, § 7, теорема 2]). Пусть Z — распределение точек на $\mathbb{C}$ с $Z(0) = 0$ и (1.2), а $M \geq 0$ — возрастающая непрерывная функция на $\mathbb{R}^+$. Для существования целой функции f с распределением корней $\text{Zero}_f = Z$ и ограничением (1.5) необходимо и достаточно, чтобы существовало число $C \in \mathbb{R}^+$, для которого

$$\int_0^R \frac{Z^{\mathbf{r}}(t)}{t} dt \leq CM(CR) \quad \text{при всех } R > 0, \quad (1.6)$$

а также для каждого $k \in \mathbb{N}$ имело место общее условие Линделёфа

$$\left| \sum_{r < |z| \leq R} \frac{Z(z)}{kz^k} \right| \leq C \left(\frac{M(Cr)}{r^k} + \frac{M(CR)}{R^k} \right) \quad \text{при всех } 0 < r < R < +\infty. \quad (1.7)$$

В частном случае степенной функции $M(r) =_{r \in \mathbb{R}^+} r^\rho$ теорема Рубела — Тейлора 1.2 сразу даёт классическую теорему Линделёфа 1.1, в которой условие (1.7) при нецелом ρ сводится к единственному первому ограничению из (1.6) — простейшему следствию формулы Пуассона — Йенсена. При натуральном ρ всё-таки требуется и второе ограничение при

единственном $k := \rho$ [13], [14], [1, § 7]. И в исходном доказательстве теоремы Рубела — Тейлора 1.2 методом рядов Фурье существенная часть трудностей сосредоточена на выводе необходимости обобщения (1.7) условия Линделёфа (1.4).

В нашей статье на основе одной из интегральных формул недавней работы [5] второго из соавторов рассматривается вариант дальнейшего развития и обобщения аналогов условий Линделёфа (1.4) и (1.7). В них конкретная степенная функция $\frac{1}{z^k}$ в левых частях (1.4) и (1.7) заменяется на достаточно произвольные гармонические функции в концентрических кольцах с центром в нуле. В то же время это наше обобщение в случае степенной функции позволяет получить простое доказательство необходимости условия Линделёфа (1.7) в теореме Рубела — Тейлора 1.2. Доказательства и первоначальные формулировки основных результатов даются в субгармонической версии для функций на круге.

2. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ ДЛЯ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

Через $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ и $\overline{\mathbb{D}} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$, а также $\partial\mathbb{D} := \partial\overline{\mathbb{D}} := \overline{\mathbb{D}} \setminus \mathbb{D}$ обозначаем соответственно открытый и замкнутый *единичные круги*, а также *единичную окружность* с центром в нуле. Тогда $r\mathbb{D}$ и $r\overline{\mathbb{D}}$, а также $r\partial\mathbb{D} = r\partial\overline{\mathbb{D}}$ при $r \in \mathbb{R}^+$ — соответственно открытый и замкнутый круги, а также окружность радиуса r с центром в нуле. Для точной верхней грани функции v на окружности $r\partial\mathbb{D}$ используем обозначение

$$v^{\vee r} := \sup_{|z|=r} v(z), \quad (2.1)$$

а для интегрального среднего $v^{\circ r}$ функции v по окружности $r\partial\mathbb{D}$ —

$$v^{\circ r} := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(re^{i\theta}) d\theta \stackrel{(2.1)}{\leq} v^{\vee r}, \quad (2.2)$$

где предполагается соответствующая интегрируемость.

В следующем подразделе мы приводим результаты только для целых функций в традиционных обозначениях теории Неванлинны. Для голоморфной в окрестности замкнутого круга $r\overline{\mathbb{D}}$ функции f часто через

$$M(r, f) \stackrel{(2.1)}{:=} |f|^{\vee r} \stackrel{(2.1)}{=} \sup_{|z|=r} |f(z)| \quad (2.3)$$

обозначается максимум модуля $|f|$ функции f на окружности $r\partial\mathbb{D}$,

$$T(r, f) = m(r, f) \stackrel{(2.2)}{:=} (\ln^+ |f|)^{\circ r} \stackrel{(2.2)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ |f(re^{i\theta})| d\theta \quad (2.4)$$

— интегральное среднее положительной части $\ln^+ |f| := \sup\{\ln |f|, 0\}$ модуля $|f|$ по той же окружности, определяющее *характеристику Неванлинны* $T(\cdot, f)$ функции f .

