

УДК 517.53+517.538.2+517.538.7

ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ УСЛОВИЯ УСИЛЕННОЙ НЕПОЛНОТЫ СИСТЕМЫ ЭКСПОНЕНТ

А.М. ГАЙСИН, Р.А. ГАЙСИН

Аннотация. Изучаются интерполяционные последовательности в смысле Павлова — Корева — Диксона (Ω -интерполяционные последовательности) и обобщения, а также аппроксимативные свойства систем экспонент с соответствующими показателями. Так, представляет интерес интерполяционная задача в классе целых функций экспоненциального типа, определяемом некоторой возрастающей мажорантой из класса сходимости (неквазианалитическим весом). В более узком классе, когда мажоранта обладала свойством вогнутости аналогичная задача в 1978 году была полностью решена Б. Берндсоном, но в случае, когда узлы интерполяции — натуральные числа. Он получил критерий разрешимости данной интерполяционной задачи. Соответствующий критерий для произвольной возрастающей последовательности положительных узлов недавно был получен Р.А. Гайсиным. Он же в 2021 году доказал соответствующий критерий интерполяционности (W -интерполяционности) в случае произвольного неквазианалитического веса. Как и в работах А.И. Павлова, Дж. Корева и М. Диксона нами была обнаружена тесная связь между интерполяционностью последовательностей и проблемой Макинтайра. Было также показано, что если последовательность вещественных чисел Ω -интерполяционная, то соответствующая система экспонент усиленно не полна (минимальна) относительно прямоугольников (в случае W -интерполяционности усиленная неполнота (минимальность) имеет место относительно вертикальных полос). Однако условия Ω -интерполяционности, предложенные А.М. Гайсиным в 1991 году, оставляли чувство неудовлетворенности из-за того, что они были недостаточно наглядными.

В данной статье в терминах весового индекса концентрации и получены требуемые условия усиленной неполноты (минимальности) системы экспонент относительно прямоугольников.

Ключевые слова: интерполяционная последовательность, усиленно неполные (минимальные) системы экспонент, весовой индекс концентрации, последовательность Макинтайра.

Mathematics Subject Classification: 30E05, 30E10

1. ВВЕДЕНИЕ

Статья посвящена обобщениям ряда результатов Дж. Корева и М. Диксона об интерполяционных последовательностях из обзорной работы [18].

A.M. GAISIN, R.A. GAISIN, EQUIVALENT CONDITIONS OF STRONG INCOMPLETENESS OF EXPONENTIAL SYSTEMS.

© Гайсин А.М., Гайсин Р.А. 2025.

Работа А.М. Гайсина (раздел 1) выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках выполнения государственного задания (код научной темы FMRS-2025-0010). Работа Р.А. Гайсина (разделы 2, 3) выполнена при поддержке гранта РНФ (соглашение № 25-21-00044).

Поступила 23 мая 2025 г.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$, $0 < \lambda_n \uparrow \infty$. Если $\Lambda \subset \mathbb{N}$, то вместо Λ будем использовать обозначение P , $P = \{p_n\}$, где $p_n \in \mathbb{N}$, $p_n \uparrow \infty$. В дальнейшем $S(P) = \{z^{p_n}\}$ — система степеней.

Введем в рассмотрение следующие классы последовательностей $P = \{p_n\}$:

CC (convergence class) — класс сходимости. Это — класс последовательностей P , имеющих лакуны Фейера, т.е. такие, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} < \infty. \quad (1.1)$$

M (Macintyre sequences) — это класс последовательностей P , для которых любая целая трансцендентная функция

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{p_n} \quad (1.2)$$

не ограничена на любой кривой, уходящей в бесконечность.

Макинтайр показал, что $M \subset CC$ (см. [21]). В работе [19] исследуются усиленно свободные (минимальные — по Л. Шварцу) и усиленно не полные системы степеней $S(P)$.

Система степеней $\{z^{p_n}\}$ называется *усиленно свободной* (*минимальной*), если для любых $a > 1$, $k = 1, 2, \dots$,

$$\inf_{\gamma_a} \inf_c \left\| z^{p_k} - \sum'_{n \neq k} c_n z^{p_n} \right\|_{\gamma_a} = \delta_k(a) > 0, \quad (1.3)$$

где $\sum'_{n \neq k}$ — полином, γ_a — кривая, соединяющая окружности $C(0, 1) = \{z : |z| = 1\}$ и $C(0, a) = \{z : |z| = a\}$, $\|g\|_{\gamma_a} = \max_{z \in \gamma_a} |g(z)|$; внутренний инфимум берется по всем конечным суммам $\sum'_{n \neq k}$, а внешний — по всем кривым γ_a (см. [18]).

Отметим, что в этом определении вместо $C(0, 1)$ можно рассматривать любую окружность $C(0, a')$, $0 < a' < a$.

Система степеней $\{z^{p_n}\}$ называется *усиленно не полной*, если для любого $\nu \in \mathbb{N} \setminus P$

$$\inf_{\gamma_a} \inf_c \left\| z^\nu - \sum'_n c_n z^{p_n} \right\|_{\gamma_a} = \varepsilon_\nu(a) > 0. \quad (1.4)$$

Здесь $\sum'_n$ также конечная линейная комбинация степеней.

Класс последовательностей P , для которых выполняется соотношение (1.3), обозначим PSF (мы придерживаемся тех же обозначений, что и в работе [18]). Если выполняется условие (1.4), то соответствующий класс последовательностей P обозначим PSN . Как показано в [19], $PSF \subset M$, $PSN \subset M$.

Пусть W — класс положительных, неограниченно возрастающих и непрерывных на $\mathbb{R}_+$ функций w , таких, что

$$\int_1^\infty \frac{w(x)}{x^2} dx < \infty. \quad (1.5)$$

Сходимость ряда (1.1) равносильна тому, что функция $n_P(t)t^{-2}$ принадлежит $L^1(\mathbb{R}_+)$, где $n_P(t) = \sum_{p_n \leq t} 1$. Так что $P \in CC$ тогда и только тогда, когда найдется функция $w \in W$,

такая, что $n_P(t) \leq w(t)$. Множество W также принято называть классом сходимости.

