УДК 517.938

БИФУРКАЦИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С ОДНОРОДНЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

М.Г. ЮМАГУЛОВ, М.Н. КУНГИРОВ

Аннотация. Статья посвящена исследованию задач о бифуркации циклов и о бифуркации на бесконечности для динамических систем с малым параметром, нелинейности которых содержат однородные полиномы четной или нечетной степени, а невозмущенное уравнение имеет континуум периодических решений. Предлагаются новые необходимые и достаточные условия указанных бифуркаций, получены формулы для приближенного построения бифуркационных решений, проведен анализ их устойчивости. Показано, что бифуркация циклов типична только для систем с однородностями нечетной степени, а бифуркация на бесконечности — только для систем с однородностями четной степени. Показана взаимосвязь этих бифуркаций с классической бифуркацией Андронова — Хопфа.

Ключевые слова: бифуркация, Андронов — Хопф, циклы, бифуркация на бесконечности, однородность.

Mathematics Subject Classification: 34C23, 37G10, 37G15

1. Введение и постановка задачи

Рассматривается зависящая от малого параметра α динамическая система

$$\frac{dx}{dt} = U(x) + \alpha f(x), \quad x \in \mathbb{R}^N \quad (N \geqslant 2), \tag{1.1}$$

в которой $U(x)$ и $f(x)$ — непрерывно дифференцируемые вектор–функции, определенные при всех x. Предполагается, что $U(0) = 0$, т.е. невозмущенная система

$$\frac{dx}{dt} = U(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{1.2}$$

имеет нулевую точку равновесия $x = 0$.

В системе (1.1) возможны различные бифуркации, связанные с возникновением в ней периодических решений при малых ненулевых значениях параметра α. В настоящей работе рассматриваются три сценария бифуркаций.

Первым является классическая бифуркация Андронова — Хопфа, связанная с возникновением у системы (1.1) периодических орбит малой амплитуды, ответвляющихся от точки равновесия $x = 0$ невозмущенной системы (1.2). Значение $\alpha = 0$ называют *точкой бифуркации Андронова — Хопфа* для системы (1.1), если существует число $\varepsilon_0 > 0$ и определенные при $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ непрерывно дифференцируемые функции $\alpha = \alpha(\varepsilon)$, $T = T(\varepsilon)$ и $x = x(t, \varepsilon)$ такие, что

M.G. Yumagulov, M.N. Kungirov, Bifurcations of periodic oscillations in dynamical systems with homogeneous nonlinearities.

Исследование М.Н. Кунгирова выполнено в рамках государственного задания, соглашение № 075-03-2024-123/1, от 15.02.2024, тема №324-21.

Поступила 30 апреля 2025 г.

U1) $\alpha(0) = 0$, $T(0) = T_0$, $\alpha(\varepsilon) \neq 0$ при $\varepsilon \neq 0$;
U2) система (1.1) при ненулевых $\alpha = \alpha(\varepsilon)$ имеет нестационарное $T(\varepsilon)$–периодическое решение $x = x(t,\varepsilon)$;
U3) имеет место соотношение

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant T_0} \|x(t,\varepsilon)\| \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0.$$

Здесь T_0 — некоторое положительное число, определяемое спектром матрицы Якоби $U'(0)$. Через $\|x\|$ будем обозначать евклидову норму вектора $x \in \mathbb{R}^N$.

Второй сценарий бифуркации связан с возникновением у системы (1.1) периодических орбит, ответвляющихся от некоторого цикла Υ_0 невозмущенной системы (1.2). Этот сценарий бифуркации связан с предположением, что невозмущенная система (1.2) имеет семейство периодических решений $x = \varphi(t, C)$. Пусть $x = \varphi_0(t)$ — это некоторое нестационарное периодическое решение из указанного семейства. Обозначим через T_0 период этого решения, а через Υ_0 соответствующую траекторию в фазовом пространстве $\mathbb{R}^N$ системы (1.2).

Значение $\alpha = 0$ будем называть *точкой бифуркации циклов* системы (1.1), ответвляющихся от траектории Υ_0 системы (1.2), если существует число $\varepsilon_0 > 0$ и определенные при $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ непрерывно дифференцируемые функции $\alpha = \alpha(\varepsilon)$, $T = T(\varepsilon)$ и $x = x(t,\varepsilon)$ такие, что выполнены условия U1 и U2, а вместо U3 выполнено условие:

UC) имеет место соотношение:

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant T_0} \|x(t,\varepsilon) - \varphi_0(t)\| \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0.$$

Наконец, третий сценарий бифуркации связан с возникновением у системы (1.1) периодических орбит больших амплитуд. Значение $\alpha = 0$ будем называть *точкой бифуркации Андронова — Хопфа на бесконечности*, если существует число $\varepsilon_0 > 0$ и определенные при $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ непрерывно дифференцируемые функции $\alpha = \alpha(\varepsilon)$, $T = T(\varepsilon)$ и $x = x(t,\varepsilon)$ такие, что выполнены условия U1 и U2, а вместо U3 выполнено условие:

UB) имеют место соотношения:

$$\rho(\varepsilon) = \max_t \|x(t,\varepsilon)\| \to \infty, \quad \frac{\alpha(\varepsilon)}{\rho(\varepsilon)} \max_t \|f(x(t,\varepsilon))\| \to 0, \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0. \tag{1.3}$$

Здесь T_0 — некоторое положительное число, определяемое спектром матрицы Якоби $U'(0)$.

Отметим, что при изучении задачи о бифуркации Андронова — Хопфа на бесконечности многие авторы ограничиваются только первым из соотношений, указанных в (1.3). Требование выполнения второго соотношения в нашей постановке связано с желанием согласовать понятие бифуркации Андронова — Хопфа на бесконечности с классическим понятием бифуркации решений больших норм (см., например, [6]), согласно которому решения больших норм должны (в соответствующей постановке) порождаться решениями невозмущенного уравнения. Применительно к системе (1.1) это означает, что периодические орбиты больших амплитуд должны «ответвляться» от циклов больших амплитуд невозмущенной системы (1.2).

Вопросам изучения указанных бифуркаций посвящена обширная литература. Особое место здесь занимает задача о классической бифуркации Андронова — Хопфа, глубокие исследования которой и разработанные эффективные методы позволяют говорить о возникновении теории бифуркации Андронова — Хопфа (см., например, [4], [16], [17] и имеющуюся там библиографию).

Задача о бифуркации циклов изучалась многими авторами. Фундаментальным результатом здесь является теорема Понтрягина (см. [1], [13]), в которой предложен метод исследования задачи о бифуркации циклов в системах, близких к гамильтоновым. Эффективный аппарат исследования такой задачи предлагают методы теории усреднения, основанные на классических работах Н.Н. Боголюбова и Н.М. Крылова (см., например, [14]). Исследования продолжаются в различных направлениях (см., например, [10]–[12], [24]).

