ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 17. № 4 (2025). С. 40-54.

УДК 517.984 + 517.928

# ОБ УСЛОВИЯХ ПОЛНОТЫ СИСТЕМЫ КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА НА ОТРЕЗКЕ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ

**Х.К. ИШКИН, Б.Е. КАНГУЖИН**

**Аннотация.** В работе исследованы условия полноты системы корневых функций (СКФ) оператора $L_U$, порожденного в пространстве $H = L_2(0,1)$ дифференциальным выражением

$$l(y) = -y'' + qy \quad (q \in L_1(0,1))$$

и интегральными условиями

$$y^{(j-1)}(0) + (l(y), u_j) = 0 \quad (u_j \in L_2(0,1),\ j = 1,2).$$

Показано, что СКФ оператора $L_U$ полна в его области определения, если существуют два луча на верхней полуплоскости, таких, что при всех больших $\lambda$ из этих лучей характеристический определитель ограничен снизу функцией $\lambda^m e^{-|\operatorname{Im}\lambda|}$, $m \geqslant \frac{1}{2}$. Если оператор $L_U$ плотно определен, то для полноты СКФ в $H$ достаточно выполнения указанной оценки с любым $m \in \mathbb{R}$. Кроме того, получено интегральное представление для характеристического определителя в виде синус–преобразования некоторой функции $A$, которая выражается через $u_1$, $u_2$ и ядро оператора преобразования для уравнения $l(y) = \lambda^2 y$. Используя указанное представление, найдены явные (в терминах функций $u_1$, $u_2$) условия полноты СКФ оператора $L_U$ в $H$ или $D(L_U)$.

**Ключевые слова:** дифференциальный оператор с интегральными краевыми условиями, полнота, спектр, асимптотика.

**Mathematics Subject Classification:** 34L10, 47B28

## 1. Введение

Рассмотрим оператор $L$, действующий в пространстве $L_2(0,1)$ по правилу

$$Ly = l(y) := -y'' + qy,$$
$$D(L) = D := \{y \in L_2(0,1) : \ y, y' \in AC[0,1],\ l(y) \in L_2(0,1)\},$$

и его сужение $L_U$, определяемое условиями

$$U_j(y) := y^{(j-1)}(0) + (l(y), u_j) = 0, \qquad j = 1,2. \tag{1.1}$$

Здесь $AC[0,1]$ — множество функций, абсолютно непрерывных на $[0,1]$, $(f,g)$ — скалярное произведение в $L_2(0,1)$, функции $q \in L_1(0,1)$, $u_1, u_2 \in L_2(0,1)$ — комплекснозначные. Как известно [5], [13], условия (1.1) дают полное описание всех сужений оператора $L$, имеющих

Kh.K. Ishkin, B.E. Kanguzhin, On completeness conditions for system of root functions of differential operator on segment with integral conditions.



Исследование Х.К. Ишкина выполнено в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа, соглашение № 075-02-2025-1637.

*Поступила 21 августа 2025 г.*

непустое резольвентное множество $\rho(L_U)$; при всех $\mu \in \rho(L_U)$ резольвента $(L_U - \mu)^{-1}$ компактна [5, Гл. III, § 1, Лемма 6], $\sigma(L_U)$ — спектр оператора $L_U$ — совпадает с множеством $\{\lambda^2: \ \Delta_U(\lambda) = 0\}$, где

$$\Delta_U = \begin{vmatrix} U_1(c) & U_1(s) \\ U_2(c) & U_2(s) \end{vmatrix}, \tag{1.2}$$

$s$, $c$ — решения уравнения

$$-y'' + qy = \lambda^2 y, \quad x \in [0,1], \tag{1.3}$$

удовлетворяющие условиям

$$s(0,\lambda) = c'(0,\lambda) = 0, \quad s'(0,\lambda) = c(0,\lambda) = 1$$

(здесь и всюду далее $\varphi'(x,\lambda)$ — производная по $x$). При каждом фиксированном $x \in [0,1]$ $s(x,\cdot)$ и $c(x,\cdot)$ — целые функции экспоненциального типа [18, Гл. I, § 2], потому функция $\Delta_U$ целая, так что $\sigma(L_U)$ либо пуст, либо состоит из конечного или счетного числа собственных значений, каждое из которых имеет конечную алгебраическую кратность. Одним из авторов показано [34], что возможны только 1-й и 3-й случаи и в терминах некоторого уравнения для тройки $(q, u_1, u_2)$ найдено необходимое и достаточное условие реализации случая $\sigma(L_U) = \varnothing$. В работе другого автора [10] был получен следующий результат:

*Пусть выполнены условия*

$$\lim_{\delta\to+0} \delta^{-2} \int_0^\delta \int_{1-\delta}^1 (u_1(y)u_2(x) - u_2(y)u_1(x))\, dydx \neq 0, \tag{1.4}$$

$$|\Delta_U(\lambda)| \geqslant C|\lambda| \ln(1+|\lambda|) e^{|\mathrm{Im}\lambda|}, \qquad \lambda \in \mathbb{C}\backslash A_\varepsilon, \tag{1.5}$$

*где $C = C(\varepsilon) > 0$, $A_\varepsilon$ — объединение кружков радиуса $\varepsilon$ с центрами в нулях $\Delta_U$. Тогда СКФ оператора $L_U$ полна в $L_2(0,1)$.*

Условие (1.4) в той или иной форме присутствует практически во всех работах, посвященных вопросам полноты или базисности СКФ оператора $L_U$. По существу, это условие служит для выполнения оценки типа (1.5), зависящей от степени гладкости функций $u_j$. Так, в работе [30] Шкаликовым (для дифференциального выражения $n$-го порядка) был выделен класс интегральных условий, при которых СКФ соответствующего оператора образует базис Рисса со скобками или просто базис Рисса. Применительно к нашему случаю эти условия имеют вид

$$V_j(y) + \sum_{\nu=0}^{k_j} \int_0^1 y^{(\nu)}(x) du_{j\nu}(x) = 0, \quad j = 1,2, \tag{1.6}$$

$$V_j(y) = \sum_{\nu=0}^{k_j} \left(\alpha_{j\nu} y^{(\nu)}(0) + \beta_{j\nu} y^{(\nu)}(1)\right),$$

где $1 \geqslant k_1 \geqslant k_2 \geqslant 0$, $u_{j\nu}$ — функции ограниченной вариации, непрерывные в точках 0, 1. Если $L_V$ — оператор, полученный из $L_U$ заменой (1.6) на условия

$$V_j(y) = 0, \qquad j = 1,2, \tag{1.7}$$

которые регулярны по Биркгофу [20, Гл. II, § 4], то СКФ оператора $L_V$ образует в $L_2(0,1)$ базис Рисса со скобками [29], а в случае усиленной регулярности — обычный базис Рисса [19], [12]. Согласно основному результату работы [30], если условия (1.7) регулярны по Биркгофу, то СКФ оператора $L_U$ образует в $L_2(0,1)$ базис Рисса со скобками, а в случае усиленной регулярности — базис Рисса. Важный момент при доказательстве базисности — оценка

$$|\Delta_U(\lambda)| > C(\varepsilon)|\lambda|^{k_1+k_2-1}e^{|\operatorname{Im}\lambda|}, \qquad \lambda \in \mathbb{C}\backslash A_\varepsilon, \tag{1.8}$$

где $C(\varepsilon)$, $A_\varepsilon$ определены так же, как в (1.5). Как отмечено в [30, Лемма 1], эта оценка равносильна регулярности по Биркгофу условий (1.8).