Введем еще два класса функций:

$$\Omega = \{\omega \in W : \omega \text{ — вогнутая}\}, \quad \Omega_0 = \{\omega \in W : \frac{\omega(t)}{t} \downarrow \text{ при } t \uparrow \infty\}.$$

Ясно, что $\Omega \subset \Omega_0$. С другой стороны, для любой функции $\omega \in \Omega_0$ верны оценки:

$$\omega(t) \leq m_\omega(t) \leq 2\omega(t).$$

Здесь $m_\omega(t)$ — наименьшая вогнутая мажоранта функции $\omega(t)$ (см. [17, VII Д. п. 2. С. 326]). С этой точки зрения классы Ω и Ω_0 практически можно не различать (в этом мы убедимся ниже).

Приведем еще одно важное определение (оно введено в работе [19]).

Последовательность P называется *интерполяционной* (в смысле Павлова — Коревара — Диксона или Ω_0 -интерполяционной), если найдется функция $\omega_P = \omega_P(r)$, $0 < \omega_P(r) \uparrow \infty$ при $r \rightarrow \infty$, принадлежащая классу Ω_0 , такая, что для любой последовательности $\{b_n\}$, $b_n \in \mathbb{C}$, $|b_n| \leq 1$, существует целая функция $g(z)$, обладающая свойствами:

$$\begin{aligned} 1) & \ g(p_n) = b_n, \quad n = 1, 2, \dots; \\ 2) & \ M_g(r) = \max_{|z|=r} |g(z)| \leq e^{\omega_P(r)}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Следуя работе [18], класс интерполяционных последовательностей обозначим I . В [18] показано, что $I \subset PSF$ и $I \subset PSN$. Таким образом,

$$I \subset PSF \subset M \subset CC.$$

Открытый вопрос (проблема Макинтайра). Верно ли равенство $M = CC$ (см. [21])?

Отметим, что в приведенной выше цепочке включений эта проблема занимает особое место (более подробно об этом см. в [2, гл. I, § 1], где изучается и регулярный рост рядов (1.2)).

Вопросы интерполяционности последовательности $P_0 = \{p_n\}$ ($p_0 = 0, p_n \in \mathbb{N}, n \geq 1$), а также последовательности $\{\pm p_n\}$ в какой-то степени исследовались в работах [18], [19], [20] Дж. Коревара и М. Диксона. Однако этими авторами класс I не был описан, а интерполяционность была доказана только для последовательностей А.И. Павлова и Т. Ковари (см. [19]). Дело в том, что интерполирующую функцию им удалось построить только в виде ряда типа Лагранжа (см. [19])

$$g(z) = \sum_{|k|=0}^{\infty} b_k \frac{Q(z)}{Q'(p_k)(z - p_k)} \left(\frac{z}{p_k} \right)^{2km_k}, \quad p_{-k} = -p_k,$$

где

$$Q(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{p_n^2} \right),$$

а натуральные числа m_k выбираются специальным образом. В общем случае ряд типа Лагранжа не подходит. По этой причине авторы указанных работ [18], [19], [20] ограничились только исследованием конкретных примеров. Несколько позже в работе [16] Б. Берндсоном был получен критерий интерполяционности последовательности $P = \{p_n\}$. Этот результат мы приведем в следующем пункте.

Понятие интерполяционных последовательностей легко переносится на произвольные последовательности $\Lambda = \{\lambda_n\}$, $0 < \lambda_n \uparrow \infty$ (см. [1]). Ниже будет показано, что критерий интерполяционности этой последовательности совпадает с критерием интерполяционности Б. Берндсона для $P = \{p_n\}$. Дальнейшее обобщение интерполяционности последовательности $\Lambda = \{\lambda_n\}$ получено в работе [8], а для симметричных последовательностей — в [9]. В отличие от интерполяционной задачи типа Павлова — Коревара — Диксона, в работах [8], [9] мажоранта ω_Λ для $\ln M_g(r)$ для интерполирующей функции $g(\lambda)$ в задаче типа (1.6) не обязана быть, скажем, вогнутой, она принадлежит только классу сходимости W . Другими словами, $\omega_\Lambda(r)$ является просто неквазианалитическим весом.

В работе [10] введено понятие так называемой обобщенной интерполяционности. Более подробно обо всем этом будет сказано в следующем разделе.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ ОБ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

В статье [16] Б. Берндсон доказал следующий критерий.

Теорема 2.1. *Для того, чтобы последовательность $P = \{p_n\}$ была интерполяционной в смысле Павлова — Коревара — Диксона, необходимо и достаточно, чтобы существовала функция $\omega_P \in \Omega_0$, такая, что*

$$\begin{aligned} \text{а) } n_P(p_n) &\leq \omega_P(p_n), \quad n = 1, 2, \dots, \quad n_P(t) = \sum_{p_n \leq t} 1; \\ \text{б) } -\ln \prod_{\substack{k \neq n \\ \frac{p_n}{2} \leq p_k \leq 2p_n}} \left| 1 - \frac{p_n}{p_k} \right| &\leq \omega_P(p_n), \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.1)$$

Эта теорема, как было уже сказано, полностью переносится на произвольные вещественные последовательности чисел λ_n , $0 < \lambda_n \uparrow \infty$. Этот факт (см. ниже, теорема 2.3) нам пригодится в п. 3, где речь будет идти об усиленной неполноте системы экспонент. А сейчас кратко напомним о других обобщениях теоремы Б. Берндсона.

Последовательность $\Lambda = \{\lambda_n\}$ называется *интерполяционной* (*W-интерполяционной*), если существует функция $w_\Lambda \in W$, зависящая только от Λ , такая, что для всякой последовательности $\{b_n\}$, $|b_n| \leq 1$, найдется целая функция $f(\lambda)$, обладающая свойствами:

$$\begin{aligned} 1) \quad f(\lambda_n) &= b_n, \quad n = 1, 2, \dots; \\ 2) \quad M_f(r) &\leq e^{w_\Lambda(r)}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Таким образом, если последовательность Λ интерполяционная в смысле Павлова — Коревара — Диксона, то она и *W-интерполяционная*.