Задача о бифуркации Андронова — Хопфа на бесконечности также изучалась многими авторами. Здесь изучались различные вопросы как теоретического характера, так и связанные с приложениями в теории гамильтановых систем, теории управления, механике и др. (см. [7]–[9], [20]–[22]).

Представляет интерес провести детальное комплексное исследование всех трех указанных сценариев бифуркаций в системах типа (1.1). Здесь актуальными являются вопросы о взаимосвязи указанных бифуркаций, определению необходимых и достаточных условий бифуркаций, о приближенном построении решений, анализе их устойчивости. Особо важными представляются исследования систем (1.1), в которых нелинейности содержат однородные полиномы четной или нечетной степени. В современной нелинейной динамике исследованию таких систем уделяется повышенное внимание, в частности, в силу того, что указанные системы демонстрируют богатое бифуркационное и хаотическое поведение (см., например, [15], [25]). В то же время многие вопросы исследования задач о бифуркации циклов и бифуркации Андронова — Хопфа на бесконечности в системах с однородными нелинейностями остаются малоизученными.

В настоящей статье основное внимание уделяется изучению системы (1.1), в которой функция $f(x)$ представима в виде $f(x) = B_1x + b_q(x)$; здесь B_1 — квадратная (порядка N) вещественная матрица, а нелинейность $b_q(x)$ является однородным полиномом степени q ($q \geqslant 2$). В работе предлагаются новые необходимые и достаточные условия бифуркации циклов и бифуркации на бесконечности в таких системах, позволившие, в частности, установить, что бифуркация циклов типична только для систем с однородностями нечетной степени, а бифуркация на бесконечности – только для систем с однородностями четной степени. Предлагаемые признаки бифуркаций базируются на новых подходах, сочетающих методы теории усреднения и операторные методы исследования задач о многопараметрических бифуркациях (см. [3], [5]).

В настоящей работе предлагаются также новые асимптотические формулы для приближенного построения бифуркационных решений и исследования их устойчивости в задачах о бифуркации циклов и бифуркации на бесконечности в системе (1.1) при произвольных порядках q однородной нелинейности $b_q(x)$. Эти формулы являются развитием результатов работ [18], [19], [23], в которых изучались аналогичные задачи для систем с квадратичными и кубическими нелинейностями.

2. Основной объект исследования

Основным объектом исследования в настоящей работе будет система (1.1), в которой $U(x)$ является линейной функцией. А именно, рассматривается система

$$\frac{dx}{dt} = B_0x + \alpha f(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{2.1}$$

в которой B_0 — квадратная (порядка N) вещественная матрица, $f(x)$ — непрерывно дифференцируемая вектор–функция. Будем считать, что выполнены предположения:

V1) матрица B_0 имеет пару простых чисто мнимых собственных значений $\lambda = \pm\omega_0 i$ ($\omega_0 > 0$);

V2) остальные собственные значения матрицы B_0 имеют ненулевые вещественные части.

В силу предположения V1 найдутся ненулевые векторы $e, g, e^*, g^* \in \mathbb{R}^N$ такие, что выполняются равенства

$$B_0(e+ig) = i\omega_0(e+ig), \quad B_0^*(e^*+ig^*) = -i\omega_0(e^*+ig^*) \tag{2.2}$$

здесь B_0^* — транспонированная матрица.

Ниже для простоты (там где это не вызовет путаницы) будут использоваться одни и те же обозначения для квадратной (порядка N) матрицы и порожденной ею линейного оператора в стандартном базисе пространства $\mathbb{R}^N$.

Обозначим через E_0 собственное подпространство оператора B_0, отвечающее простым собственным значениям $\pm i\omega_0$. Пространство E_0 является двумерным; в качестве его базиса могут использоваться векторы e и g. Пространство $\mathbb{R}^N$ может быть представлено в виде прямой суммы $\mathbb{R}^N = E_0 \oplus E^0$, где E^0 — дополнительное инвариантное для B_0 подпространство размерности $N-2$.

В силу указанных предположений фазовый портрет линейной двумерной системы

$$\frac{dx}{dt} = B_0 x, \quad x \in E_0, \tag{2.3}$$

имеет тип «центр», все ее решения являются T_0–периодическими $\left(\text{здесь } T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}\right)$. Эти решения можно представить в виде $x = x_0(t, C) = C\varphi_0(t)$; здесь C — произвольная постоянная, а функция $\varphi_0(t)$ определена равенством

$$\varphi_0(t) = e\cos\omega_0 t - g\sin\omega_0 t. \tag{2.4}$$

Для простоты изложения большая часть построений и основные результаты будут обсуждаться для случая, когда система (2.1) является двумерной, т.е. для системы

$$\frac{dx}{dt} = B_0 x + \alpha f(x), \quad x \in \mathbb{R}^2. \tag{2.5}$$

Соответственно, невозмущенная система имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = B_0 x, \quad x \in \mathbb{R}^2. \tag{2.6}$$

Общий многомерный случай, когда $N \geqslant 3$, в краткой форме обсуждается в заключительной части статьи.

3. Исследование задачи о бифуркации циклов

Обсудим сначала задачу о бифуркации циклов в системе (2.5). В этой системе произведем невырожденную T_0–периодическую замену

$$y = e^{-B_0 t} x. \tag{3.1}$$

В результате система (2.5) преобразуется к виду

$$\frac{dy}{dt} = \alpha e^{-B_0 t} f(e^{B_0 t} y), \quad y \in \mathbb{R}^2, \tag{3.2}$$

с T_0–периодической правой частью.

Наряду с (3.2) будем рассматривать также усредненную систему

$$\frac{du}{dt} = \alpha F(u), \quad u \in \mathbb{R}^2, \tag{3.3}$$

где

$$F(u) = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} e^{-B_0 t} f(e^{B_0 t} u)\, dt. \tag{3.4}$$

3.1. Необходимое условие бифуркации циклов. Следующее утверждение содержит необходимое условие бифуркации циклов системы (2.5).

Теорема 3.1. *Пусть значение* $\alpha = 0$ *является точкой бифуркации циклов системы (2.5), ответвляющихся от некоторой траектории* Υ_0 *линейной системы (2.6). Тогда любой вектор* $u_0 \in \Upsilon_0$ *является точкой равновесия усредненной системы (3.3), т.е.* $F(u_0) = 0$.

Доказательство. Пусть значение $\alpha = 0$ является точкой бифуркации циклов системы (2.5), т.е. существуют непрерывные функции $\alpha(\varepsilon)$ и $T(\varepsilon)$ такие, что выполнены условия U1 и U2, а также условие UC, которое можно представить в виде

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T_0} \|x(t,\varepsilon) - C_0\varphi_0(t)\| \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0; \tag{3.5}$$

здесь $\varphi_0(t)$ — функция (2.4), C_0 — некоторое положительное число.