В работе Скубачевского и Стеблова [26] и последовавшей за ней серией [2], [21], [23], [24], [25], [27] подробно изучен случай, когда условия (1.6) имеют вид

$$(y, \varphi_j) = 0 \ (\varphi_j \in L_2(0,1)), \qquad j = 1, 2. \tag{1.9}$$

Если хотя бы одно из условий (1.1) имеет вид (1.9), оператор $L_U$ определен неплотно, потому не имеет сопряженного. В такой ситуации методика работ [19], [12], [30] неприменима. Тем не менее, предполагая некоторую регулярность поведения функций $\varphi_j$ вблизи точек 0 и 1 так, что

$$\varphi_1(1)\varphi_2(0) - \varphi_1(0)\varphi_2(1) \neq 0,$$

удается достаточно подробно исследовать различные спектральные свойства рассматриваемого оператора. Так, в работах [26], [2], [27] доказана дискретность спектра, локализация его около луча $\arg\lambda = 0$, в [21] установлена базисность СКФ в $D(L_U)$ по Абелю, а в [23] — базисность по Риссу. В работах [24], [25] найдена асимптотика спектра и получена оценка резольвенты вдали от спектра, используя лишь некоторые требовании на асимптотику преобразований Лапласа функций $\varphi_j$. Отметим также работы [4], [35], в которых получены близкие к [26], [2], [27] результаты для оператора $L_U$ при $U_j(y) = (y', \varphi_j)$ $(\varphi_j \in L_2(0,1))$ и оператора 4-го порядка вида $L_U$.

Условия (1.1) могут быть приведены к виду (1.6) (в частности, к виду (1.9)) лишь при достаточной гладкости $u_j$. Ниже (леммы 2.3, 2.4) будут получены критерии равносильности условий (1.1), (1.9) и (1.1), (1.6).

Возникает вопрос: нельзя ли при менее жестких ограничениях на функции $u_j$ получить какую–либо достаточно нетривиальную информацию о спектральных свойствах оператора $L_U$?

В настоящей статье найдена оценка, существенно более мягкая по сравнению с (1.5), при выполнении которой СКФ оператора $L_U$ полна в $D(L_U)$ или в $L_2(0,1)$. Кроме того, получено интегральное представление функции $\Delta_U$ в виде синус–преобразования некоторой функции $A$, которая выражается через $u_1$, $u_2$ и ядро $\mathcal{K}(\cdot,\cdot)$ оператора преобразования для уравнения (1.3). Отметим, что функция $A$ была получена в работе [34] при исследовании спектра оператора $L_U$. В данной работе нам удалось несколько упростить вид этой функции. Используя указанное представление, найдены явные (в терминах функций $u_1$, $u_2$) условия полноты СКФ оператора $L_U$ в $D(L_U)$.

Операторы типа $L_U$ возникают в теории турбулентности [39] и в теории марковских процессов [32], [33]. Различные спектральные свойства операторов вида $L_U$ (произвольного порядка), кроме указанных выше, изучались в работах Пиконе [37], [38], Тамаркина [28], Любича [15], [16], Брюнса [1], Кролла [36], Ильина и Моисеева [6], [7], Макина [17], Кангужина [9], [11], Полякова [22] и др. Более подробную библиографию по обсуждаемой теме можно найти в обзорах [5], [27], [36].

## 2. Формулировка основных результатов

**2.1. Подготовительные утверждения.** Выше было отмечено, что в случае, когда оператор $L_U$ определен неплотно, классические методы не работают. В этой связи важно знать, при каких условиях на функции $u_j$ оператор $L_U$ плотно определен. Очевидно, если хотя бы одна линейная комбинация условий (1.1) эквивалентна условию $(y, \varphi) = 0$ $(\varphi \in L_2(0,1), \varphi \neq 0)$, то оператор $L_U$ определен неплотно. Верно и обратное утверждение:

**Лемма 2.1.** *Оператор $L_U$ определен неплотно тогда и только тогда, когда существует $\varphi \in L_2(0,1)$, $\varphi \neq 0$, такая, что*

$$\psi'(0)u_1 - \psi(0)u_2 = \psi,$$

*где $\psi$ — решение задачи*

$$-\psi'' + \overline{q}\psi = \varphi, \qquad \psi(1) = \psi'(1) = 0. \tag{2.1}$$

**Лемма 2.2.** *Если существуют последовательность $\{\lambda_k\}$, уходящая в бесконечность по сектору*

$$S_\varepsilon = \varepsilon \leqslant \arg\lambda \leqslant \pi - \varepsilon \quad (\varepsilon > 0),$$

*и постоянная $C > 0$, такие, что*

$$|\Delta_U(\lambda_k)| \geqslant Ce^{\operatorname{Im}\lambda_k}, \tag{2.2}$$

*то оператор $L_U$ плотно определен.*

В следующем предложении дается полное описание класса функций $u_1$, $u_2$, при которых условия (1.1) представляются в виде (1.9).

**Лемма 2.3.** *Пусть функции $\varphi_1, \varphi_2 \in L_2(0,1)$ таковы, что $\psi_j$ — решения задачи (2.1) при $\varphi = \varphi_j$ — удовлетворяют условию*

$$d_1 := \psi_1(0)\psi_2'(0) - \psi_1'(0)\psi_2(0) \neq 0$$

*и пусть*

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{d_1}\begin{pmatrix} \psi_2(0) & -\psi_1(0) \\ \psi_2'(0) & -\psi_1'(0) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

*Тогда условия (1.1) и (1.9) эквивалентны в $D$.*

*Обратно, пусть условия (1.1) и (1.9) эквивалентны в $D$. Тогда $d_1 \neq 0$ и справедливо равенство (2.3).*

**Замечание 2.1.** *Пусть $c_0 = c|_{\lambda=0}$, $s_0 = s|_{\lambda=0}$, где $s$, $c$ — функции, фигурирующие в (1.2). Тогда для решения задачи (2.1) верна формула*

$$\psi(x) = \int_x^1 (\overline{s_0}(x)\overline{c_0}(t) - \overline{c_0}(x)\overline{s_0}(t))\varphi(t)dt. \tag{2.4}$$

*Поэтому если $\varphi$ — произвольная функция из $L_2(0,1)$, ортогональная $s_0$ и $c_0$, то $\psi(0) = \psi'(0) = 0$. Следовательно, $d_1 = 0$, если хотя бы одна из функций $\varphi_1$, $\varphi_2$ ортогональна $s_0$ и $c_0$.*