Для $k \in \mathbb{N}$ и $S \subseteq \mathbb{C}$ через $C^{(k)}(S)$ обозначаем класс всех функций со значениями в $\mathbb{R}$ или в $\mathbb{C}$ с непрерывными частными производными порядка k в некотором своём для каждой функции открытом множестве, содержащем S .

Для функции L на окрестности точки $re^{i\theta}$ окружности $r\partial\mathbb{D}$ со значениями в $\mathbb{C}$ её производную по радиусу, если по контексту она существует, обозначаем через

$$L'_{\mathbf{r}}(re^{i\theta}) := \lim_{r \neq t \rightarrow r} \frac{L(te^{i\theta}) - L(re^{i\theta})}{t - r}. \quad (2.5)$$

Теорема 2.1. Пусть $0 < r < R \in \mathbb{R}^+$ и функция $L \in C^{(1)}(\frac{R^2}{r}\overline{\mathbb{D}} \setminus r\overline{\mathbb{D}})$ со значениями в $\mathbb{C}$ гармоническая в открытом кольце $\frac{R^2}{r}\mathbb{D} \setminus r\overline{\mathbb{D}}$. Тогда для любой целой функции f со значением $f(0) = 1$ имеем место неравенство

$$\left| \sum_{r < |z| \leq R < +\infty} \text{Zero}_f(z) L(z) \right| \leq 4 \left(|L|^{\vee r} + |L|^{\vee \frac{R^2}{r}} + r |L'_{\mathfrak{r}}|^{\vee r} + \frac{R^2}{r} |L'_{\mathfrak{r}}|^{\vee \frac{R^2}{r}} \right) T(er, f) + 8 \left(|L|^{\vee \frac{R^2}{r}} + |L|^{\vee R} + R |L'_{\mathfrak{r}}|^{\vee R} \right) T(eR, f). \quad (2.6)$$

Теорема 2.1 сразу выводится из теоремы 3.2 о субгармонических функциях в конце статьи. Проиллюстрируем теорему 2.1 очень кратким по сравнению с [13], [14] доказательством необходимости условия Линделёфа (1.7) в теореме Рубела — Тейлора 1.2.

Доказательство. Применим теорему 2.1 к гармонической на $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ функциям

$$L: z \mapsto \frac{1}{z^k} \in \mathbb{C}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

При таком выборе L элементарные вычисления при $0 < r < R < +\infty$ дают

$$\begin{aligned} |L|^{\vee r} + |L|^{\vee \frac{R^2}{r}} + r |L'_{\mathfrak{r}}|^{\vee r} + \frac{R^2}{r} |L'_{\mathfrak{r}}|^{\vee \frac{R^2}{r}} &= \frac{1}{r^k} + \frac{r^k}{R^{2k}} + r \frac{k}{r^{k+1}} + \frac{R^2}{r} \frac{k r^{k+1}}{R^{2(k+1)}} \leq \frac{4k}{r^k}, \\ |L|^{\vee \frac{R^2}{r}} + |L|^{\vee R} + R |L'_{\mathfrak{r}}|^{\vee R} &\leq \frac{r^k}{R^{2k}} + \frac{1}{R^k} + R \frac{k}{R^{k+1}} \leq \frac{2k}{R^k}. \end{aligned}$$

Отсюда по неравенству (2.6) для целой функции f с распределением корней $Z = \text{Zero}_f$ и значением $f(0) = 1$ получаем

$$\left| \sum_{r < |z| \leq R < +\infty} \frac{Z(z)}{z^k} \right| \leq 16k \left(\frac{T(er, f)}{r^k} + \frac{T(eR, f)}{R^k} \right) \stackrel{(2.4), (2.3)}{\leq} 16k \left(\frac{M(er, f)}{r^k} + \frac{M(eR, f)}{R^k} \right).$$

При ограничении (1.5) на f это сразу даёт условие Линделёфа (1.7) при $k \in \mathbb{N}$. Избавление от условия $f(0) = 1$ тривиально. $\square$