Тогда уравнение (3.2) имеет решение

$$y = y(t,\varepsilon) = e^{-B_0 t} x(t,\varepsilon), \tag{3.6}$$

т.е.

$$\frac{dy(t,\varepsilon)}{dt} \equiv \alpha(\varepsilon) e^{-B_0 t} f(e^{B_0 t} y(t,\varepsilon)), \quad y \in \mathbb{R}^2. \tag{3.7}$$

Функция (3.6) является почти периодической по t. Поэтому существует последовательность $T_k \to \infty$ такая, что $\|y(0,\varepsilon) - y(T_k,\varepsilon)\| \to 0$ при $k \to \infty$. Проинтегрировав тождество (3.7) на промежутке $[0, T_k]$, получим (с учетом условия U1), что при $k \to \infty$ имеет место соотношение

$$\int_0^{T_k} e^{-B_0 t} f(e^{B_0 t} y(t,\varepsilon)) dt \to 0,$$

или (с учетом (3.6)) — соотношение

$$\int_0^{T_k} e^{-B_0 t} f(x(t,\varepsilon)) dt \to 0. \tag{3.8}$$

Так как в этом соотношении подынтегральная функция является почти периодической по t, существует предел

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^{T} e^{-B_0 t} f(x(t,\varepsilon))\, dt.$$

Отсюда и из (3.8) получим

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^{T} e^{-B_0 t} f(x(t,\varepsilon))\, dt = 0. \tag{3.9}$$

В силу (3.5) функция $x(t,\varepsilon)$ представима в виде

$$x(t,\varepsilon) = C_0\varphi_0(t) + \delta(t,\varepsilon),$$

где функция $\delta(t,\varepsilon)$ является почти периодической по t, гладкой по ε и удовлетворяет соотношению:

$$\max_{t} \|\delta(t,\varepsilon)\| \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0.$$

Тогда равенство (3.9) примет вид

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T e^{-B_0 t} f(C_0\varphi_0(t)+\delta(t,\varepsilon))\,dt=0.$$

Это равенство справедливо при всех малых ε. Поэтому

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T e^{-B_0 t} f(C_0\varphi_0(t))\,dt=0.$$

В полученном равенстве подынтегральная функция является уже T_0–периодической. Поэтому

$$\int\limits_0^{T_0} e^{-B_0 t} f(C_0\varphi_0(t))\,dt=0.$$

Заметим, что для функции (2.4) имеем $\varphi_0(t)=e^{B_0 t}e$. Следовательно, полагая $u_0=C_0 e$, получим

$$\int\limits_0^{T_0} e^{-B_0 t} f(e^{B_0 t}u_0)\,dt=0.$$

В силу произвольности выбора вектора e получим справедливость утверждения теоремы 3.1. □

3.2. Исследование систем с однородными нелинейностями. Возникает естественный вопрос о том, для каких систем вида (2.5) выполняется необходимое условие бифуркации циклов, т.е. в каком случае усредненная система (3.3) имеет ненулевые точки равновесия. С целью изучения этого вопроса отметим следующее.

Так как матрица B_0 невырождена, то найдутся такие $\delta_1,\delta_2>0$, что система (2.5) при $|\alpha|<\delta_2$ имеет в шаре $\|x\|<\delta_1$ единственную точку равновесия $x=x^*(\alpha)$ такую, что $x^*(0)=0$, и функция $x^*(\alpha)$ является гладкой. Можно считать, что $x^*(\alpha)\equiv 0$, т.е. функция $f(x)$ удовлетворяет равенству $f(0)=0$. Тогда функция $f(x)$ представима в виде

$$f(x)=B_1x+b(x),$$

в котором B_1 — квадратная (порядка 2) вещественная матрица, а нелинейность $b(x)$ удовлетворет соотношению:

$$\|b(x)\|=O(\|x\|^2)\quad\text{при}\quad x\to 0.$$

Далее будут изучаться системы с однородными нелинейностями, а именно, будем считать, что функция $f(x)$ представима в виде

$$f(x)=B_1x+b_q(x),$$

в котором нелинейность $b_q(x)$ является однородным полиномом степени q ($q\geqslant 2$) и, следовательно, удовлетворяет условию

$$b_q(\lambda x)\equiv\lambda^q b_q(x).$$

Таким образом, система (2.5) примет вид

$$\frac{dx}{dt}=B_0x+\alpha[B_1x+b_q(x)],\quad x\in\mathbb{R}^2. \tag{3.10}$$

Будем также считать, что определенные равенствами (2.2) векторы e, g, e^*, g^* нормированы в соответствии с равенствами:

$$(e,e^*)=(g,g^*)=1,\qquad (e,g^*)=(g,e^*)=0. \tag{3.11}$$

По матрице B_1 и векторам e, g, e^*, g^* из (2.2) определим числа

$$\gamma_1 = (B_1 e, e^*) + (B_1 g, g^*), \qquad \gamma_2 = (B_1 e, g^*) - (B_1 g, e^*). \tag{3.12}$$

Теорема 3.2. *Пусть $\gamma_1 \neq 0$. Пусть значение $\alpha = 0$ является точкой бифуркации циклов системы (3.10). Тогда q — нечетно, т.е. в системе (3.10) нелинейность $b_q(x)$ является однородным полиномом нечетной степени.*

Доказательство. Достаточно показать, что если q четно, т.е. если в системе (3.10) нелинейность $b_q(x)$ является однородным полиномом четной степени, то указанное в теореме 3.1 необходимое условие бифуркации циклов не будет выполняться.

Пусть q — чётно. По теореме 3.1 для бифуркации циклов необходимо, чтобы уравнение $F(u) = 0$ имело ненулевое решение; здесь $F(u)$ — функция (3.4), которая в нашем случае имеет вид

$$F(u) = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} e^{-B_0 t}[B_1 e^{B_0 t} u + b_q(e^{B_0 t} u)]\, dt. \tag{3.13}$$

Далее нам понадобятся два вспомогательных утверждения.

Лемма 3.1. *Пусть q — четно. Тогда для любого вектора $u \in \mathbb{R}^2$ выполнено равенство*

$$\int_0^{T_0} e^{-B_0 t} b_q(e^{B_0 t} u)\, dt = 0. \tag{3.14}$$

Действительно, так как матрица B_0 имеет пару простых чисто мнимых собственных значений $\lambda = \pm\omega_0 i$ ($\omega_0 > 0$), то можно считать, что матрица $e^{B_0 t}$ имеет вид:

$$e^{B_0 t} = \begin{bmatrix} \cos\omega_0 t & -\sin\omega_0 t \\ \sin\omega_0 t & \cos\omega_0 t \end{bmatrix}.$$

Тогда функция $b_q(e^{B_0 t} u)$ содержит только чётные степени функций $\cos\omega_0 t$ и $\sin\omega_0 t$, а произведение $e^{-B_0 t} \cdot b_q(e^{B_0 t} u)$ формирует нечётные степени этих тригонометрических функций. Этот факт и обеспечивает выполнение равенства (3.14).