Критерий *W-интерполяционности* доказан в [8], где по существу был использован модифицированный метод Б. Берндсона, основанный на одной идее Хёрмандера для решения $\bar{\partial}$ -проблемы в многомерном комплексном анализе. Отметим, что почти одновременно с Берндсоном этот метод был использован и в работе [15].

Учитывая оценку (см. [8], лемма 3)

$$\begin{aligned} &\left| -\ln \prod_{\substack{k \neq n \\ \frac{\lambda_n}{2} \leq \lambda_k \leq 2\lambda_n}} \left| 1 - \frac{\lambda_n}{\lambda_k} \right| - \int_0^{\lambda_n} \frac{\nu(\lambda_n; t)}{t} dt \right| \\ &\leq n_\Lambda(2\lambda_n) + N(2\lambda_n) + \ln M_L(\lambda_n), \quad n = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где $\nu(\lambda_n; t)$ — число точек $\lambda_k \neq \lambda_n$ из отрезка $\{h : |h - \lambda_n| \leq t\}$,

$$\begin{aligned} n_\Lambda(t) &= \sum_{\lambda_n \leq t} 1, \quad t > 0, \\ N(t) &= \int_0^t \frac{n_\Lambda(x)}{x} dx, \quad L(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_n^2} \right), \end{aligned} \quad (2.4)$$

критерий интерполяционности последовательности Λ из [8] перепишем следующим образом (для симметрической последовательности $\{\pm \lambda_n\}$ критерий такой же (см. [9])).

Теорема 2.2. Для того, чтобы последовательность Λ была W -интерполяционной, необходимо и достаточно, чтобы существовала функция $w_\Lambda \in W$, такая, что

$$A. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} < \infty; \quad B. \int_0^{\lambda_n} \frac{\nu(\lambda_n; t)}{t} dt \leq w_\Lambda(\lambda_n), \quad n = 1, 2, \dots$$

Здесь учтено, что при условии A

$$\int_1^{\infty} \frac{n_\Lambda(t)}{t^2} dt < \infty,$$

а функции $N(t)$ и $\ln M_L(t)$ ($t > 0$) принадлежат классу W (см. [13, гл. I, § 1, п. 3], [5, § 2, п. 2.4]).

Отметим, что из оценок (2.3) и условий A, B следует, что

$$\ln \frac{1}{h_n} \leq w_0(\lambda_n), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.5)$$

где $h_n = \min \left(\min_{k \neq n} |\lambda_n - \lambda_k|, 1 \right)$, w_0 — некоторая функция из W .

Таким образом, для W -интерполяционной последовательности Λ необходимо

$$h_n \geq e^{-w_0(\lambda_n)}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad w_0 \in W.$$

Кратко остановимся на еще одном расширении W -интерполяционности.

Пусть $\beta = \beta(t)$ — некоторая фиксированная функция из класса W . Последовательность $\Lambda = \{\lambda_n\}$ называется W -интерполяционной в широком смысле, если найдется функция $w_\Lambda \in W$, зависящая от функции $\beta(t)$ и последовательности Λ , такая, что для любой последовательности комплексных чисел b_n , $|b_n| \leq e^{\beta(\lambda_n)}$, $n = 1, 2, \dots$, существует целая функция $f(\lambda)$, обладающая свойствами (2.2).

Соответствующую задачу (2.2) будем называть обобщенной интерполяционной задачей. Критерий обобщенной интерполяционности точно такой же, что и в теореме 2.2 (см. [10]).

Теорема 2.1 Б. Берндсона допускает обобщение на случай произвольных узлов $\lambda_n > 0$ ¹. Сформулируем этот результат в более удобных терминах.

Теорема 2.3. Для того, чтобы последовательность $\Lambda = \{\lambda_n\}$, $0 < \lambda_n \uparrow \infty$, была интерполяционной в смысле Павлова — Корева — Диксона, необходимо и достаточно, чтобы существовала функция $\omega_\Lambda \in \Omega_0$, такая, что

$$C. \quad n_\Lambda(t) \leq \omega_\Lambda(t); \quad D. \quad \int_0^{\lambda_n} \frac{\nu(\lambda_n; t)}{t} dt \leq \omega_\Lambda(\lambda_n), \quad n = 1, 2, \dots$$

3. УСИЛЕННАЯ НЕПОЛНОТА СИСТЕМЫ ЭКСПОНЕНТ

Понятие усиленной неполноты системы степеней $S(P) = \{z^{p_n}\}_{n=1}^{\infty}$ впервые было введено Дж. Корева и М. Диксоном в работе [19], которое в [3] было перенесено на систему экспонент $e_\Lambda = \{e^{\lambda_n z}\}$, $0 < \lambda_n \uparrow \infty$, а позже в статье [9] — на систему $\{e^{\pm \lambda_n z}\}$.

Система экспонент $\{e^{\pm \lambda_n z}\}$ называется усиленно не полной (относительно прямоугольников), если для всех a, b ($0 < a < \infty$, $0 < b < \infty$) и β , $\beta \neq \pm \lambda_n$, $n = 1, 2, \dots$,

$$\inf_{\gamma(-a, a)} \inf_{c_n} \left\| e^{\beta z} - \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} c_n e^{\mu_n z} \right\|_{\gamma(-a, a)} = \varepsilon_\beta(a, b) > 0.$$

¹Доказательство этого результата будет опубликовано в другой статье.

Здесь $\|g\|_\gamma = \max_{z \in \gamma} |g(z)|$, внутренний инфимум находится по всем квазиполиномам

$$\sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} c_n e^{\mu_n z}, \quad \mu_n = \lambda_n, \quad \mu_{-n} = -\lambda_n, \quad n \in \mathbb{N};$$

внешний — по всем спрямляемым кривым $\gamma = \gamma(-a, a)$ из прямоугольника

$$P(a, b) = \{z = x + iy : |x| \leq a, |y| < b\},$$

соединяющим его вертикальные стороны.