3. ВЕРСИИ ДЛЯ СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Положительная часть расширенной числовой функции $v: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ — это функция

$$v^+: x \mapsto \sup_{x \in X} \{v(x), 0\} \in \overline{\mathbb{R}}^+.$$

Оператор Лапласа Δ на плоскости рассматриваем ниже и в смысле теории обобщённых функций. Если функция $u \not\equiv -\infty$ субгармоническая на области $D \subseteq \mathbb{C}$, то риссовское распределение масс функции u — это положительная радоновская мера [12], [8]

$$\Delta_u := \frac{1}{2\pi} \Delta u. \quad (3.1)$$

Для субгармонической в окрестности круга $r\overline{\mathbb{D}}$ функции u радиальная считающая функция её риссовского распределения масс обозначается и определяется как функция

$$\Delta_u^{\mathfrak{r}}: t \mapsto \Delta_u(t\overline{\mathbb{D}}).$$

В частности, для целой функции f и соответственно субгармонической функции $\ln |f|$

$$\text{Zero}_f^{\mathfrak{r}}(r) \stackrel{(1.2)}{=} \Delta_{\ln |f|}(r) \quad \text{при всех } r \in \mathbb{R}^+, \quad (3.2)$$

поскольку для любых ограниченных функции v и подмножества $S \subset \mathbb{C}$ [12, теорема 3.7.8]

$$\int_S v d\Delta_{\ln|f|} = \sum_{z \in S} \text{Zero}_f(z) v(z). \quad (3.3)$$

Функция субгармоническая на $S \subseteq \mathbb{C}$, если она является сужением на S некоторой субгармонической на открытой окрестности множества S функции.

Теорема 3.1. Пусть $0 < r < R \in \mathbb{R}^+$ и функция $V \in C^{(1)}(R\overline{\mathbb{D}} \setminus r\mathbb{D})$ гармоническая на открытом кольце $R\mathbb{D} \setminus r\overline{\mathbb{D}}$, а также обращается в нуль на окружности $R\partial\overline{\mathbb{D}}$. Тогда для любой субгармонической на замкнутом круге $R\overline{\mathbb{D}}$ функции u со значением $u(0) = 0$

$$\left| \int_{R\overline{\mathbb{D}} \setminus r\overline{\mathbb{D}}} V d\Delta_u \right| \leq |V|^{\vee r} \Delta_u^{\mathfrak{r}}(r) + 4r|V_{\mathfrak{r}}'|^{\vee r}(u^+)^{\circ r} + 4R|V_{\mathfrak{r}}'|^{\vee R}(u^+)^{\circ R}, \quad (3.4)$$

а для любой голоморфной на $R\overline{\mathbb{D}}$ функции f с $f(0) = 1$

$$\left| \sum_{r < |z| \leq R} \text{Zero}_f(z) V(z) \right| \leq |V|^{\vee r} \text{Zero}_f^{\mathfrak{r}}(r) + 4r|V_{\mathfrak{r}}'|^{\vee r} T(r, f) + 4R|V_{\mathfrak{r}}'|^{\vee R} T(R, f). \quad (3.5)$$

Доказательство. По (3.2), (3.3), (2.3), (2.4) из (3.4) сразу следует (3.5). Поэтому достаточно доказать (3.4). Рассмотрим симметричное продолжение функции V относительно окружности $r\partial\overline{\mathbb{D}}$, обозначаемое и определяемое через инверсию

$$V_r^{\star}: z \mapsto V\left(\frac{r^2}{\bar{z}}\right) \quad (3.6)$$

как склеенная непрерывная функция

$$V_r^{\odot}(z) := \begin{cases} V(z) & \text{при } z \in R\overline{\mathbb{D}} \setminus r\mathbb{D}, \\ V_r^{\star}(z) = V\left(\frac{r^2}{\bar{z}}\right) & \text{при } z \in r\mathbb{D} \setminus \frac{r^2}{R}\overline{\mathbb{D}} \end{cases} \quad (3.7)$$

на кольце $R\overline{\mathbb{D}} \setminus \frac{r^2}{R}\overline{\mathbb{D}}$ и воспользуемся лишь частным «гармоническим» случаем одной интегральной формулы для концентрических колец из работы [5].