Определим теперь матрицу

$$D = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} e^{-B_0 t} B_1 e^{B_0 t}\, dt. \tag{3.15}$$

Несложно установить, что верна

Лемма 3.2. *Пусть $\gamma_1 \neq 0$ (здесь γ_1 — число из (3.12)). Тогда* $\det D \neq 0$*, т.е. матрица (3.15) обратима.*

Из леммы 3.1 следует, что функция (3.13) является линейной вида

$$F(u) = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} e^{-B_0 t} B_1 e^{B_0 t} u\, dt.$$

Тогда в силу леммы 3.2 уравнение $F(u) = 0$ имеет только нулевое решение. Теорема 3.2 доказана. □

3.3. Достаточный признак бифуркации циклов. Далее задачу о бифуркации циклов будем обсуждать только для случая, когда в системе (3.10) нелинейность $b_q(x)$ является однородным полиномом нечетной степени.

Приводимый ниже достаточный признак бифуркации циклов основан на операторных методах исследования задач о многопараметрических бифуркациях (см. [3], [18]). Следуя этим работам определим векторы

$$e(t) = e\cos 2\pi t - g\sin 2\pi t, \qquad \xi_3 = T_0\int\limits_0^1 e^{-tT_0B_0}b_q(e(t))\,dt, \tag{3.16}$$

и числа

$$\alpha_2 = -\frac{\omega_0}{\pi\gamma_1}(\xi_3, e^*), \qquad T_2 = \frac{1}{\omega_0}\Big[(\xi_3, g^*) - \frac{\gamma_2}{\gamma_1}(\xi_3, e^*)\Big]. \tag{3.17}$$

Теорема 3.3. *Пусть*

$$\gamma_1 \neq 0, \qquad \alpha_2 \neq 0. \tag{3.18}$$

Тогда $\alpha = 0$ является точкой бифуркации циклов системы (3.10), ответвляющихся от содержащей вектор u^* траектории Υ_0 линейной системы (2.6). Здесь $u^* = (\alpha_2)^{\frac{1}{(1-q)}}e$ (если $\alpha_2 > 0$) или $u^* = (-\alpha_2)^{\frac{1}{(1-q)}}e$ (если $\alpha_2 < 0$).

Теорема 3.3 является развитием аналогичного результата, полученного в [18].

Доказательство. Для определенности будем считать, что $\alpha_2 > 0$ (случай $\alpha_2 < 0$ рассматривается аналогично). Очевидна

Лемма 3.3. *Пусть q нечетно. Пусть $\alpha > 0$. Тогда замена $y = \alpha^{\frac{1}{(1-q)}}x$ сводит систему (3.10) к виду*

$$y' = (B_0 + \alpha B_1)y + b_q(y), \qquad y \in \mathbb{R}^2. \tag{3.19}$$

Обратная замена сводит систему (3.19) к системе (3.10).

Условие $\gamma_1 \neq 0$ в (3.18) означает (см. [18]), что значение $\alpha = 0$ является точкой бифуркацией Андронова — Хопфа системы (3.19). А именно, система (3.19) при $\alpha = \alpha(\varepsilon)$ имеет нестационарное $T(\varepsilon)$–периодическое решение $y(t,\varepsilon)$ малой амплитуды, при этом функции $\alpha(\varepsilon)$, $T(\varepsilon)$ и $y(t,\varepsilon)$ представимы в виде

$$\alpha(\varepsilon) = \alpha_2\varepsilon^{q-1} + O(\varepsilon^{q+1}), \quad T(\varepsilon) = T_0 + T_2\varepsilon^{q-1} + O(\varepsilon^{q+1}), \quad y(0,\varepsilon) = \varepsilon e + O(\varepsilon^3). \tag{3.20}$$

В силу этих равенств бифуркационные решения $y(t,\varepsilon)$ системы (3.19) возникают при $\alpha > 0$. Отсюда и из леммы 3.3 следует, что система (3.10) при $\alpha = \alpha(\varepsilon)$ имеет нестационарное $T(\varepsilon)$–периодическое решение

$$x(t,\varepsilon) = (\alpha(\varepsilon))^{\frac{1}{(1-q)}}y(t,\varepsilon).$$

Поэтому из равенств (3.20) получим соотношение:

$$x(0,\varepsilon) = (\alpha_2)^{\frac{1}{(1-q)}}e + O(\varepsilon^2).$$

Это означает, что значение $\alpha = 0$ является точкой бифуркации циклов системы (3.10), ответвляющихся от содержащей вектор $u^* = (\alpha_2)^{\frac{1}{(1-q)}}e$ траектории Υ_0 линейной системы (2.6). Отметим, что вектор u^* является точкой равновесия усреднённой системы (3.3). Теорема доказана. □

Из теоремы 3.3 и результатов работы [18] получим справедливость следующего утверждения.

Теорема 3.4. *В условиях теоремы 3.3 бифуркационные решения $x(t,\varepsilon)$ системы (3.10) возникают при $\alpha > 0$ (если $\alpha_2 > 0$) или при $\alpha < 0$ (если $\alpha_2 < 0$). Эти решения орбитально асимптотически устойчивы (неустойчивы), если $(\xi_3, e^*) < 0$ (если $(\xi_3, e^*) > 0$).*

3.4. Пример 1: уравнение Ван-дер-Поля. Рассмотрим уравнение Ван-дер-Поля вида (см., например, [14]):

$$y'' + \alpha(y^2 - 1)y' + y = 0. \tag{3.21}$$

Замена $x_1 = y, x_2 = y'$ приводит это уравнение к системе вида (3.10) при $q = 3$,

$$B_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad b_3(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ -x_1^2 x_2 \end{bmatrix}.$$

Матрица B_0 имеет собственные значения $\pm i$. В качестве векторов e, e^*, g, g^* из (2.2) здесь можно взять векторы

$$e = e^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad g = g^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Проведем сначала анализ усредненной системы (3.3). Несложные вычисления показывают, что уравнение $F(u) = 0$ здесь приводит к системе

$$\begin{cases} 4u_1 - u_1 u_2^2 - u_1^3 = 0, \\ 4u_2 - u_1^2 u_2 - u_2^3 = 0, \end{cases}$$

ненулевые решения которой описывают окружность радиуса 2: $u_1^2 + u_2^2 = 4$. Отсюда и из теоремы 3.1 получим, что циклы уравнения (3.21) могут ответвляться только от указанной окружности.