В силу леммы 2.3 для эквивалентности условий (1.1) и (1.9) необходимо, чтобы функции $u_j$, помимо прочего, должны быть достаточно гладкими, а именно, принадлежать множеству

$$D^* = \{y \in L_2(0,1) : \ y, y' \in AC[0,1], \ -y'' + \overline{q}y \in L_2(0,1)\}.$$

Теперь выясним, насколько гладкой должны быть функции $u_j$ для равносильности условий (1.1) и (1.6). Для этого перепишем (1.6) в виде

$$\Phi_j(y) := \sum_{\nu=0}^{1}\int_0^1 y^{(\nu)}(x)d\varphi_{j\nu}(x) = 0, \qquad j = 1, 2, \tag{2.5}$$

где[1] функции $\varphi_{j\nu}$ отличаются от $u_{j\nu}$ лишь значениями в точках 0 и 1. Без ограничения общности можно считать, что $\varphi_{j\nu}(1) = 0$. Обозначим через $Q$ оператор, действующий в $L_\infty(0,1)$ по формуле

$$Qf = \int\limits_x^1 (t-x)\overline{q} f\,dt,$$

и положим

$$\psi_j = (I-Q)^{-1} f_j, \qquad j = 1, 2, \tag{2.6}$$

$$f_j(x) = \overline{\varphi_{j1}}(x) + \int\limits_x^1 \overline{\varphi_{j0}}(t)dt.$$

Оператор $Q$ является вольтерровым в пространстве $L_\infty(0,1)$, потому уравнение (2.6) имеет единственное решение в этом пространстве, которое в силу равенства

$$\psi_j = f_j + Q\psi_j$$

является функцией ограниченной вариации, равной 0 в точке 1.

**Лемма 2.4.** *Пусть функции ограниченной вариации $\varphi_{j\nu}$ $(j,\nu = 1,2)$ таковы, что*

$$d_2 := \begin{vmatrix} \overline{\varphi_{10}}(0) - \int\limits_0^1 \overline{q}\psi_1 dt & \psi_1(0) \\ \overline{\varphi_{20}}(0) - \int\limits_0^1 \overline{q}\psi_2 dt & \psi_2(0) \end{vmatrix} \neq 0 \tag{2.7}$$

*и пусть*

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{d_2} \begin{pmatrix} -\psi_2(0) & \psi_1(0) \\ \overline{\varphi_{20}}(0) - \int\limits_0^1 \overline{q}\psi_2 dt & \overline{\varphi_{10}}(0) - \int\limits_0^1 \overline{q}\psi_1 dt \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}. \tag{2.8}$$

*Тогда условия* (1.1) *и* (2.5) *эквивалентны в $D$.*

*Обратно, пусть* (1.1) *и* (2.5) *эквивалентны в $D$. Тогда $d_2 \neq 0$ и справедливо равенство* (2.8).

Пусть $L_\Gamma$ — оператор $L_U$ при

$$U_j(y) = \Gamma_j(y) := a_{j1}y(0) + a_{j2}y'(0) + a_{j3}y(1) + a_{j4}y'(1), \quad j = 1, 2,$$

где $a_{jk} \in \mathbb{C}$ таковы, что $\rho(L_\Gamma) \neq \varnothing$. В частности, если граничные условия $\Gamma_j(y) = 0$ невырожденны, то СКФ $L_\Gamma$ полна в $L_2(0,1)$ [18, Теорема 1.3.1]. Обозначим

$$R_U(\lambda) = (L_U - \lambda^2)^{-1} \quad \text{и} \quad R_\Gamma(\lambda) = (L_\Gamma - \lambda^2)^{-1}.$$

**Лемма 2.5.** *Пусть $\lambda_0^2 \in \rho(L_U)$. Тогда при любых $\Gamma_j$, таких, что $\lambda_0^2 \in \rho(L_\Gamma)$, справедливо представление*

$$R_U(\lambda_0)f = \frac{1}{\Delta_U(\lambda_0)} \begin{vmatrix} c & s & R_\Gamma f \\ U_1(c) & U_1(s) & U_1(R_\Gamma f) \\ U_2(c) & U_2(s) & U_2(R_\Gamma f) \end{vmatrix} (\lambda_0), \qquad f \in L_2(0,1). \tag{2.9}$$

**Следствие 2.1.** *При любых $u_1, u_2 \in L_2(0,1)$ резольвента оператора $L_U$ — оператор Гильберта — Шмидта.*

[1] Если в (1.6) $k_j = 0$, то в (2.5) полагаем $\varphi_{j1} = 0$

**2.2. Основные результаты.** Если оператор $L_U$ плотно определен, можно пользоваться общей схемой [3, Гл. XI, § 6, Следствие 31][2]:

**Теорема 2.1** (Данфорд — Шварц). *Пусть $H$ — сепарабельное гильбертово пространство, $T$ — плотно определенный в $H$ оператор с резольвентой из класса Гильберта — Шмидта. Далее пусть $p_k$ $(k = \overline{1,5})$ — лучи, удовлетворяющие условиям:*

а) *углы между любыми соседними меньше $\dfrac{\pi}{2}$,*

б) *существует постоянная $M \geqslant -1$, такая, что*

$$\left\|(T-\lambda)^{-1}\right\| = O\left(\lambda^M\right) \quad \text{при} \quad \lambda \to \infty$$

*вдоль каждого луча $p_k$.*

*Тогда система корневых векторов оператора $T$ полна в $H$.*

**Теорема 2.2.** *Пусть оператор $L_U$ плотно определен и обладает свойством: существуют лучи*

$$P_k = \{\arg z = \beta_k,\ |z| \geqslant R_k\} \quad (k = 1, 2), \quad R_k \geqslant 0, \quad 0 < \beta_1 < \beta_2 < \pi,$$

*такие, что*

$$|\Delta(\lambda)| \geqslant C|\lambda|^N e^{\operatorname{Im}\lambda}, \quad \lambda \in P_1 \cup P_2, \tag{2.10}$$

*где $C > 0$ и $N \in \mathbb{R}$ — постоянные, не зависящие от $\lambda$. Тогда СКФ оператора $L_U$ полна в $L_2(0,1)$.*

**Замечание 2.2.** *Согласно Следствию 2.1 $L_U^{-1} \in \sigma_2$, так что по теореме Данфорда — Шварца для полноты СКФ оператора $L_U$ достаточно найти 5 лучей, удовлетворяющих условиям а) и б). Специфика оператора $L_U$ позволяет обойтись только двумя лучами.*

**Следствие 2.2.** *Если функция $\Delta_U$ удовлетворяет оценкам (2.2) и (2.10), то СКФ оператора $L_U$ полна в $L_2(0,1)$.*

Согласно лемме 2.1 область определения оператора $L_U$ может быть не плотной. В этой ситуации $L_U^*$ не существует, поэтому приведенная выше «общая схема» не работает. Пользуясь лишь методами теории функций нам удалось получить следующий результат.