Лемма 3.1 ([5, теорема 2]). Для любой субгармонической на некоторой окрестности кольца $R\overline{\mathbb{D}} \setminus \frac{r^2}{R}\overline{\mathbb{D}}$ функции $u \not\equiv -\infty$ имеет место равенство

$$\int_{R\overline{\mathbb{D}} \setminus \frac{r^2}{R}\overline{\mathbb{D}}} V_r^{\odot} d\Delta_u = \frac{r}{\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) V_{\mathfrak{r}}'(re^{i\theta}) d\theta - \frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(u(Re^{i\theta}) + u\left(\frac{r^2}{R}e^{i\theta}\right) \right) V_{\mathfrak{r}}'(Re^{i\theta}) d\theta.$$

По этой лемме с учётом обращения функции V в нуль на окружности $R\partial\overline{\mathbb{D}}$ в обозначениях (2.1), (2.2) и (3.7) получаем равенство

$$\int_{R\overline{\mathbb{D}} \setminus r\overline{\mathbb{D}}} V d\Delta_u = \int_{r\mathbb{D} \setminus \frac{r^2}{R}\overline{\mathbb{D}}} V_r^{\star} d\Delta_u + 2r(uV_{\mathfrak{r}}')^{\circ r} - R(uV_{\mathfrak{r}}')^{\circ R} + R(u_r^{\star}V_{\mathfrak{r}}')^{\circ R}.$$

Это согласно (2.2) и очевидному неравенству $|(uv)^{\circ r}| \leq |v|^{\vee r}|u|^{\circ r}$ даёт неравенство

$$\left| \int_{R\overline{\mathbb{D}} \setminus r\overline{\mathbb{D}}} V d\Delta_u \right| \leq \sup_{r\mathbb{D} \setminus \frac{r^2}{R}\overline{\mathbb{D}}} |V_r^{\star}| \Delta_u^{\mathfrak{r}}(r) + 2r|V_{\mathfrak{r}}'|^{\vee r}|u|^{\circ r} + R|V_{\mathfrak{r}}'|^{\vee R}|u|^{\circ R} + R|V_{\mathfrak{r}}'|^{\vee R}|u_r^{\star}|^{\circ R}. \quad (3.8)$$

Для гармонической на $r\mathbb{D} \setminus \frac{r^2}{R}\overline{\mathbb{D}}$ функции $V_r^\star$, обращающейся по построению (3.6) в нуль на окружности $\frac{r^2}{R}\overline{\mathbb{D}}$, по принципу максимума выполнено неравенство

$$\sup_{r\mathbb{D} \setminus \frac{r^2}{R}\overline{\mathbb{D}}} |V_r^\star| \leq |V|^{\vee r},$$

а по определениям (3.6) и (2.2) имеем $|u_r^\star|^{\circ R} = |u|^{\circ \frac{r^2}{R}}$. Таким образом, из (3.8) получаем

$$\left| \int_{R\overline{\mathbb{D}} \setminus r\overline{\mathbb{D}}} V d\Delta_u \right| \leq |V|^{\vee r} \Delta_u^\mathfrak{r}(r) + 2r|V_\mathfrak{r}'|^{\vee r} |u|^{\circ r} + R|V_\mathfrak{r}'|^{\vee R} |u|^{\circ R} + R|V_\mathfrak{r}'|^{\vee R} |u|^{\circ \frac{r^2}{R}}. \quad (3.9)$$

Лемма 3.2. Для любой субгармонической на $r\overline{\mathbb{D}}$ функции u ввиду очевидного равенства $|u| = 2u^+ - u$, а также неравенства $u(0) \leq u^{\circ r}$ имеем

$$|u|^{\circ r} = 2(u^+)^{\circ r} - u^{\circ r} \leq 2(u^+)^{\circ r} - u(0) \stackrel{(2.2)}{\leq} 2(u^+)^{\vee r} - u(0). \quad (3.10)$$

По неравенству (3.10) при $u(0) = 0$ получаем $|u|^{\circ r} \leq 2(u^+)^{\vee r}$, откуда по (3.9)

$$\left| \int_{R\overline{\mathbb{D}} \setminus r\overline{\mathbb{D}}} V d\Delta_u \right| \leq |V|^{\vee r} \Delta_u^\mathfrak{r}(r) + 4r|V_\mathfrak{r}'|^{\vee r} (u^+)^{\circ r} + 2R|V_\mathfrak{r}'|^{\vee R} (u^+)^{\circ R} + 2R|V_\mathfrak{r}'|^{\vee R} (u^+)^{\circ \frac{r^2}{R}}.$$