Покажем теперь, что значение $\alpha = 0$ действительно является точкой бифуркации циклов уравнения (3.21). Для этого воспользуемся теоремами 3.3 и 3.4. Здесь подсчет показывает, что

$$\gamma_1 = 1, \qquad \alpha_2 = \frac{1}{4}, \qquad (\xi_3, e^*) = -\frac{\pi}{4}.$$

Отсюда и из теорем 3.3 и 3.4 следует, что $\alpha = 0$ является точкой бифуркации циклов уравнения (3.21). Эти циклы возникают при $\alpha > 0$ и являются устойчивыми.

4. Исследование задачи о бифуркации Андронова — Хопфа на бесконечности

Перейдем теперь к обсуждению задачи о бифуркации Андронова — Хопфа на бесконечности в системе (3.10).

4.1. О свойствах бифуркации на бесконечности. Из приведенного выше определения бифуркации на бесконечности, т.е. из условий U1, U2 и UB вытекает справедливость следующего утверждения.

Теорема 4.1. *Пусть значение $\alpha = 0$ является точкой бифуркации Андронова — Хопфа на бесконечности системы (3.10). Тогда:*

- *матрица B_0 имеет пару собственных значений $\pm\omega_0 i$ ($\omega_0 > 0$), а указанный в определении бифуркации на бесконечности период T_0 равен числу $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$;*
- *для бифуркационных решений $x(t,\varepsilon)$ системы (3.10) верно соотношение:*

$$x(0,\varepsilon) = \rho(\varepsilon)h_0 + o(\rho(\varepsilon)) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0, \tag{4.1}$$

в котором $\rho(\varepsilon) = \max\limits_t \|x(t,\varepsilon)\|$, а $h_0 \in E_0$ — ненулевой вектор такой, что $\|h_0\| \leqslant 1$.

Эта теорема подтверждает тот факт, что при бифуркации Андронова — Хопфа на бесконечности периодические орбиты больших амплитуд системы (3.10) «ответвляются» от циклов больших амплитуд невозмущенной системы (2.6). Отметим, что если ослабить определение бифуркации на бесконечности, оставив в (1.3) только первое из соотношений, то теорема 4.1 уже не имеет место.

4.1.1. Пример 2. В качестве иллюстрации рассмотрим две системы

$$\begin{cases} x' = x - y - \alpha(x^2+y^2)x, \\ y' = x + y - \alpha(x^2+y^2)y, \end{cases} \tag{4.2}$$

$$\begin{cases} x' = ky - (1+k)\alpha(x^2+y^2)x, \\ y' = -kx + (1+k)\alpha(x^2+y^2)y, \end{cases} \tag{4.3}$$

где $k > 0$. У обеих систем при положительных α имеется предельный цикл

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{\alpha},$$

стремящийся к бесконечности при $\alpha \to 0$. Этому циклу $\Upsilon(\alpha)$ соответствует периодическое решение

$$x = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\cos t, \qquad y = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\sin t.$$

Второе из соотношений (1.3) здесь не выполнено. Для указанных систем утверждения теоремы 4.1 не имеют место. Отметим также, что приходящие из бесконечности предельные циклы $\Upsilon(\alpha)$ указанных систем не «ответвляются» от циклов больших амплитуд невозмущенной системы. А именно, у невозмущенной для (4.2) системы вовсе нет циклов, а хотя у невозмущенной для (4.3) системы все решения являются циклами, но их период $T(k) = \dfrac{2\pi}{k}$ (при $k \neq 1$) не совпадает с периодом $T_0 = \dfrac{2}{\pi}$ циклов $\Upsilon(\alpha)$.

4.2. Необходимое условие бифуркации на бесконечности. Приведем необходимое условие бифуркации на бесконечности, из которого будет следовать, что эта бифуркация типична только для случая, когда в системе (3.10) нелинейность $b_q(x)$ является однородной четного порядка.

Теорема 4.2. *Пусть значение $\alpha = 0$ является точкой бифуркации Андронова — Хопфа на бесконечности системы (3.10). Тогда для любого вектора $u \in \mathbb{R}^2$ выполнено равенство*

$$\int_0^{T_0} e^{-B_0 t} b_q(e^{B_0 t}u)\, dt = 0. \tag{4.4}$$

Отметим следующее. Из леммы 3.1 следует, что необходимое условие (4.4) бифуркации Андронова — Хопфа на бесконечности выполнено для системы (3.10) при четных q, т.е. когда нелинейность $b_q(x)$ является однородной четного порядка. В то же время это условие для системы (3.10) при нечетных q, как правило, не выполняется.

Доказательство теоремы 4.2. Пусть значение $\alpha = 0$ является точкой бифуркация Андронова — Хопфа на бесконечности системы (3.10). Тогда существуют непрерывные функции $\alpha(\varepsilon)$ и $T(\varepsilon)$ такие, что система (3.10) при $\alpha = \alpha(\varepsilon)$ имеет $T(\varepsilon)$–периодическое решение $x(t,\varepsilon)$, при этом $\alpha(0) = 0$, $T(0) = T_0$ и выполнены соотношения (1.3).

Как и в задаче о бифуркации циклов, в системе (2.5) произведем невырожденную T_0–периодическую замену (3.1). В результате система (3.10) преобразуется к виду (3.2), которое при $\alpha = \alpha(\varepsilon)$ имеет решение

$$y = y(t,\varepsilon) = e^{-B_0 t}x(t,\varepsilon),$$

т.е.

$$\frac{dy(t,\varepsilon)}{dt} \equiv \alpha(\varepsilon)e^{-B_0 t} f(e^{B_0 t} y(t,\varepsilon)), \quad y \in \mathbb{R}^2; \tag{4.5}$$

здесь $f(x) = B_1 x + b_q(x)$.

Повторяя для (4.5) те же рассуждения, что были проведенные выше при рассмотрении равенства (3.7), придем к соотношению

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{-B_0 t} f(x(t,\varepsilon))\, dt = 0. \tag{4.6}$$

В силу теоремы 4.1 функция $x(t,\varepsilon)$ представима в виде (4.1). Тогда равенство (4.6) имеет вид

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{-B_0 t}[B_1(\rho(\varepsilon)\varphi_0(t) + o(\rho(\varepsilon))) + b_q(\rho(\varepsilon)\varphi_0(t) + o(\rho(\varepsilon)))]\, dt = 0,$$

или, учитывая однородность функции $b_q(x)$, вид

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{-B_0 t}[\rho(\varepsilon) B_1(\varphi_0(t) + o(1)) + (\rho(\varepsilon))^q b_q(\varphi_0(t) + o(1))]\, dt = 0.$$

Разделив это равенство на $(\rho(\varepsilon))^q$ и переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{-B_0 t} b_q(\varphi_0(t))\, dt = 0.$$

В полученном равенстве подынтегральная функция является T_0–периодической. Поэтому

$$\int_0^{T_0} e^{-B_0 t} b_q(\varphi_0(t))\, dt = 0.$$

Так как решение $\varphi_0(t)$ невозмущенной системы (2.6) может быть представлено в виде $\varphi_0(t) = e^{B_0 t} u_0$ при некотором ненулевом векторе $u_0 \in \mathbb{R}^2$, получим

$$\int_0^{T_0} e^{-B_0 t} b_q(e^{B_0 t} u_0)\, dt = 0.$$

В силу произвольности решения $\varphi_0(t)$ получим равенство (4.4). Теорема доказана. □

4.3. Достаточный признак бифуркации на бесконечности. Далее задачу о бифуркации на бесконечности будем обсуждать только для случая, когда в системе (3.10) нелинейность $b_q(x)$ является однородной четного порядка.