**Теорема 2.3.** *Пусть $P_k$ — те же лучи, что в Теореме 2.2, и*

$$|\Delta(\lambda)| \geqslant C|\lambda|^{-\frac{1}{2}} e^{\operatorname{Im}\lambda}, \quad \lambda \in P_1 \cup P_2, \tag{2.11}$$

*где $C > 0$ не зависит от $\lambda$. Тогда СКФ оператора $L_U$ полна в $D(L_U)$.*

Для формулировки следующего результата введем обозначения. Пусть $\mathcal{K}(\cdot,\cdot)$ — ядро оператора преобразования для решения $e(x,\lambda)$ уравнения (1.3) с начальными условиями $e(0,\lambda) = 1,\ e'(0,\lambda) = i\lambda$ [18, Гл. 1, § 2]:

$$e(x,\lambda) = e^{i\lambda x} + \int\limits_{-x}^{x} \mathcal{K}(x,t) e^{i\lambda t} dt,$$

$K_\pm$ — операторы, действующие в $L_2(0,1)$ по формулам

$$\left[K_\pm f\right](x) = \int\limits_{x}^{1} \mathcal{K}(t, \pm x) f(t) dt. \tag{2.12}$$

[2]Имеется обобщение этого утверждения на операторы с резольвентой из идеала Неймана — Шаттена $\sigma_p$ с произвольным $p > 0$ [31, Теорема 4.7 и Замечание 4.8].

Положим

$$A_1[g,f](x) = B[(I+K_+)g,(I+K_-)f](x) - B[(I+K_+)f,(I+K_-)g](x),$$

$$B[f,g](x) = \int\limits_x^1 f(t)g(t-x)dt,$$

$$A_2[f](x) = \int\limits_x^1 \left[(I+K_+ + K_-)f\right](t)dt,$$

$$A_3[f](x) = \int\limits_x^1 (t-x)\left[(I+K_+ - K_-)f\right](t)dt,$$

$$A(x) = A_1[u_2,u_1](x) - A_2[u_1](x) - A_3[u_2](x).$$

**Теорема 2.4.** *Характеристический определитель оператора $L_U$ представляется в виде*

$$\Delta_U(\lambda) = \lambda^3 \int\limits_0^1 \sin\lambda x A(x)dx + \lambda^2 A(0) + 1. \tag{2.13}$$

**Замечание 2.3.** *В работе [8] для оператора Штурма — Лиувилля на кривой с условиями Дирихле или Неймана найдено аналогичное (2.13) представление для характеристического определителя. Используя это представление, получен критерий асимптотической локализации спектра около конечного числа лучей.*

**Следствие 2.3.** *Пусть при некотором $m$ предел*

$$\lim_{x\to 1}\frac{A(x)}{(1-x)^m}$$

*существует и не равен 0. Если $m \leqslant \frac{5}{2}$, то СКФ оператора $L_U$ полна в $D(L_U)$, а при $m \leqslant 2$ — в $L_2(0,1)$.*

**Следствие 2.4.** *Пусть $q=0$ и при некотором $m$ предел*

$$\lim_{x\to 1}(1-x)^{-m}\int\limits_x^1 \left[u_2(t)u_1(t-x) - u_2(t-x)u_1(t) - u_1(t) - (t-x)u_2(t)\right]dt$$

*существует и не равен 0. Если $m \leqslant \frac{5}{2}$, то СКФ оператора $L_U$ полна в $D(L_U)$, а при $m \leqslant 2$ — в $L_2(0,1)$.*

## 3. Доказательства подготовительных лемм

**3.1. Доказательство леммы 2.1.** Достаточность доказывается непосредственной проверкой. Пусть $D_U$ не плотна в $L_2(0,1)$. Тогда существует ненулевой элемент $\varphi$ из $L_2(0,1)$, такой, что $(y,\varphi)=0$ для всех $y\in D(L_U)$. Пусть $\psi$ — функция, фигурирующая в формулировке леммы. Имеем

$$0 = (y, l^*(\psi)) = y(0)\overline{\psi'}(0) - y'(0)\overline{\psi}(0) + (l(y),\psi).$$

Согласно (1.1)
$$y(0) = -(l(y), u_1),\ y'(0) = -(l(y), u_2),$$
так что
$$(l(y), \psi'(0)u_1 - \psi(0)u_2 - \psi) = 0$$
для всех $y \in D(L_U)$. Так как $0 \in \rho(L_U)$ и множество $\{l(y),\ y \in (D(L_U)\} = \operatorname{Ran}(L_U)$ совпадает с $L_2(0,1)$, имеем
$$\psi'(0)u_1 - \psi(0)u_2 - \psi = 0.$$
Лемма доказана.

**3.2. Доказательство леммы 2.2.** Предположим, что оператор $L_U$ определен неплотно. Если $\psi$ — решение задачи (2.1) при некотором $\varphi \neq 0$, то хотя бы одно из чисел $\psi(0)$ и $\psi'(0)$ не равно 0. Пусть $\psi'(0) \neq 0$. Поскольку
$$\overline{\psi'}(0)U_1(y) - \overline{\psi}(0)U_2(y) = \overline{\psi'}(0)y(0) - \overline{\psi}(0)y'(0) + (ly, \psi) = (y, \varphi),$$
имеем
$$\Delta_U(\lambda) = \frac{1}{\overline{\psi'}(0)} \begin{vmatrix} (c, \varphi) & (s, \varphi) \\ U_2(c) & U_2(s) \end{vmatrix}.$$
Пусть $y_1$, $y_2$ — решения (1.3) с асимптотикой [20, Гл. II, § 4],
$$y_k^{(j-1)}(x, \lambda) \sim (\omega_k \lambda)^{j-1} e^{\omega_k \lambda x}[1], \qquad x \in [0,1], \qquad \lambda \to \infty, \qquad k, j = 1, 2, \tag{3.1}$$
где $\omega_1 = -i$, $\omega_2 = i$, символ $[1]$ означает выражение $1 + O\left(\lambda^{-1}\right)$, в котором оценка $O(\lambda^{-1})$ равномерна по $x \in [0,1]$ и $0 \leqslant \arg \lambda \leqslant \pi$. Имеем
$$\begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \operatorname{diag}\left(1, (i\lambda)^{-1}\right) \begin{pmatrix} [1] & [1] \\ -[1] & [1] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$
Тогда
$$\Delta_U(\lambda) = \frac{[1]}{2i\overline{\psi'}(0)\lambda} \begin{vmatrix} (y_1, \varphi) & (y_2, \varphi) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) \end{vmatrix}.$$
Отсюда, учитывая, что для любого $f \in L_2(0,1)$
$$(y_1, f) = o\left(\lambda^{-\frac{1}{2}} e^{\operatorname{Im}\lambda}\right), \qquad (y_2, f) = o\left(\lambda^{-\frac{1}{2}}\right)$$
при больших $\lambda$ из $S_\varepsilon$, получаем
$$\sup_{\varepsilon \leqslant \alpha \leqslant \pi - \varepsilon} \left|\Delta_U(re^{i\alpha})e^{-r\sin\alpha}\right| \to 0, \quad r \to +\infty.$$
Эта оценка противоречит условию леммы 2.2, следовательно, оператор $L_U$ определен плотно.