Это влечёт за собой требуемое неравенство (3.4), поскольку для второго сомножителя с субгармонической функцией u^+ в последнем слагаемом имеем $(u^+)^{\circ \frac{r^2}{R}} \leq (u^+)^{\circ R}$. $\square$

Теорема 3.2. Пусть выполнены условия теоремы 2.1. Тогда для любой субгармонической на $\mathbb{C}$ функции u со значением $u(0) = 0$ имеет место неравенство

$$\begin{aligned} \left| \int_{R\overline{\mathbb{D}} \setminus r\overline{\mathbb{D}}} L d\Delta_u \right| &\leq \left(|L|^{\vee r} + |L|^{\vee \frac{R^2}{r}} + 4r|L_\mathfrak{r}'|^{\vee r} + 4\frac{R^2}{r}|L_\mathfrak{r}'|^{\vee \frac{R^2}{r}} \right) (u^+)^{\circ er} \\ &\quad + \left(|L|^{\vee \frac{R^2}{r}} + |L|^{\vee R} + 8R|L_\mathfrak{r}'|^{\vee R} \right) (u^+)^{\circ eR}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Доказательство. Рассмотрим обращающуюся в нуль на $R\partial\mathbb{D}$ функцию-разность

$$V: z \mapsto_{r \leq |z| \leq R} L(z) - L\left(\frac{R^2}{\bar{z}}\right) \stackrel{(3.6)}{=} L(z) - L_R^\star(z), \quad (3.12)$$

полученную вычитанием из функции L её же инверсии $L_R^\star$ относительно окружности $R\partial\mathbb{D}$. Поскольку инверсия сохраняет гармоничность, по построению (3.12) эта функция V удовлетворяет условиям теоремы 3.1. Таким образом, справедливо заключительное неравенство (3.4) теоремы 3.1, которое по построению (3.12) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \left| \int_{R\overline{\mathbb{D}} \setminus r\overline{\mathbb{D}}} L d\Delta_u \right| &\leq \left| \int_{R\overline{\mathbb{D}} \setminus r\overline{\mathbb{D}}} L_R^\star d\Delta_u \right| + (|L|^{\vee r} + |L_R^\star|^{\vee r}) \Delta_u^\mathfrak{r}(r) \\ &\quad + 4r \left(|L_\mathfrak{r}'|^{\vee r} + |(L_R^\star)_\mathfrak{r}'|^{\vee r} \right) (u^+)^{\circ r} + 4R \left(|L_\mathfrak{r}'|^{\vee R} + |(L_R^\star)_\mathfrak{r}'|^{\vee R} \right) (u^+)^{\circ R}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Для первого слагаемого из правой части по принципу минимума-максимума для гармонических функций и свойствам инверсии имеем

$$\left| \int_{R\overline{\mathbb{D}} \setminus r\overline{\mathbb{D}}} L_R^\star d\Delta_u \right| \leq (|L_R^\star|^{\vee r} + |L_R^\star|^{\vee R}) \Delta_u^\mathfrak{r}(R) = (|L|^{\vee \frac{R^2}{r}} + |L|^{\vee R}) \Delta_u^\mathfrak{r}(R),$$

Отсюда в силу элементарных соотношений

$$\Delta_u^{\mathfrak{r}}(R) = \int_R^{eR} \frac{\Delta_u^{\mathfrak{r}}(t)}{t} dt \leq \int_0^{eR} \frac{\Delta_u^{\mathfrak{r}}(t)}{t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(eRe^{i\theta}) d\theta = u^{\circ eR} \leq (u^+)^{\circ eR}, \quad (3.14)$$

что даёт неравенство

$$\left| \int_{R\mathbb{D} \setminus r\overline{\mathbb{D}}} L_R^* d\Delta_u \right| \leq (|L|^{\vee \frac{R^2}{r}} + |L|^{\vee R})(u^+)^{\circ eR}. \quad (3.15)$$

Аналогично для второго слагаемого в правой части (3.13) имеем

$$(|L|^{\vee r} + |L_R^*|^{\vee r}) \Delta_u^{\mathfrak{r}}(r) \stackrel{(3.14)}{\leq} (|L|^{\vee r} + |L|^{\vee \frac{R^2}{r}})(u^+)^{\circ er}. \quad (3.16)$$