Как и теорема 3.3, приводимый ниже достаточный признак бифуркации на бесконечности основан на операторных методах исследования задач о многопараметрических бифуркациях (см. [3], [18]). Следуя этим работам определим векторы

$$e(t) = e\cos 2\pi t - g\sin 2\pi t, \qquad \xi_2 = \int_0^1 e^{-tT_0 B_0} \beta_2(t)\, dt,$$

где

$$\beta_2(t) = T_0 F_2(t) \int_0^t e^{-\tau T_0 B_0} b_q(e(\tau))\, d\tau; \quad \text{здесь} \quad F_2(t) = T_0 b'_{qx}(e(t)) e^{T_0 B_0 t};$$

$b'_{qx}(x)$ — матрица Якоби вектор–функции $b_q(x)$.

Определим также числа

$$\alpha_2 = -\frac{\omega_0}{\pi\gamma_1}(\xi_2, e^*), \qquad T_2 = \frac{1}{\omega_0}\Big[(\xi_2, g^*) - \frac{\gamma_2}{\gamma_1}(\xi_2, e^*)\Big]. \tag{4.7}$$

Теорема 4.3. *Пусть q — четно. Пусть выполнены условия:*

$$\gamma_1 \neq 0, \qquad \alpha_2 \neq 0. \tag{4.8}$$

Тогда $\alpha = 0$ является точкой бифуркации Андронова — Хопфа на бесконечности системы (3.10).

Теорема 4.3 является развитием аналогичного результата, полученного в [18].

Очевидна следующая лемма.

Лемма 4.1. *Пусть q четно. При $\alpha \neq 0$ замена $y = \alpha^{\frac{1}{(q-1)}} x$ сводит систему (3.10) к виду*

$$y' = (B_0 + \alpha B_1)y + b_q(y), \quad y \in \mathbb{R}^2. \tag{4.9}$$

Обратная замена сводит систему (4.9) к системе (3.10).

Доказательство Теоремы 4.3. Первое из условий (4.8) означает, что $\alpha = 0$ является точкой бифуркации Андронова — Хопфа системы (4.9). А именно, система (4.9) при $\alpha = \alpha(\varepsilon)$ имеет нестационарное $T(\varepsilon)$–периодическое решение $y(t,\varepsilon)$ малой амплитуды, при этом функции $\alpha(\varepsilon)$, $T(\varepsilon)$ и $y(t,\varepsilon)$ представимы в виде

$$\alpha(\varepsilon) = \alpha_2\varepsilon^q + O(\varepsilon^{q+2}), \qquad T(\varepsilon) = T_0 + T_2\varepsilon^q + O(\varepsilon^{q+2}), \qquad y(0,\varepsilon) = \varepsilon e + O(\varepsilon^3). \tag{4.10}$$

Из леммы 4.1 следует, что система (3.10) при $\alpha = \alpha(\varepsilon)$ имеет нестационарное $T(\varepsilon)$–периодическое решение

$$x(t,\varepsilon) = (\alpha(\varepsilon))^{\frac{1}{(1-q)}} y(t,\varepsilon).$$

Отсюда и из равенств (4.10) следует, что оба соотношения (1.3) для решения $x(t,\varepsilon)$ выполнены. Поэтому значение $\alpha = 0$ является точкой бифуркации Андронова — Хопфа на бесконечности системы (3.10). Теорема доказана. □

Из теоремы 4.3 и результатов работы [18] получим справедливость следующего утверждения.

Теорема 4.4. *В условиях теоремы 4.3 бифуркационные решения $x(t,\varepsilon)$ системы (3.10) возникают при $\alpha > 0$ (если $\alpha_2 > 0$) или при $\alpha < 0$ (если $\alpha_2 < 0$). Асимптотика (по малому параметру ε) решений $x(t,\varepsilon)$ определяется равенством*

$$x(0,\varepsilon) = \frac{e}{(\alpha_2\varepsilon)^{\frac{1}{(q-1)}}} + o(\varepsilon^{\frac{1}{(1-q)}}),$$

в котором e — вектор из (2.2) и (3.11). Эти решения орбитально асимптотически устойчивы (неустойчивы), если $(\xi_2, e^*) < 0$ (если $(\xi_2, e^*) > 0$).

4.4. Пример 3. В качестве иллюстрации рассмотрим систему

$$x' = A(\alpha)x + \alpha a(x), \qquad x \in \mathbb{R}^2, \tag{4.11}$$

в которой

$$A(\alpha) = \begin{bmatrix} -1-\alpha & 12(1+\alpha) \\ -\dfrac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}, \qquad a(x) = \begin{bmatrix} -\dfrac{x_1^2}{12} - 12x_2^2 + 2x_1x_2 \\ -\dfrac{x_2^2}{2} - \dfrac{x_1x_2}{4} \end{bmatrix}.$$

Система (4.11) получена путем преобразования модели Холлинга — Тэннера (см., например, [2]), а именно, путем переноса начала координат в точку равновесия модели и соответствующего «обрезания» правой части полученной системы.

Система (4.11) может быть представлена в виде (3.10) при $q = 2$,

$$B_0 = \begin{bmatrix} -1 & 12 \\ -\dfrac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} -1 & 12 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b_2(x) = a(x).$$

Матрица B_0 имеет собственные значения $\pm\omega_0 i$, где $\omega_0 = \sqrt{5}$. В качестве векторов e, e^*, g, g^* из (2.2) и (3.11) здесь можно взять векторы

$$e = \begin{bmatrix} 1 \\ \dfrac{(1+\sqrt{5})}{12} \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} -1 \\ \dfrac{(\sqrt{5}-1)}{12} \end{bmatrix}, \quad e^* = \begin{bmatrix} \dfrac{(5-\sqrt{5})}{10} \\ \dfrac{6\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix}, \quad g^* = \begin{bmatrix} -\dfrac{(5+\sqrt{5})}{10} \\ \dfrac{6\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix}.$$

Числа γ_1, α_2 и (ξ_2, e^*) из (3.12) и (4.7) здесь равны:

$$\gamma_1 = -1, \qquad \alpha_2 \approx 0,027, \qquad (\xi_2, e^*) = \frac{\pi\alpha_2}{\sqrt{5}}.$$

Отсюда и из теорем 4.3 и 4.4 следует, что $\alpha = 0$ является точкой бифуркации Андронова — Хопфа на бесконечности системы (4.11). Эти циклы возникают при $\alpha > 0$ и являются неустойчивыми.