**3.3. Доказательство леммы 2.3.** Пусть $d_1 \neq 0$ и выполнено равенство (2.3). Тогда
$$\psi_j'(0)u_1 - \psi_j(0)u_2 = \psi_j \quad (j = 1, 2).$$
Отсюда (см. доказательство леммы 2.2)
$$\overline{\psi_j'}(0)U_1(y) - \overline{\psi_j}(0)U_2(y) = (y, \varphi_j).$$

Обратно, если условия (1.1) и (1.9) эквивалентны, то они порождают один и тот же оператор. Следовательно, функции
$$\Delta_U \quad \text{и} \quad \Delta_\Phi := \begin{vmatrix} (c, \varphi_1) & (s, \varphi_1) \\ (c, \varphi_2) & (s, \varphi_2) \end{vmatrix}$$
имеют одинаковые нули. Так как $\Delta_U(0) = 1$, имеем $\Delta_\Phi(0) \neq 0$. Согласно формуле (2.4),
$$d_1 = (c_0, \varphi_1)(s_0, \varphi_2) - (s_0, \varphi_1)(c_0, \varphi_2) = \Delta_\Phi(0).$$

Поэтому $d_1 \neq 0$.

Далее, рассуждая так же, как при доказательстве леммы 2.1, получаем

$$\psi_j'(0)u_1 - \psi_j(0)u_2 = \psi_j \quad (j = 1, 2).$$

Отсюда следует (2.3).

**3.4. Доказательство леммы 2.4.** Пусть $d_2 \neq 0$. Достаточность (2.8) для эквивалентности условий (1.1) и (2.5) доказывается так же, как в предыдущем пункте. Пусть равенства (1.1) и (2.5) эквивалентны в $D$. Поскольку $\psi_1$, $\psi_2$ — функции ограниченной вариации, находим

$$(ly, \psi_j) = \int_0^1 y'(x) d\left[\overline{\psi_j}(x) + \int_x^1 (x-t) q\overline{\psi_j} dt\right] - y(0)\int_0^1 q\overline{\psi_j} dt + y'(0)\overline{\psi_j}(0), \quad j = 1, 2, \; y \in D.$$

С другой стороны, согласно (2.5),

$$\Phi_j(y) = \int_0^1 y' d\left[\varphi_{j1}(x) + \int_x^1 \varphi_{j0}(t) dt\right] - y(0)\varphi_{j0}(0), \qquad j = 1, 2, \; y \in D.$$

Следовательно,

$$\Phi_j(y) = (ly, \psi_j) - y(0)\left[\varphi_{j0}(0) - \int_0^1 q\overline{\psi_j} dx\right] - y'(0)\overline{\psi_j}(0), \qquad j = 1, 2, \; y \in D. \tag{3.3}$$

Теперь действуем так же, как при доказательстве леммы 2.1: соотношение (3.3) с учетом равносильности равенств (1.1) и (2.5) в $D$ влечет

$$\left(ly, \psi_j + \left(\overline{\varphi_{j0}}(0) - \int_0^1 \overline{q}\psi_j dt\right) u_1 + \psi_j(0)u_2\right) = 0, \qquad j = 1, 2, \; y \in D_U,$$

так что

$$\psi_j + \left(\overline{\varphi_{j0}}(0) - \int_0^1 \overline{q}\psi_j dt\right) u_1 + \psi_j(0)u_2 = 0, \qquad j = 1, 2. \tag{3.4}$$

Далее, согласно (2.7) и (3.3), $d_2 = \overline{\Delta_\Phi}(0) \neq 0$ (так как $\Delta_U$ и $\Delta_\Phi$ имеют одинаковые нули и $\Delta_U(0) = 1$). Следовательно, определитель системы (3.4) не равен 0. Решая эту систему, получим (2.8).

**3.5. Доказательство леммы 2.5.** Обозначим через $L_0$ оператор $L_U$ при $u_1 = u_2 = 0$. Поскольку $\Delta_0(\lambda) \equiv 1$, оператор $R_0(\lambda) := (L_0 - \lambda^2)^{-1}$ существует при всех $\lambda \in \mathbb{C}$. Поэтому при всех $\lambda^2 \in \rho(L_U)$ имеем

$$R_U(\lambda)f = \frac{1}{\Delta_U(\lambda)}\begin{vmatrix} c & s & R_0(\lambda)f \\ U_1(c) & U_1(s) & U_1(R_0(\lambda)f) \\ U_2(c) & U_2(s) & U_2(R_0(\lambda)f) \end{vmatrix}, \qquad f \in L_2(0,1). \tag{3.5}$$

Пусть $\lambda_0^2 \in \rho(L_U)$. Выберем краевые условия $\Gamma_j$ так, чтобы $\lambda_0^2 \in \rho(L_\Gamma)$. Поскольку функции $R_0(\lambda_0)f$ и $R_\Gamma(\lambda_0)f$ удовлетворяют одному и тому же уравнению $l(y) - \lambda_0^2 y = f$, их разность есть линейная комбинация функций $s(\cdot, \lambda_0)$ и $c(\cdot, \lambda_0)$. Отсюда и из равенства (3.5) следует (2.9).

**3.6. Доказательство следствия 2.1.** Следует из (3.5) и соотношений

$$[R_0(\lambda)f](x) = -\int\limits_0^x (s(x,\lambda)c(t,\lambda) - s(t,\lambda)c(x,\lambda))f(t)dt,$$
$$U_j(R_0(\lambda)f) = \lambda^2 (f, R_0^*(\lambda)u_j) + (f, u_j).$$

## 4. Доказательства Теорем 2.2 — 2.4

**4.1. СКФ оператора $L_U$.** Из доказательства Теоремы 1 работы [34] видно, что спектр $L_U$ пуст тогда и только тогда, когда $\Delta_U(\lambda) \equiv 1$. Поэтому в условиях Теорем 2.2 и 2.3 спектр $L_U$ состоит из счетного числа собственных значений $\{\mu_k\}_1^\infty$ с кратностями $m_k$. Пусть $\mu_k = \lambda_k^2$, где $\{\lambda_k\}$ — корни $\Delta_U$ из $\Pi_+ = \{0 \leqslant \arg\lambda < \pi\}$ (без ограничения общности считаем, что $0$ — вне спектра $L_U$), пронумерованные в порядке возрастания модулей без учета кратностей. Рассмотрим функции

$$w_j = U_j(c)s - U_j(s)c, \quad j = 1,2. \tag{4.1}$$

Поскольку $U_1(w_1) = 0$, $U_2(w_1) = \Delta_U$, имеем $w_1(\cdot,\lambda_k)$ — собственная функция оператора $L_U$, соответствующая собственному значению $\mu_k$. Очевидно, это утверждение верно и для $w_2$. Если

$$\widetilde{w}_j(x,\mu) = w_j(x,\sqrt{\mu}), \quad 0 \leqslant \arg\mu < 2\pi,$$

то при каждом $j = 1,2$ последовательность

$$W_j := \left(\frac{\partial}{\partial\mu}\right)^\nu \widetilde{w}_j(x,\mu)\Big|_{\mu=\mu_k}, \quad k = 1,2,\ldots, \quad \nu = \overline{0, m_k - 1}, \tag{4.2}$$

образует СКФ оператора $L_U$.