Для системы $\{e^{\lambda_n z}\}$ аналогичное понятие рассматривалось в работе [3].

В статье [9] доказана следующая теорема.

Теорема 3.1. Пусть выполнены условия:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} < \infty; \quad 2) \int_0^{\lambda_n} \frac{\nu(\lambda_n; t)}{t} dt \leq w(\lambda_n), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3.1)$$

где $\nu(\lambda_n; t)$ — число точек $\lambda_k \neq \lambda_n$ из отрезка $\{h : |h - \lambda_n| \leq t\}$, а w — некоторая функция из класса сходимости W .

Тогда система экспонент $\{e^{\pm \lambda_n z}\}$ усиленно не полна относительно вертикальных полос $P(a, \infty)$ ¹.

Как известно, пара условий 1) и 2) из (3.1) равносильна условиям 1) и 3) или 1) и 4), где

$$3) -\ln \prod_{\substack{k \neq n \\ \frac{\lambda_n}{2} \leq \lambda_k \leq 2\lambda_n}} \left| 1 - \frac{\lambda_n}{\lambda_k} \right| \leq w(\lambda_n), \quad n = 1, 2, \dots, \quad w \in W;$$

$$4) -\ln |L'(\lambda_n)| \leq w(\lambda_n), \quad n = 1, 2, \dots, \quad w \in W.$$

Поэтому каждая из трех эквивалентных пар условий 1) и 2), 1) и 3), 1) и 4) необходима и достаточна для того, чтобы последовательность $M = \{\mu_{\pm n}\}$, $\mu_n = \lambda_n$, $\mu_{-n} = -\lambda_n$, $n \in \mathbb{N}$ была W -интерполяционной (см. [9]).

Таким образом, для любой интерполяционной последовательности $M = \{\pm \lambda_n\}$ соответствующая система экспонент $\{e^{\pm \lambda_n z}\}$ усиленно не полна по семейству спрямляемых кривых $\gamma(-a, a)$ из $P(a, \infty)$ по равномерной норме. В частности, в условиях теоремы 3.1 система экспонент $\{e^{\pm \lambda_n z}\}$ не полна на любой спрямляемой кривой γ , т.е. не полна в пространстве непрерывных функций $C(\gamma)$. А это означает, что существует ненулевая комплексная мера Бореля μ на γ , преобразование Лапласа которой

$$\hat{\mu}(s) = \int_{\gamma} e^{sz} d\mu(z)$$

обращается в ноль в точках $\pm \lambda_n$, $n = 1, 2, \dots$. Важно отметить, что условия теоремы 3.1 сформулированы в терминах основных характеристик распределения точек последовательности $\{\pm \lambda_n\}$.

В этой связи следует обратить внимание на соответствующий результат статьи [3] об усиленной неполноте относительно прямоугольников $P(a, b)$, $b \neq \infty$. В нем зависимость условий усиленной неполноты системы экспонент от каких-либо известных характеристик распределения точек λ_n , $n = 1, 2, \dots$, совсем не очевидна. Действительно, в [3] доказано следующее утверждение.

¹Усиленная неполнота системы $\{e^{\pm \lambda_n z}\}$ относительно полосы $P(a, \infty)$ формально понимается как усиленная неполнота относительно прямоугольника $P(a, b)$, для которого $b = \infty$.

Теорема 3.2. Пусть $n = o(\lambda_n)$ при $n \rightarrow \infty$, $h(\delta) = h_-(\delta)h_+(\delta)$, где

$$h_+(\delta) = \int_0^\infty |L(ir)|e^{-\delta r} dr, \quad h_-(\delta) = \int_0^\infty |L(re^{i\delta})|^{-1}e^{-\delta r} dr, \quad \delta > 0.$$

Если функция $h(\delta)$ удовлетворяет билогарифмическому условию Левинсона

$$\int_0^d \ln \ln h(\delta) d\delta < \infty, \quad h(d) = e, \quad (3.2)$$

то система экспонент $\{e^{\lambda_n z}\}$ усиленно не полна относительно прямоугольников.

Функции $h_+(\delta)$ и $h_-(\delta)$ — убывающие на $(0, \infty)$, $h_+(\delta) \uparrow \infty$, $h_-(\delta) \uparrow \infty$ при $\delta \downarrow 0$ (см. [3]). Хорошо известно также, что условие (3.2) равносильно условию Левинсона для каждой из функций $h_+(\delta)$ и $h_-(\delta)$; далее, условие

$$\int_0^{d_+} \ln \ln h_+(\delta) d\delta < \infty, \quad h_+(d_+) \geq e, \quad (3.3)$$

эквивалентно условию C теоремы 2.3 (см. [3], [4])¹.

Наша цель — расшифровать условие

$$\int_0^{d_-} \ln \ln h_-(\delta) d\delta < \infty, \quad h_-(d_-) \geq e, \quad (3.4)$$

и придать ему более понятный и естественный вид, учитывающий явную зависимость от последовательности Λ . Для этого предварительно выясним, при каких условиях на последовательность $\Lambda = \{\lambda_n\}$

$$\sup_{\theta \neq 0, \pi} \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\omega(r)} \ln \left| \frac{1}{L(re^{i\theta})} \right| < \infty,$$

где $\omega(r)$ — некоторая мажоранта функции $\ln M_L(r)$, принадлежащая классу Ω и такая, что

$$0 < \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln M_L(r)}{\omega(r)} < \infty.$$

Для случая $\omega(r) \equiv r$ этот вопрос был поставлен А.Ф. Леонтьевым в 1956 году в связи с задачей о распространении сходимости любой последовательности полиномов Дирихле

$$P_n(z) = \sum_{k=1}^{q_n} a_k^{(n)} e^{\lambda_k z}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

равномерно сходящейся внутри некоторой выпуклой области, где система экспонент $\{e^{\lambda_k z}\}$ не полна, внутри полуплоскости $\{z : \operatorname{Re} z < c\}$ (одной и той же для всех последовательностей $\{P_n(z)\}$) (см. [12]).