5. Многомерная система

Вернемся к обсуждению задач о бифуркации циклов и бифуркации на бесконечности для многомерной системы (2.1) при $N \geqslant 3$. Эти задачи можно изучать по той же схеме, что и для двумерной системы с естественными модификациями построений. Ограничимся приведением схемы исследования задачи о бифуркации циклов.

5.1. Задача о бифуркации циклов: необходимые условия. Напомним, что выше предполагались выполненными условия V1 и V2. Напомним также о том, что пространство $\mathbb{R}^N$ может быть представлено в виде прямой суммы $\mathbb{R}^N = E_0 \oplus E^0$, где E_0 — двумерное собственное подпространство оператора B_0, отвечающее простым собственным значениям $\pm i\omega_0$, а E^0 — дополнительное инвариантное для B_0 подпространство размерности $N-2$.

Равенство $\mathbb{R}^N = E_0 \oplus E^0$ определяет операторы проектирования

$$P_0 : \mathbb{R}^N \to E_0 \quad \text{и} \quad P^0 : \mathbb{R}^N \to E^0$$

так, что $P^0 = I - P_0$, а оператор P_0 может быть представлен в виде

$$P_0 x = (x, e^*)e + (x, g^*)g;$$

здесь $e, g, e^*, g^* \in \mathbb{R}^N$ — векторы, выбранные в соответствии с равенствами (2.2) и (3.11).

Рассмотрим двумерную автономную систему

$$u' = \alpha F(u), \qquad u \in E_0, \tag{5.1}$$

где

$$F(u) = \frac{1}{T_0} \int\limits_0^{T_0} P_0 e^{-B_0 t} f(e^{B_0 t} u)\, dt.$$

Следующее утверждение содержит необходимое условие бифуркации циклов (2.1) при $N \geqslant 3$.

Теорема 5.1. *Пусть значение $\alpha = 0$ является точкой бифуркации циклов системы (2.1), ответвляющихся от некоторой траектории Υ_0 линейной системы (2.3). Тогда любой вектор $u_0 \in \Upsilon_0$ является точкой равновесия системы (5.1), т.е. $F(u_0) = 0$.*

Доказательство этого утверждения можно проводить так же, как и доказательство ее аналога — теоремы 3.1. Приведем схему доказательства теоремы 5.1.

Так как $\mathbb{R}^N = E_0 \oplus E^0$, каждый вектор $x \in R^N$ единственным образом представим в виде $x = x_0 + x^0$, где $x_0 = P_0 x$ и $x^0 = P^0 x$. Соответственно, систему (2.1) можно представить в равносильном виде

$$\begin{cases} (x_0)' = B_0 x_0 + \alpha P_0 f(x_0 + x^0), \\ (x^0)' = B_0 x^0 + \alpha P^0 f(x_0 + x^0). \end{cases} \tag{5.2}$$

В системе (5.2) произведем невырожденную T_0–периодическую замену

$$y_0 = e^{-B_0 t} x_0, \quad y^0 = x^0. \tag{5.3}$$

В результате система (5.2) преобразуется к виду

$$\begin{cases} (y_0)' = \alpha P_0 e^{-B_0 t} f(e^{B_0 t} y_0 + y^0), \\ (y^0)' = B_0 y^0 + \alpha P^0 f(e^{B_0 t} y_0 + y^0) \end{cases} \tag{5.4}$$

с T_0–периодической правой частью.

Пусть значение $\alpha = 0$ является точкой бифуркации циклов системы (2.1), т.е. существуют непрерывные функции $\alpha(\varepsilon)$ и $T(\varepsilon)$ такие, что выполнены условия U1 и U2, а также условие UC, которое можно представить в виде соотношения (3.5):

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant T_0} \|x(t, \varepsilon) - C_0 \varphi_0(t)\| \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0; \tag{5.5}$$

здесь $\varphi_0(t)$ — функция (2.4), C_0 — некоторое положительное число. Из соотношения (5.5) следует, что решение $x(t, \varepsilon)$ системы (2.1) представимо в виде

$$x(t, \varepsilon) = C_0 \varphi_0(t) + \delta_0(t, \varepsilon) + \delta^0(t, \varepsilon), \tag{5.6}$$

где функции $\delta_0(t, \varepsilon) \in E_0$ и $\delta^0(t, \varepsilon) \in E^0$ являются почти периодическими по t, гладкими по ε и удовлетворяют соотношениям:

$$\max_t \|\delta_0(t, \varepsilon)\| \to 0, \quad \max_t \|\delta^0(t, \varepsilon)\| \to 0$$

при $\varepsilon \to 0$. Тогда система (5.4) имеет решение

$$y = y(t, \varepsilon) = e^{-B_0 t}[C_0 \varphi_0(t) + \delta_0(t, \varepsilon)] + \delta^0(t, \varepsilon).$$

Дальнейшие рассуждения аналогичны рассуждениям, проведенным при доказательстве теоремы 3.1 при рассмотрении функции (3.6). При этом существенно равенство (5.6). Отметим также, что правая часть системы (5.1) получена усреднением правой части первого уравнения системы (5.4) при $y^0 = 0$.

5.2. Задача о бифуркации циклов: системы с однородными нелинейностями. Рассмотрим теперь случай, когда система (2.1) имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = B_0 x + \alpha[B_1 x + b_q(x)], \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{5.7}$$

в котором нелинейность $b_q(x)$ является однородным полиномом степени q.

Как и в двумерном случае, определим числа и векторы (3.12), (3.16) и (3.17). Имеют место следующие аналоги теорем 3.2–3.4.