**4.2. Доказательство теоремы 2.2.** Допустим, что система $W_1$[1] неполна, то есть существует ненулевая функция $f$ из $L_2(0,1)$, ортогональная $W_1$. Следуя идее, изложенной в упомянутом выше Замечании 4.8 из работы [31], рассмотрим векторнозначную (со значениями в $L_2(0,1)$) функцию

$$w(\lambda) = \left(L_U^* - \overline{\lambda}^2\right)^{-1} f,$$

которая в силу сделанного предположения является целой относительно переменной $\overline{\lambda}$. Покажем, что

$$\|w(\lambda)\| = O\left(\lambda^N\right), \quad \lambda \in P_1 \cup P_2. \tag{4.3}$$

Для этого достаточно доказать, что

$$\|\left(L_U - \lambda^2\right)^{-1}\| = O\left(\lambda^N\right), \quad \lambda \in P_1 \cup P_2. \tag{4.4}$$

Выберем в качестве $\Gamma$ в (2.9) условия Дирихле $y(0) = y(1) = 0$ и обозначим через $L_D$ и $R_D(\lambda)$ соответствующий оператор и его резольвенту $(L_D - \lambda^2)^{-1}$. Тогда

$$\|R_D(\lambda)\| = O\left(\lambda^{-2}\right), \quad \lambda \to \infty, \tag{4.5}$$

вдоль любого луча $\arg\lambda = \beta$ $(0 < \beta < \pi)$.

Функции $y_j$, определенные по (3.1), линейно независимы, так что

$$\begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} = \Omega \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

[1]Системы $W_1$ и $W_2$ полны или неполны одновременно.

где $\Omega$ — невырожденная при всех $\lambda$ матрица, зависящая только от $\lambda$. Переходя в (2.9) к $y_1$, $y_2$, получим

$$R_U(\lambda)f = R_D(\lambda)f + \frac{1}{D_U(\lambda)}\begin{vmatrix} \Psi_1(\cdot,\lambda) & \Psi_2(\cdot,\lambda) \\ U_1(R_D(\lambda)f) & U_2(R_D(\lambda)f)\end{vmatrix}, \quad f \in L_2(0,1), \tag{4.6}$$

$$\Psi_j(x,\lambda) = \begin{vmatrix} y_1(x,\lambda) & y_2(x,\lambda) \\ U_1(R_D(\lambda)f) & U_2(R_D(\lambda)f)\end{vmatrix},$$

$$D_U = \begin{vmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2)\end{vmatrix}. \tag{4.7}$$

Без ограничения общности можно считать, что постоянные $R_k$ в определении лучей $P_k$ таковы, что оценки (3.1) и (4.5) верны на обоих лучах $P_1$ и $P_2$. Тогда

$$|D_U(\lambda)| = 2[1]|\lambda||\Delta(\lambda)|, \quad \lambda \in P_1 \cup P_2. \tag{4.8}$$

Используя эти оценки, а также (2.10), имеем: при всех $\lambda \in P_1 \cup P_2$

$$\|\Psi_j\| = O\left(\lambda e^{\operatorname{Im}\lambda}\right), \quad U_j\left(R_D(\lambda)f\right) = O(1)\|f\|,$$
$$|D_U(\lambda)| \geqslant C_1|\lambda|^{N+1}e^{\operatorname{Im}\lambda},$$

где $C_1 > 0$ не зависит от $\lambda$. Отсюда и из равенства (4.6) следует (4.4).

Согласно (4.6) и оценкам (3.1), $R_U$ — частное двух целых функций порядка не выше 1, следовательно [14, Гл. I, § 9], имеет порядок не выше 1. Поскольку

$$|w(\lambda)| \leqslant \|R_U(\lambda)\|\|f\|,$$

порядок функции $w$ также не превосходит 1. Применяя с учетом (4.3) принцип Фрагмена — Линделефа, заключаем, что

$$w(\lambda) = O\left(|\lambda|^N + 1\right), \quad \lambda \in S, \tag{4.9}$$

где $S$ — сектор, ограниченный лучами $\arg\lambda = \beta_1$ и $\arg\lambda = \beta_2$. Так как функция $w$ четная, оценка (4.9) верна и на вертикальном с $S$ секторе. Далее, еще раз применяя принцип Фрагмена–Линделефа к одному из смежных с $S$ секторов, приходим к равенству

$$w(\lambda) = f_0 + f_2\overline{\lambda}^2 + \cdots + f_M\overline{\lambda}^{2M}, \quad f_j \in D(L_U^*).$$

Следовательно,

$$-f + (L_U^* - \overline{\lambda}^2)f_0 + f_2\overline{\lambda}^2 + \cdots + f_M\overline{\lambda}^{2M} = 0, \qquad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Приравнивая к 0 коэффициенты при $\overline{\lambda}^{2k}$, получим $f_M = f_{M-1} = \cdots = f_0 = 0$, так что $f = 0$.

**4.3. Доказательство теоремы 2.3.** Предположим, что система (4.2) неполна в $D(L_U)$, то есть существует ненулевая функция $f \in D(L_U)$, ортогональная (4.2). Покажем, что

$$\Delta_j(\lambda) := (w_j, f)(\lambda) \equiv 0, \quad j = 1, 2. \tag{4.10}$$

Введем функции

$$F_j(\lambda) = \frac{\Delta_j(\lambda)}{\Delta_U(\lambda)}, \quad j = 1, 2. \tag{4.11}$$

В силу (4.1) и предположения о неполноте, $F_j$ — четная целая функция.