В работе [11] И.Ф. Красичкова был получен ответ на вопрос А.Ф. Леонтьева. И.Ф. Красичковым рассматривается случай

$$\omega(r) = V(r),$$

¹В условии C в качестве функции $\omega_\Lambda(t)$ можно брать наименьшую вогнутую мажоранту функции $n_\Lambda(t)$ (см. [4]).

где $V(r) = r^{\rho(r)}$, $\rho(r)$ — уточненный порядок, $\rho(r) \rightarrow \rho$, $\rho > 0$ (в нашей ситуации $0 < \rho \leq 1$), такой, что

$$0 < \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln M_L(r)}{V(r)} < \infty.$$

В [11] получено необходимое и достаточное условие на последовательность $\Lambda = \{\lambda_n\}$ для того, чтобы $\sup_{\theta \neq 0, \pi} H_L(\theta) < \infty$, где

$$H_L(\theta) = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{V(r)} \ln \left| \frac{1}{L(re^{i\theta})} \right|, \quad V(r) = r^{\rho(r)},$$

— индикатор функции $|L(\lambda)|^{-1}$ при уточненном порядке $\rho(r)$. Наша задача заключается в том, чтобы в этом результате функцию точного роста $V(r) = r^{\rho(r)}$ заменить на подходящую функцию $\omega(r)$, $\omega \in \Omega_0$. Это, как можно предположить, дало бы возможность сформулировать сходимость интеграла (3.4) от повторного логарифма функции $h_-(\delta)$ в терминах так называемого весового индекса концентрации (ω -концентрации) последовательности Λ . Такая постановка задачи, как видно, является актуальной, тем более ответ на нее не может быть получен как простое следствие упомянутого результата И.Ф. Красичкова из [11]. Дело в том, что функция $\omega(r)$, $\omega \in \Omega_0$, в отличие от $V(r)$, не обязана быть правильно меняющейся в бесконечности (см. [14]). А в [11] по существу использован этот факт, а именно свойства уточненного порядка при оценке интегралов (см. [11], свойства а) – в) на стр. 842).

В [6] доказана следующая теорема о конечности весового индикатора для функции $|L(\lambda)|^{-1}$, где $L(\lambda)$ — целая функция экспоненциального типа из (2.4).

Теорема 3.3 (см. [6]). Пусть наименьшая вогнутая мажоранта ω функции $\ln M_L(r)$ принадлежит классу сходимости¹ W ,

$$H_\omega(\theta) = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\omega(r)} \ln \left| \frac{1}{L(re^{i\theta})} \right| \quad (3.5)$$

— весовой индикатор функции $|L(\lambda)|^{-1}$, $\lambda = re^{i\theta}$.

Для того, чтобы

$$\sup_{\theta \neq 0, \pi} H_\omega(\theta) < \infty, \quad (3.6)$$

необходимо и достаточно, чтобы был конечен весовой индекс концентрации

$$I_\Lambda(\omega, \mathbb{R}_+) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\omega(x)} \int_{\varepsilon}^x \frac{n_\sigma(x)}{\sigma} d\sigma, \quad (3.7)$$

где $n_\sigma(x)$ — число точек λ_n в круге $\Delta_\sigma(x) = \{t : |t - x| \leq \sigma|x|\}$, $x \in \mathbb{R}$.

Случай $\omega(r) = V(r)$, $V(r) = r^{\rho(r)}$, $\rho(r)$ — уточненный порядок, $\rho(r) \rightarrow \rho > 0$, как было сказано, исследован в работе [11].

В основе этого результата лежит следующий факт, который для произвольных целых функций уточненного порядка $\rho(r)$, $\rho(r) \rightarrow \rho$, $0 < \rho < \infty$, также был по существу использован в [11].

В условиях теоремы 3.3 справедливо представление (см. [6]): для всех $\lambda \neq 0$

$$\ln |L(\lambda)| = - \int_0^1 \frac{n_\sigma(\lambda)}{\sigma} d\sigma + R(|\lambda|), \quad (3.8)$$

¹Очевидно, это предположение равносильно требованию (3.3), т.е. условию C теоремы 2.3.

где $R(|\lambda|) = O(1)\omega(|\lambda|)$, а $O(1)$ — некоторая функция, ограниченная вне любого круга $\{z : |z| \leq \rho\}$, $\rho > 0$ (функция $n_\sigma(\lambda)$ для комплексных λ определяется аналогично).

Как показано в [6],

$$|R(|\lambda|)| \leq A_0 + A_1\omega(|\lambda|), \quad |\lambda| \geq 0.$$

Поэтому, из теоремы 3.3 и представления (3.8) получаем утверждение: если $\omega(r)$ — наименьшая вогнутая мажоранта функции $\ln M_L(r)$, то условие (3.6) равносильно требованию

$$\sup_{\theta \neq 0, \pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\omega(r)} \int_0^1 \frac{n_\sigma(re^{i\theta})}{\sigma} d\sigma < \infty. \quad (3.9)$$

Как и в теореме 3.3, будем предполагать, что $\omega \in \Omega$.

Оценим функцию $h_-(\delta)$ сверху и снизу.