Теорема 5.2. *Пусть $\gamma_1 \neq 0$. Пусть значение $\alpha = 0$ является точкой бифуркации циклов системы (5.7). Тогда q — нечетно, т.е. в системе (5.7) нелинейность $b_q(x)$ является однородным полиномом нечетной степени.*

Теорема 5.3. *Пусть* $\gamma_1 \neq 0$, $\alpha_2 \neq 0$. *Тогда* $\alpha = 0$ *является точкой бифуркации циклов системы* (5.7), *ответвляющихся от содержащей вектор* u^* *траектории* Υ_0 *линейной системы* (2.3). *Здесь* $u^* = (\alpha_2)^{\frac{1}{(1-q)}} e$ *(если* $\alpha_2 > 0$*) или* $u^* = (-\alpha_2)^{\frac{1}{(1-q)}} e$ *(если* $\alpha_2 < 0$*). При этом бифуркационные решения* $x(t,\varepsilon)$ *системы* (5.7) *возникают при* $\alpha > 0$ *(если* $\alpha_2 > 0$*) или при* $\alpha < 0$ *(если* $\alpha_2 < 0$*).*

Теорема 5.4. *Пусть отличные от* $\lambda = \pm\omega_0 i$ *собственные значения матрицы* B_0 *имеют отрицательные вещественные части. Тогда возникающие в условиях теоремы* 5.3 *бифуркационные решения* $x(t,\varepsilon)$ *системы* (5.7) *орбитально асимптотически устойчивы (неустойчивы), если* $(\xi_3, e^*) < 0$ *(если* $(\xi_3, e^*) > 0$*).*

6. Заключение

В статье проведено детальное исследование задач о бифуркации циклов и о бифуркации Андронова — Хопфа на бесконечности для динамических систем с малым параметром, нелинейности которых содержат однородные полиномы четной или нечетной степени, а невозмущенное уравнение имеет континуум периодических решений. Предложены новые необходимые и достаточные условия указанных бифуркаций, получены формулы для приближенного построения бифуркационных решений, проведен анализ их устойчивости. Показано, что бифуркация циклов типична только для систем с однородностями нечетной степени, а бифуркация на бесконечности — только для систем с однородностями четной степени. Показана взаимосвязь этих бифуркаций с классической бифуркацией Андронова — Хопфа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Н.Н. Баутин, Е.А. Леонтович. *Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости.* М.: Наука (1990).
2. А.С. Братусь, А.С. Новожилов, А.П. Платонов. *Динамические системы и модели биологии.* М.: Физматлит (2010).
3. А.А. Вышинский, Л.С. Ибрагимова, С.А.Муртазина, М.Г. Юмагулов. *Операторный метод приближенного исследования правильной бифуркации в многопараметрических динамических системах* // Уфим. мат. ж. **2**:4, 3–26 (2010).
4. Дж. Гукенхеймер, Ф. Холмс. *Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей.* М.-Ижевск: Ин-т компьют. исслед. (2002).
5. Н.И. Гусарова, С.А. Муртазина, М.Ф. Фазлытдинов, М.Г. Юмагулов. *Операторные методы вычисления ляпуновских величин в задачах о локальных бифуркациях динамических систем* // Уфим. мат. ж. **10**:1, 25–49 (2018).
6. М.А. Красносельский, П.П. Забрейко. *Геометрические методы нелинейного анализа.* М.: Наука (1975).
7. А.М. Красносельский, М.А. Красносельский. *Циклы больших амплитуд в автономных системах с гистерезисом* // Докл. акад. наук СССР **283**:1, 23–26 (1985).
8. М.А. Красносельский, Н.А. Кузнецов, М.Г. Юмагулов. *Условия устойчивости циклов при бифуркации Хопфа в бесконечности* // Автом. телемех. **1997**:1, 56–62 (1997).
9. А.М. Красносельский. *Вырожденный случай бифуркации Андронова — Хопфа на бесконечности* // Автом. телемех. **2010**:11, 55–68 (2010).
10. В.С. Медведев, Е.Л. Федоров. *О динамических системах, близких к гамильтоновым, с петлей сепаратрисы седла* // Мат. сб. **185**:9, 95–108 (1994).
11. А.Д. Морозов, Е.Л. Федоров. *К исследованию уравнений с одной степенью свободы, близких к нелинейным интегрируемым* // Диффер. уравн. **19**:9, 1511–1516 (1983).

12. Э. Мухамадиев, А.Б. Назимов, А.Н. Наимов. *О разрешимости одного класса нелинейных уравнений с малым параметром в банаховом пространстве* // Уфим. мат. ж. **12**:3, 62–70 (2020).
13. Л.С. Понтрягин. *О динамических системах, близких к гамильтоновым* // Ж. экспер. теор. физ. **4**:8, 234–238 (1934).
14. М. Розо. *Нелинейные колебания и теория устойчивости.* М.: Наука (1971).
15. Дж.К. Спротт. *Элегантный хаос: алгебраически простые хаотические потоки.* М.-Ижевск: Ин-т компьют. исслед. (2012).
16. Б. Хэссард, Н. Казаринов, И. Вэн. *Теория и приложения бифуркации рождения цикла.* М.: Мир (1985).
17. Л.П. Шильников, А.Л. Шильников, Д.В. Тураев, Л. Чуа. *Методы качественной теории в нелинейной динамике. Часть 2.* М.-Ижевск: Ин-т компьют. исслед. (2009).
18. М.Г. Юмагулов, Л.С. Ибрагимова, Э.С. Имангулова. *Главные асимптотики в задаче о бифуркации Андронова — Хопфа и их приложения* // Диффер. уравн. **53**:12, 1627–1643 (2017).
19. М.Г. Юмагулов, Л.С. Ибрагимова, М.Н. Кунгиров. *Бифуркации периодических решений в двупараметрических автономных системах* // Вестник БашГУ **28**:2, 154–157 (2023).
20. P. Diamond, D. Rachinskii, M. Yumagulov. *Stability of large cycles in a nonsmooth problem with Hopf bifurcstion at infinity* // Nonlinear Anal., Theory Methods Appl., Ser. A, Theory Methods **42**:6, 1017–1031 (2000).
21. A. Fura, S. Rybicki. *Periodic solutions of second order Hamiltonian systems bifurcating from infinity* // Ann. Inst. Henri Poincaré, Anal. Non Linéaire **24**:3, 471–490 (2007).
22. X. He. *Hopf bifurcation at infinity with discontinuous nonlinearities* // J. Aust. Math. Soc., Ser. B **33**:2, 133–148 (1991).
23. M.N. Kungirov. *Bifurcation of periodic oscillations arising from a closed phase curve in systems with odd nonlinearities* // Lobachevskii J. Math. **45**:6, 2739–2745 (2024).
24. D. Rachinskii, K. Schneider. *Dynamic Hopf bifurcations generated by nonlinear terms* // J. Differ. Equations **210**:1, 65–86 (2005).
25. M.G. Yumagulov, M.F. Fazlytdinov, R.I. Gabdrahmanov. *Langford Model: Dynamics, Bifurcations, Attractors* // Lobachevskii J. Math. **44**:5, 1943–1955 (2023).

Марат Гаязович Юмагулов,
Уфимский университет науки и технологий
ул. Заки Валиди, 32,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: yum_mg@mail.ru

Мамирбой Норбек угли Кунгиров,
Уфимский университет науки и технологий,
ул. Заки Валиди, 32,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: mamur.qongirov@mail.ru