Обозначим через $D_j$ функцию, которая получается из $\Delta_j$ заменой $c$, $s$ соответственно на $y_1$, $y_2$ (см. (3.1)). Имеем

$$F_j = \frac{D_j}{D_U}. \tag{4.12}$$

Как и в предыдущем пункте будем считать, что оценки (3.1) и (4.8) верны на обоих лучах $P_1$ и $P_2$. Потому, учитывая (2.11) и (4.7), имеем

$$|D_U(\lambda)| \geq C|\lambda|^{\frac{1}{2}} e^{\operatorname{Im}\lambda}, \qquad \lambda \in P_1 \cup P_2, \tag{4.13}$$

с не зависящей от $\lambda$ постоянной $C > 0$. Далее,

$$D_j = \begin{vmatrix} ccU_j(y_1) & U_j(y_2) \\ (y_1, f) & (y_2, f) \end{vmatrix} = \lambda^{-2} \begin{vmatrix} ccU_j(y_1) & U_j(y_2) \\ (l(y_1), f) & (l(y_2), f) \end{vmatrix}. \tag{4.14}$$

Поскольку $u_j \in L_2(0,1)$, учитывая оценки (3.1), легко показать, что

$$U_k(y_j)(\lambda) = o\left(\lambda^{\frac{3}{2}} e^{\sigma_j \operatorname{Im}\lambda}\right) \quad (k, j = 1, 2), \quad \lambda \to \infty, \tag{4.15}$$

на любом фиксированном луче $P(\beta, R)$ $(0 < \beta < \pi,\ R > 0)$. Чтобы оценить элементы $(l(y_j), f)$, заметим, что $f \in D_U$, следовательно, в этих выражениях можно один раз проинтегрировать по частям. С учетом (3.1) это дает

$$(l(y_j), f) = O\left(\lambda e^{\sigma_j \operatorname{Im}\lambda}\right) \quad (\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 0), \quad \lambda \to \infty, \tag{4.16}$$

равномерно по $0 \leqslant \arg\lambda \leqslant \pi$. Объединяя теперь формулы (4.12), (4.14) и оценки (4.13), (4.15), (4.16), получаем

$$F_j(\lambda) = o(1), \qquad \lambda \in P(\beta_1, R) \cup P(\beta_2, R), \quad R \to +\infty. \tag{4.17}$$

Из асимптотических оценок (3.1), соотношений (3.2), (4.1), (1.2) и (4.11) следует, что порядок функций $F_j$ не превосходит 1. Как в предыдущем пункте, пользуясь четностью функций $F_j$, применим последовательно принцип Фрагмена — Линделефа к сектору $S$ и смежному с ним сектору и убеждаемся, что функции $F_j$ ограничены на всей плоскости. Учитывая (4.17), имеем $F_j \equiv 0$. Отсюда следуют соотношения (4.10). Их можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} U_1(c) & U_1(s) \\ U_2(c) & U_2(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (s, f) \\ -(c, f) \end{pmatrix} = 0.$$

Определитель матрицы этой системы совпадает с функцией $\Delta_U$. Поскольку $\Delta_U$ — целая и $\Delta_U(0) = 1$, тогда $(s, f) = (c, f) \equiv 0$ вблизи 0, а значит, всюду на $\mathbb{C}$. Система функций $\{c(\cdot, \lambda),\ \lambda \in \mathbb{C}\}$, очевидно, полна в $L_2(0,1)$, поэтому $f \equiv 0$ на $[0,1]$. Теорема доказана.

**4.4. Доказательство теоремы 2.4.** Согласно (1.2) и (1.1)

$$\Delta_U(\lambda) = \lambda^3 \Psi_1(\lambda) + \Psi_2(\lambda) + 1, \tag{4.18}$$

$$\Psi_1(\lambda) = (c, u_1)(s_1, u_2) - (c, u_2)(s_1, u_1), \tag{4.19}$$

$$\Psi_2(\lambda) = \lambda^2 (c, u_1) + \lambda(s_1, u_2),$$

где $s_1 = \lambda s$. Так как

$$c = \frac{(e + e_1)}{2}, \quad s = \frac{(e - e_1)}{2i\lambda}, \quad e_1(x, \lambda) := e(x, -\lambda),$$

получим

$$s_1(x, \lambda) = \sin\lambda x + \int_0^x \mathcal{K}_\infty(x, t) \sin\lambda t dt, \tag{4.20}$$

$$c(x, \lambda) = \cos\lambda x + \int_0^x \mathcal{K}_0(x, t) \cos\lambda t dt, \tag{4.21}$$

$$\mathcal{K}_\infty(x, t) = \mathcal{K}(x, t) - \mathcal{K}(x, -t), \quad \mathcal{K}_0(x, t) = \mathcal{K}(x, t) + \mathcal{K}(x, -t).$$

Пусть $K_\infty$ и $K_0$ — интегральные операторы в правых частях равенств (4.20) и (4.21) соответственно. В силу (2.12)

$$(K_0 f, g) = (f, F_1 g), \quad (K_\infty f, g) = (f, F_2 g), \quad f, g \in L_2(0,1).$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\Psi_1(\lambda) &= \frac{1}{2i}\left((e,u_2)(e_1,u_1) - (e,u_1)(e_1,u_2)\right) \\
&= \frac{1}{2i}\left((e_0^-, (I+K_-)u_1)(e_0^+, (I+K_+)u_2) - (e_0^+, (I+K_+)u_1)(e_0^-, (I+K_-)u_2)\right), \\
\Psi_2(\lambda) &= \lambda^2 (c_0, (I+F_1)u_1) + \lambda (s_0, (I+F_2)u_2), \qquad (4.22) \\
c_0 &= \cos\lambda x, \quad s_0 = \sin\lambda x, \quad e_0^\pm = e^{\pm i\lambda x}.
\end{aligned}$$

Непосредственные вычисления показывают, что

$$(e_0^+, f)(e_0^-, g) = \int\limits_{-1}^{1} e^{i\lambda x} C[f,g](x)dx, \qquad C[f,g](x) = \int\limits_{\max\{0,x\}}^{\min\{1,1+x\}} f(t)g(t-x)dt.$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
\Psi_1(\lambda) &= \frac{1}{2i}\int\limits_{-1}^{1} e^{i\lambda x} D(x)dx, \\
D(x) &= C[(I+K_+)u_2, (I+K_-)u_1](x) - C[(I+K_+)u_1, (I+K_-)u_2](x).
\end{aligned}$$

Функция $D$ с точностью до постоянного множителя совпадает с преобразованием Фурье функции $\Psi_1$, которая, согласно (4.19), является нечетной. Потому $D$ также нечетна и на $[0,1]$ совпадает с $A_1$, так что

$$\Psi_1(\lambda) = \int\limits_0^1 \sin\lambda x A_1(x)dx. \tag{4.23}$$

Интегрирование по частям позволяет выражение (4.22) записать в виде

$$\Psi_2(\lambda) = -\lambda^3 \int\limits_0^1 \sin\lambda x \left(A_2(x) + A_3(x)\right)dx + \lambda^2 (A_2(0) + A_3(0)). \tag{4.24}$$

Подставляя (4.23) и (4.24) в (4.18), получим (2.13).

Следствия 2.3 и 2.4 непосредственно вытекают из леммы 2.2 и теорем 2.2 — 2.4.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. В. Брюнс. *О собственных и присоединенных функциях одномерного линейного дифференциального оператора n-го порядка* // Изв. высш. учебн. завед., Мат. **1972**:10(125), 7–12 (1972).
2. Е.И. Галахов, А.Л. Скубачевский. *Об одной нелокальной спектральной задаче* // Диффер. уравн. **33**:1, 25–32 (1997).
3. Н. Данфорд, Дж. Шварц. *Линейные операторы.* **2**. *Спектральная теория. Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве.* М.: Мир (1966).
4. К.А. Даровская, А.Л. Скубачевский. *Об одной спектральной задаче с интегральными условиями* // Тр. семин. им. И. Г. Петровского **28**:1, 147–160 (2011).
5. А.А. Дезин. *Общие вопросы теории граничных задач.* М.: Наука (1980).
6. В.А. Ильин. *Необходимые и достаточные условия базисности Рисса корневых векторов разрывных операторов второго порядка* // Диффер. уравн. **22**:12, 2059–2071 (1986).