Обозначим

$$I(\lambda) = \int_0^1 \frac{n_\sigma(\lambda)}{\sigma} d\sigma, \quad \lambda = re^{i\delta}.$$

Тогда, пользуясь равенством (3.8), получим

$$h_-(\delta) \leq h^* \left(\frac{\delta}{2} \right) e^{A_0 + m(\frac{\delta}{2})}, \quad (3.10)$$

где

$$m(\xi) = \sup_{r>0} (A_1\omega(r) - \xi r), \quad \xi > 0,$$

$$h^*(\xi) = \int_0^\infty \exp(I(\lambda) - \xi r) dr, \quad \lambda = re^{i\delta}.$$

Из (3.10) при $\delta \leq \delta_0$ получаем неравенство

$$\ln h_-(\delta) \leq \ln h^* \left(\frac{\delta}{2} \right) + 2m \left(\frac{\delta}{2} \right).$$

Далее, пользуясь элементарным неравенством

$$\ln^+(a+b) \leq \ln^+ a + \ln^+ b + \ln 2, \quad a > 0, \quad b > 0,$$

будем иметь

$$\ln \ln h_-(\delta) \leq \ln \ln h^* \left(\frac{\delta}{2} \right) + 2 \ln 2 + \ln m \left(\frac{\delta}{2} \right), \quad 0 < \delta \leq \delta_1 < \delta_0.$$

Так как $\omega \in \Omega$, имеем (см. [19])

$$\int_0^{d_0} \ln m(\xi) d\xi < \infty, \quad m(d_0) \geq 1.$$

Поэтому из сходимости интеграла (3.4) для функции $h^*(\xi)$ следует сходимость того же интеграла и для $h_-(\xi)$.

С другой стороны, как легко проверить,

$$h_-(\delta) \geq h^*(2\delta) e^{-A_0 - m(\delta)},$$

т. е.

$$h_-(\delta) e^{A_0 + m(\delta)} \geq h^*(2\delta).$$

Те же рассуждения показывают, что если $h_-(\xi)$ удовлетворяет условию Левинсона (3.4), то и функция $h^*(\xi)$ подчинена тому же условию.

Таким образом, получаем утверждение.

Теорема 3.4. Пусть наименьшая вогнутая мажоранта функции $\ln M_L(r)$ принадлежит классу W . Тогда верны утверждения:

I. Интегралы

$$\int_0^{d_-} \ln \ln h_-(\delta) d\delta, \quad \int_0^{d^*} \ln \ln h^*(\delta) d\delta$$

равносходятся (функции $h_-(\delta)$ и $h^*(\delta)$ определены выше).

II. Эквивалентные условия (3.6) и (3.9) имеют место тогда и только тогда, когда $I_\Lambda(\omega, \mathbb{R}_+) < \infty$ ($I_\Lambda(\omega, \mathbb{R}_+)$ — весовой индекс концентрации последовательности Λ , заданный формулой (3.7)).

Замечание 3.1. Отметим, что

$$\int_0^1 \frac{n_\sigma(z)}{\sigma} d\sigma = \int_0^{|z|} \frac{\mu(z; t)}{t} dt,$$

где $\mu(z; t)$ — число точек $\lambda \in \Lambda$ из круга $\{h : |z - h| \leq |t|\}$. Действительно, сделаем замену $t = \sigma z$. Тогда

$$\int_0^{|z|} \frac{\mu(z; t)}{t} dt = \int_0^1 \frac{\mu(z; \sigma|z|)}{\sigma} d\sigma = \int_0^1 \frac{n_\sigma(z)}{\sigma} d\sigma.$$

Замечание 3.2. Условие (3.2) (достаточное условие усиленной неполноты системы $\{e^{\lambda_n z}\}$ относительно прямоугольников) равносильно тому, что

$$\begin{aligned} 1^0. \quad n_\Lambda(t) &\leq \omega_\Lambda(t), \quad \omega_\Lambda \in \Omega_0; \\ 2^0. \quad \int_0^{d^*} \ln \ln h^*(\delta) d\delta &< \infty, \quad h^*(d^*) \geq e. \end{aligned}$$

Однако пары условий 1^0 и 2^0 , 1) и 2) из теоремы 3.1 (достаточные условия усиленной неполноты системы экспонент $\{e^{\pm \lambda_n z}\}$, а подавно и системы $\{e^{\lambda_n z}\}$, относительно вертикальных полос) не зависимы. Действительно, рассмотрим систему отрезков $\{\Delta_j\}$, где

$$\Delta_j = \left[2^{j^2} - \left[\frac{2^{j^2}}{j^2} \right], 2^{j^2} \right], \quad j \geq 1$$

($[a]$ — целая часть a). Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$ — возрастающая последовательность всех натуральных чисел из $\bigcup_{j \geq 1} \Delta_j$. Для этой последовательности Λ условия 1) и 2) теоремы 3.1 выполнены, но (см. [7])

$$\int_0^{d_+} \ln \ln h_+(\delta) d\delta = \infty.$$

С другой стороны, пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$ — объединение двух последовательностей $\{p_n\}$ и $\{q_n\}$, где $\{p_n\}$, $p_n \in \mathbb{N}$, — интерполяционная в смысле Павлова — Корева — Диксона последовательность, $q_n = p_n + \exp(-p_n \ln p_n)$. Для этой последовательности условия 1^0 и 2^0 выполнены (билогарифмическое условие для функции $h(\delta) = h_+(\delta)h_-(\delta)$, очевидно, имеет место). Однако индекс конденсации

$$\delta(\Lambda) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \ln \left| \frac{1}{L'(\lambda_n)} \right| = \infty,$$

т.е. условие 2) теоремы 3.1 вообще не выполнено (см. [3]).

Докажем теперь следующую теорему (для натуральных λ_n соответствующее утверждение доказано в [3]).

Теорема 3.5. Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$, $0 < \lambda_n \uparrow \infty$, — последовательность, интерполяционная в смысле Павлова — Коревара — Диксона. Тогда функция $h(\delta) = h_+(\delta)h_-(\delta)$ удовлетворяет условию Левинсона (3.2).