Из определения инверсии (3.6) для радиальной производной следует равенство

$$|(L_R^*)'_{\mathfrak{r}}|^{\vee t} = \frac{R^2}{t^2} |L'_{\mathfrak{r}}|^{\vee \frac{R^2}{t}}. \quad (3.17)$$

Используя это при $t := r$ для третьего слагаемого в правой части (3.13), получаем

$$4r \left(|L'_{\mathfrak{r}}|^{\vee r} + |(L_R^*)'_{\mathfrak{r}}|^{\vee r} \right) (u^+)^{\circ r} \stackrel{(3.17)}{=} 4 \left(r |L'_{\mathfrak{r}}|^{\vee r} + \frac{R^2}{r} |L'_{\mathfrak{r}}|^{\vee \frac{R^2}{r}} \right) (u^+)^{\circ r}. \quad (3.18)$$

Аналогично из (3.17) при $t := R$ для последнего слагаемого справа в (3.13) имеем равенство

$$4R \left(|L'_{\mathfrak{r}}|^{\vee R} + |(L_R^*)'_{\mathfrak{r}}|^{\vee R} \right) (u^+)^{\circ R} \stackrel{(3.17)}{=} 8R |L'_{\mathfrak{r}}|^{\vee R} (u^+)^{\circ R}. \quad (3.19)$$

Из неравенств (3.15) и (3.16), а также пары равенств (3.18) и (3.19) вместе с очевидным неравенством $(u^+)^{\circ t} \leq (u^+)^{\circ et}$ для любого $t > 0$ по (3.13) получаем требуемое (3.11). $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А.А. Гольдберг, Б.Я. Левин, И.В. Островский. *Целые и мероморфные функции* // Итоги науки тех., Сер. Современ. пробл. мат., Фундам. направления **85**, 5–186 (1991).
2. А.А. Кондратьев. *Метод рядов Фурье для целых и мероморфных функций вполне регулярного роста* // Мат. сб. **106(148)**:3(7), 386–408 (1978).
3. Б.Я. Левин. *Распределение корней целых функций*. М.: Физматгиз. 1956.
4. К.Г. Малютин. *Ряды Фурье и δ -субгармонические функции конечного γ -типа в полуплоскости* // Мат. сб. **192**:6, 51–70 (2001).
5. Э.Б. Меньшикова. *Интегральные формулы типа Карлемана и Б.Я. Левина для мероморфных и субгармонических функций* // Изв. высш. учебн. завед., Мат. 6, 37–53 (2022).
6. Б.Н. Хабибуллин. *Полнота систем экспонент и множества единственности* (издание четвертое, дополненное). Уфа: РИЦ БашГУ. 2012.
7. Б.Н. Хабибуллин. *Распределение корней целых функций с субгармонической мажорантой* // Мат. сб. **216**:7, 109–152 (2025).
8. У. Хейман, П. Кеннеди. *Субгармонические функции*. М.: Мир. 1980.
9. R.P. Boas Jr. *Entire Functions*. Academic Press Inc. Publishers, New York (1954).
10. B.Ya. Levin. *Lectures on Entire Functions*. Amer. Math. Soc., Providence, R.I. (1996).
11. E. Lindelöf. *Sur les fonctions entières d'ordre entier* // Ann. de l'Éc. Norm. (3). **22**, 369–395 (1905).
12. Th. Ransford *Potential Theory in the Complex Plane*. Cambridge University Press, Cambridge (1995).

13. L.A. Rubel, B.A. Taylor. *A Fourier series method for meromorphic and entire functions* // Bull. Soc. Math. France. **96**, 53–96 (1968).
14. L.A. Rubel, J.E. Colliander. *Entire and Meromorphic Functions*. Springer, New York (1996).

Елена Геннадьевна Кудашева,
Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы,
ул. Октябрьской революции, 3а,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: lena_kudasheva@mail.ru

Энже Булатовна Меньшикова,
Институт математики с вычислительным центром УФИЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: algeom@bsu.bashedu.ru

Булат Нурмиевич Хабибуллин,
Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы,
ул. Октябрьской революции, 3а,
450008, г. Уфа, Россия,
Институт математики с вычислительным центром УФИЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: khabib-bulat@mail.ru