7. В.А. Ильин, Е.И. Моисеев. *Априорная оценка решения задачи, сопряженной к нелокальной краевой задаче первого рода* // Диффер. уравн. **24**:5, 795–804 (1988).
8. Х.К. Ишкин, А.В. Резбаев. *К формуле Дэвиса о распределении собственных чисел несамосопряженного дифференциального оператора* // Итоги науки техн., Сер. соврем. мат. прилож., Темат. обз. **153**, 84–93 (2018).
9. Б.Е. Кангужин, Д.Б. Нурахметов, Н.Е. Токмагамбетов. *Аппроксимативные свойства систем корневых функций, порождаемые корректно разрешимыми краевыми задачами для обыкновенных дифференциальных уравнений высших порядков* // Уфим. мат. ж. **3**:3, 80–92 (2011).
10. Б.Е. Кангужин, Н.Е. Токмагамбетов. *О полноте системы корневых функций обыкновенного дифференциального оператора второго порядка с интегральными краевыми условиями* // Вестник КазНУ **81**:2, 72–87 (2014).
11. Б.Е. Кангужин, Г. Даирбаева, Ж. Мадибайулы. *Идентификация граничных условий дифференциального оператора* // Вестник КазНУ **103**:3, 13–18 (2019).
12. Г.М. Кесельман. *О безусловной сходимости разложений по собственным функциям некоторых дифференциальных операторов* // Изв. высш. учебн. завед., Мат. **1964**:2(39), 82–93 (1964).
13. Б.К. Кокебаев, М. Отелбаев, А.Н. Шыныбеков. *К вопросам расширения и сужения операторов* // Докл. акад. наук СССР **271**, 1307–1310 (1983).
14. Б.Я. Левин. *Распределения корней целых функций.* М.: ГИТТЛ (1956).
15. Ю.И. Любич. *О собственных и присоединенных функциях оператора дифференцирования* // Изв. высш. учебн. завед., Мат. **1959**:4(11), 94–103 (1959).
16. Ю.И. Любич. *Sturm–Liouville problem with a distributed condition* // Матем. физ. анал. геом. **10**:3, 290–300 (2003).
17. А.С. Макин. *О нелокальном возмущении периодической задачи на собственные значения* // Диффер. уравн. **42**:4, 560–562 (2006).
18. В.А. Марченко. *Операторы Штурма — Лиувилля и их приложения.* Киев: Наукова думка (1977).
19. В.П. Михайлов. *О базисах Рисса в $L_2(0,1)$* // Докл. акад. наук СССР **144**:5, 981–984 (1962).
20. М.А. Наймарк. *Линейные дифференциальные операторы.* М.: Наука (1969).
21. В.В. Подъяпольский. *Суммируемость по Абелю системы корневых функций одной нелокальной задачи с интегральными условиями* // Мат. заметки **65**:5, 797–800 (1999).
22. Д.М. Поляков. *О нелокальном возмущении периодической задачи для дифференциального оператора второго порядка* // Диффер. уравнен. **57**:1, 14–21 (2021).
23. Ю.Г. Сенцов. *О базисности Рисса системы собственных и присоединенных функций дифференциального оператора с интегральными условиями* // Мат. заметки **65**:5, 948–952 (1999).
24. Ю.Т. Сильченко. *Об оценке резольвенты дифференциального оператора второго порядка с нерегулярными граничными условиями* // Изв. высш. учебн. завед., Мат. **2000**:2, 65–68 (2000).
25. Ю.Т. Сильченко. *Собственные значения и функции дифференциального оператора с нелокальными граничными условиями* // Диффер. уравн. **42**:6, 764–768 (2006).
26. А.Л. Скубачевский, Г.М. Стеблов. *О спектре дифференциальных операторов с областью определения, не плотной в $L_2(0,1)$* // Докл. акад. наук СССР **321**:6, 1158–1163 (1991).
27. А.Л. Скубачевский. *Неклассические краевые задачи. I* // Соврем. мат., фундам. направл. **26**, 3–132 (2007).
28. Я.Д. Тамаркин. *О некоторых общих задачах теории обыкновенных дифференциальных уравнений и о разложении произвольных функций в ряды.* Петроград: тип. М.П. Фроловой (1917).
29. А.А. Шкаликов. *О базисности собственных функций обыкновенного дифференциального оператора* // Успехи мат. наук **34**:5(209), 235–236 (1979).
30. А.А. Шкаликов. *О базисности собственных функций обыкновенных дифференциальных операторов с интегральными краевыми условиями* // Вестн. Моск. унив., Сер. I **1982**:6, 12–21 (1982).

31. А.А. Шкаликов. *Возмущения самосопряженных и нормальных операторов с дискретным спектром* // Успехи мат. наук **71**:5, 113–174 (2016).
32. W. Feller. *The parabolic differential equations and associated semi-grops of transformations* // Ann. Math. (2) **55**:3, 468–519 (1952).
33. W. Feller. *Diffusion processes in one dimension* // Trans. Am. Math. Soc. **77**:1, 1–31 (1954).
34. Kh.K. Ishkin. *On conditions for the finiteness of the spectrum of a second order differential operator with integral boundary conditions* // J. Math. Mech. Comput. Sci. **124**:4, 26–37 (2024).
35. R.D. Karamyan, A.L. Skubachevskii. *Spectral properties of the fourth order differential operator with integral conditions* // Lobachevskii J. Math. **45**:4, 1404–1420 (2024).
36. A.M. Krall. *The development of general differential operators and general differential boundary systems* // Rocky Mt. J. Math. **5**:4, 493–542 (1975).
37. M. Picone. *I teoremi d'esistenza per gl'integrale di una equazione differenziale lineare ordinaria soddisfacenti ad una nuova classe di condizioni* // Rom. Acc. L. Rend. (5) **17**:1, 340–347 (1908).
38. M. Picone. *Equazione integrale traducente il piu generale problema lineare per le equation differentiali lineari ordinarie di qualsivoglia ordine* // Atti Accad. Naz. Lincei, Rend., VI. Ser. **15**, 942–948 (1932).
39. A. Sommerfeld. *Ein Beitrag zur hydrodynamischen Erklärung der turbulenten Flussigkeitsbewegungen* // Rom. 4. Math. Kongr. **8**, 116–124 (1909).



Хабир Кабирович Ишкин,
Уфимский университет науки и технологий,
ул. Заки Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: ishkin62@mail.ru

Балтабек Есматович Кангужин,
Казахский национальный университет им. аль-Фараби,
пр. аль-Фараби 71,
A15E3B4, г. Алматы, Казахстан
E-mail: kanbalta@mail.ru