Доказательство. Согласно теореме 2.3 имеем: $n_\Lambda(t) \leq \omega_\Lambda(t)$, $\omega_\Lambda \in \Omega_0$. Значит, сходится интеграл (3.3) (см. [4]). В ходе доказательства достаточной части теоремы 2.3 (критерий интерполяционности Павлова — Коревара — Диксона для произвольных вещественных узлов $\lambda_n > 0$) показывается, что для всех $z \in K_n$, $n = 1, 2, \dots$,

$$K_n = \left\{ z : \frac{h_n}{4} \leq |z - \lambda_n| \leq \frac{h_n}{2} \right\}, \quad h_n = \min \left(\min_{k \neq n} |\lambda_k - \lambda_n|, 1 \right),$$

выполняется оценка

$$\left| \frac{1}{L(z)} \right| \leq e^{\omega_1(\lambda_n)}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad \omega_1 \in \Omega_0. \quad (3.11)$$

Пусть $z = re^{i\delta}$, $0 < \delta < \frac{\pi}{4}$, принадлежит кругу $D_n = \{z : |z - \lambda_n| \leq \frac{h_n}{4}\}$. Тогда

$$\left| \frac{z - \lambda_n}{L(z)} \right| \leq \max_{t \in C_n} \left| \frac{t - \lambda_n}{L(t)} \right| \leq \frac{h_n}{4} e^{\omega_1(\lambda_n)} \leq \frac{1}{4} e^{\omega_1(\lambda_n)},$$

$C_n = \partial D_n$, $n = 1, 2, \dots$. Поскольку $|z - \lambda_n| \geq \lambda_n \sin \delta \geq \frac{2\delta}{\pi}$, для $z \in D_n$, $z = re^{i\delta}$,

$$\left| \frac{1}{L(z)} \right| \leq \frac{\pi}{8\lambda_1\delta} e^{\omega_1(\lambda_n)} \leq \frac{1}{\lambda_1\delta} e^{\omega_1(r+1)}. \quad (3.12)$$

Так как $|L(re^{i\delta})|^{-1} \uparrow$ при $\delta \downarrow$ (это проверяется непосредственно), а $\omega_1 \in \Omega_0$, с учетом (3.11), (3.12) получаем, что при всех $r \geq 1$ и $r \in [\lambda_n - \frac{h_n}{2}, \lambda_n + \frac{h_n}{2}]$,

$$\left| \frac{1}{L(re^{i\delta})} \right| \leq \frac{1}{\lambda_1\delta} e^{2\omega_1(r)}. \quad (3.13)$$

Пусть $r \in [\lambda_n + \frac{h_n}{2}, \lambda_{n+1} - \frac{h_{n+1}}{2}]$. В [2, гл. I, § 3, стр. 23] показано, что в каждом отрезке $[2^{n-1}, 2^n]$ при $n \geq n_0$ найдется точка x_n , такая, что

$$\left| \frac{1}{L(x_n)} \right| \leq e^{-20 \ln M_L(x_n)}.$$

Отсюда, если учесть условие C теоремы 2.3, будем иметь

$$\left| \frac{1}{L(x_n)} \right| \leq e^{\omega_2(x_n)}, \quad \omega_2 \in \Omega_0. \quad (3.14)$$

Далее, кружки $B_n = \{z : |z - \lambda_n| \leq \frac{h_n}{2}\}$ попарно не пересекаются. Если $\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \leq 2$, то применяя принцип максимума и с учетом оценок (3.11) и возрастания функции $|L(re^{i\delta})|^{-1}$ при $\delta \downarrow 0$, получаем, что для $r \in [\lambda_n + \frac{h_n}{2}, \lambda_{n+1} - \frac{h_{n+1}}{2}]$

$$\left| \frac{1}{L(re^{i\delta})} \right| \leq e^{\omega_1(2r)} \leq e^{2\omega_1(r)}. \quad (3.15)$$

Если же $\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} > 2$, то найдется конечный набор точек x'_n ,

$$\lambda_n + \frac{h_n}{2} = x'_0 < x'_1 < \dots < x'_N = \lambda_{n+1} - \frac{h_{n+1}}{2}, \quad \frac{x'_{i+1}}{x'_i} \leq 4, \quad i = 0, 1, \dots, N,$$

в которых верна оценка типа (3.14). Применяя предыдущие рассуждения для этих точек разбиения, опять получим оценку типа (3.15)

$$\left| \frac{1}{L(re^{i\delta})} \right| \leq e^{\omega_2(4r)} \leq e^{4\omega_2(r)}, \quad r \in [x'_i, x'_{i+1}].$$

Таким образом, если учтем (3.13), окончательно будем иметь: для всех $r \geq 1$

$$\left| \frac{1}{L(re^{i\delta})} \right| \leq \frac{\text{const}}{\delta} e^{\omega_3(r)},$$

где $\omega_3(r) = 2\omega_1(r) + 4\omega_2(r)$. Так что

$$h_-(\delta) \leq \frac{\text{const}}{\delta} \int_0^\infty e^{\omega_3(r)-\delta r} dr, \quad \omega_3 \in \Omega_0.$$

Отсюда и следует сходимость билогарифмического интеграла для этой функции.

Теорема доказана. $\square$

Замечание 3.3. Объединение конечного числа интерполяционных в рассматриваемом смысле последовательностей не нарушает сходимость интегралов (3.3) и (3.4). Если $\Lambda = \{\lambda_n\}$ есть объединение двух интерполяционных последовательностей $\{\lambda'_n\}$ и $\{\lambda''_n\}$, то система экспонент $\{e^{\lambda z}\}_{\lambda \in \Lambda}$ будет усиленно не полной относительно прямоугольников, как и системы $\{e^{\lambda'_n z}\}$ и $\{e^{\lambda''_n z}\}$. При этом последовательность Λ , как мы видели, не обязана быть интерполяционной ни в каком смысле, поскольку числа h_n могут стремиться к нулю сколь угодно быстро (для интерполяционных последовательностей

$$\ln \frac{1}{h_n} \leq e^{\omega(\lambda_n)}, \quad n \geq 1,$$

где функция ω принадлежит по крайней мере классу сходимости W).

Замечание 3.4. Условие

$$\sup_{\theta \neq 0, \pi} H_\omega(\theta) < \infty$$

равносильно условию (3.9), откуда следует, что при некотором $K < \infty$ и для любого $\theta \in (0, \frac{\pi}{2}]$ при $r \geq r(\theta)$

$$I(z) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^1 \frac{n_\sigma(z)}{\sigma} d\sigma < K\omega(r), \quad z = re^{i\theta}.$$

Так что для любого $z = re^{i\theta}$

$$I(z) \leq \max(m_0(\theta), K\omega(r)), \quad m_0(\theta) = \max_{0 \leq r \leq r(\theta)} I(z).$$

Отсюда $h^*(\theta) \leq M(\theta)h_0(\theta)$, где функция $h^*(\theta)$ та же, что и в (3.10), а

$$M(\theta) = e^{m_0(\theta)}, \quad h_0(\theta) = \int_0^\infty e^{K\omega(r)-\theta r} dr, \quad 0 < \theta \leq \theta_0 < \frac{\pi}{4}.$$

Отсюда видно, что для сходимости интеграла

$$\int_0^{d^*} \ln \ln h^*(\theta) d\theta, \quad h^*(d^*) \geq e,$$

достаточно, чтобы

$$\int_0^{d_M} \ln \ln M(\theta) d\theta < \infty, \quad M(d_M) \geq e.$$

Для интерполяционных последовательностей, как мы видели,

$$M(\theta) = \frac{\text{const}}{\theta}.$$

Если $\Lambda = \bigcup_{i=1}^n \Lambda^{(i)}$, где $\Lambda^{(i)}$ — интерполяционные последовательности, то

$$M(\theta) = \text{const} \left(\frac{1}{\theta} \right)^N.$$

С другой стороны, можем записать

$$h^*(\theta) = \left(\int_0^{r(\theta)} + \int_{r(\theta)}^{\infty} \right) [\exp(I(z) - \theta r)] dr \leq h_1(\theta) + h_0(\theta),$$

где $h_0(\theta)$ та же функция, что и выше, а

$$h_1(\theta) = \int_0^{r(\theta)} e^{I(z) - \theta r} dr, \quad z = re^{i\theta}.$$

Легко видеть, что

$$h_1(\theta) \leq h^*(\theta) \leq h_1(\theta) + h_0(\theta).$$

Это означает (в этом нетрудно убедиться), что билогарифмические интегралы от функций $h^*(\theta)$ и $h_1(\theta)$ равносходятся.

Вопрос. Как в терминах распределения последовательности охарактеризовать сходимость интеграла

$$\int_0^{d_1} \ln \ln h_1(\theta) d\theta, \quad h_1(d_1) \geq e?$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А.М. Гайсин. Асимптотическое поведение суммы целого ряда Дирихле на кривых. В: Исследования по теории приближений, Труды Института математики с ВЦ БНЦ УрО АН СССР, Уфа, 3–15 (1990).
2. А.М. Гайсин. Регулярный рост целых функций, представленных рядами Дирихле. М., Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований. 2024.
3. А.М. Гайсин. Усиленная неполнота системы экспонент и проблема Макинтайра // Мат. сб. **182**:7, 931–945 (1991).
4. А.М. Гайсин. Условие Левинсона в теории целых функций. Эквивалентные утверждения // Мат. заметки **83**:3, 350–360 (2008).
5. А.М. Гайсин. Целые функции: основы классической теории с приложениями к исследованиям по комплексному анализу. Уфа: РИЦ БашГУ. 2016.
6. А.М. Гайсин, Р.А. Гайсин. Весовой индекс концентрации // Владикавказ. мат. ж. **27**:1, 21–35 (2025).
7. А.М. Гайсин, Ж.Г. Рахматуллина. Вещественные последовательности, лакунарные в смысле Фейера // Уфим. мат. ж. **2**:2, 27–40 (2010).

8. Р.А. Гайсин. *Интерполяционная задача Павлова — Кореваара — Диксона с мажорантой из класса сходимости* // Уфим. мат. ж. **9**:4, 22–35 (2017).
9. Р.А. Гайсин. *Интерполяционные последовательности и неполные системы экспонент на кривых* // Мат. сб. **212**:5, 58–79 (2021).
10. Р.А. Гайсин. *Обобщенная интерполяционная задача типа Кореваара-Диксона* // Итоги науки и тех., Сер. Современ. мат. прилож., Темат. обз. **162**, 25–33 (2019).
11. И.Ф. Красичков. *Оценки снизу для целых функций конечного порядка* // Сиб. мат. ж. **6**:4, 840–861 (1965).
12. А.Ф. Леонтьев. *О сходимости последовательности полиномов Дирихле* // Доклады акад. наук СССР **108**:1, 23–26 (1956).
13. А.Ф. Леонтьев. *Ряды экспонент*. М.: Наука. 1976.
14. В.Б. Шерстюков. *Распределение нулей канонических произведений и весовой индекс конденсации* // Мат. сб. **206**:9, 139–180 (2015).
15. С.А. Berenstein, В.А. Taylor. *A new look at interpolation theory for the entire functions of one variable* // Adv. Math. **33**:2, 109–143 (1979).
16. В. Berndtsson. *A note on Pavlov — Korevaar — Dixon interpolation* // Indag. Math. **40**, 409–414 (1978).
17. Р. Koosis. *The logarithmic integral. I*. Cambridge Univ. Press, Cambridge (1988).
18. J. Korevaar. *Müntz approximation on arcs and Macintyre exponents* // in: “Complex Analysis”, Lect. Notes Math. **747**, 205–218 (1979).
19. J. Korevaar, M. Dixon. *Interpolation, strongly nonspanning powers and Macintyre exponents* // Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A **81**, 243–258 (1978).
20. J. Korevaar, M. Dixon. *Nonspanning sets of exponentials on curves* // Acta Math. Acad. Sci. Hung. **33**, 89–100 (1979).
21. A.J. Macintyre. *Asymptotic paths of integral functions with gap power series* // Proc. Lond. Math. Soc., III. Ser. **2**, 286–296 (1952).

Ахтяр Магазович Гайсин,
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия

Уфимский университет науки и технологий,
ул. Заки Валиди, 32,
450000, г. Уфа, Россия
E-mail: gaisinam@mail.ru

Рашит Ахтярович Гайсин,
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: rashit.gajsin@mail.ru