ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 17. № 4 (2025). С. 119-130.

УДК 517.5

О НАИЛУЧШЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ БЕРГМАНА B_2

Д.К. ТУХЛИЕВ

Аннотация. В работе изучаются экстремальные задачи, связанные с наилучшим полиномиальным приближением аналитических в единичном круге функций в гильбертовом пространстве Бергмана B_2. Найдены точные неравенства для наилучшего приближения произвольной аналитической в единичном круге функций $f \in B_2$ алгебраическими комплексными полиномами $p_n \in \mathcal{P}_n$ посредством усреднённого значения модуля непрерывности $\omega(f^{(r)},t)_{B_2}$ производной r-го порядка $f^{(r)}$ в пространстве B_2. Введён класс $W_2^{(r)}(\omega,\Phi)$ аналитических в единичном круге функций, усреднённое значение модуля непрерывности производной $f^{(r)}$ которых удовлетворяет неравенству

$$\int\limits_0^u \omega^2(f^{(r)},t)_{B_2}\sin\frac{\pi}{u}t\,dt \leqslant \Phi^2(u), \qquad 0\leqslant u\leqslant 2\pi.$$

При определённых ограничениях на мажоранту Φ для введённого класса функций вычислены точные значения различных n–поперечников. При решении указанных задач используются методы решения экстремальных задач в нормированных пространствах и используется метод оценки n–поперечников, разработанный В.М.Тихомировым.

Ключевые слова: экстремальные задачи, приближение функций, модуль непрерывности, верхние грани, n–поперечники, пространство Бергмана.

Mathematics Subject Classification: 41A17, 41A25

1. Введение и предварительные результаты

Экстремальные задачи наилучшего полиномиального приближения аналитических в круге функций в различных нормированных пространствах изучались, например, в работах [1], [3]–[7], [9]–[13], [15], [16], [19], [20], [22]–[29], [31] и многих других. В данной работе требуется найти верхние грани наилучших приближений функций комплексными алгебраическими полиномами в пространстве Бергмана B_2.

Пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}_+$ — соответственно множество натуральных и целых неотрицательных чисел. Пусть далее $\mathbb{C}$ — комплексная плоскость, $U := \{z\in\mathbb{C} : |z| < 1\}$ — единичный круг в $\mathbb{C}$, $A(U)$ — множество функций, аналитических в круге U.

Определение 1.1 ([6]). *Говорят, что аналитическая в единичном круге U функция*

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k(f)z^k, \qquad z=\rho e^{it}, \quad 0\leqslant\rho<1, \quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi \tag{1.1}$$

D.K. Tukhliev, On best approximation of functions in Bergman space B_2.

Поступила 30 сентября 2024 г.

принадлежит пространству Бергмана B_2, если

$$\|f\|_2 := \|f\|_{B_2} = \left(\frac{1}{\pi}\iint\limits_{(U)} |f(z)|^2\, d\sigma\right)^{\frac{1}{2}} < \infty. \tag{1.2}$$

Производную r-го порядка функции $f \in A(U)$ определим, как обычно,

$$f^{(r)}(z) := \frac{d^r f(z)}{dz^r} = \sum_{k=r}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-r+1)c_k(f)z^{k-r}, \quad r \in \mathbb{N}. \tag{1.3}$$

Ради краткости, введём обозначение

$$\alpha_{k,r} := k(k-1)\cdots(k-r+1) = \frac{k!}{(k-r)!}, \quad k, r \in \mathbb{N}, \quad k > r. \tag{1.4}$$

Всюду далее символом $B_2^{(r)}$ ($r \in \mathbb{Z}_+$, $B_2^{(0)} = B_2$) обозначим множество функций $f \in A(U)$, принадлежащих пространству B_2, производная r-го порядка $f^{(r)}(z)$ которых также принадлежит B_2, то есть

$$B_2^{(r)} := \left\{f \in B_2 : \|f^{(r)}\|_2 < \infty\right\}.$$

Пусть $\mathcal{P}_n$ — подпространство комплексных алгебраических многочленов степени n вида

$$p_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k, \qquad a_k \in \mathbb{C}.$$

Величину

$$E_n(f)_2 := E(f, \mathcal{P}_n)_{B_2} = \inf\left\{\|f - p_n\|_2 : p_n \in \mathcal{P}_n\right\} \tag{1.5}$$

называют наилучшим полиномиальным среднеквадратическим приближением функции $f \in B_2$ подпространством $\mathcal{P}_n$.

Хорошо известно [14, с. 203], что для произвольной функции $f \in B_2$ имеет место соотношение

$$E_{n-1}(f_2) = \|f - T_{n-1}(f)\|_2 = \left\{\sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1}\right\}^{\frac{1}{2}}, \tag{1.6}$$

где $T_{n-1}(f)$ — частная сумма порядка $n-1$ ряда (1.1).

Запишем норму (1.1) в более удобном виде

$$\|f\|_2 := \left(\frac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi} |f(\rho e^{it})|^2 \rho\, d\rho\, dt\right)^{\frac{1}{2}},$$

и символом

$$\Delta_h^1 f(\rho e^{it}) = f(\rho e^{i(t+h)}) - f(\rho e^{it})$$

обозначим конечную разность первого порядка функции $f \in B_2$ по аргументу t с шагом h. Равенством

$$\begin{aligned}\omega(f,\tau)_{B_2} :&= \sup\left\{\|\Delta_h^1(f)\|_{B_2} : |h| \leqslant \tau\right\}\\ &= \sup_{|h|\leqslant\tau} \frac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi} |f(\rho e^{i(t+h)} - f(\rho e^{it})|^2\, d\rho\, dt\end{aligned}$$

определим модуль непрерывности первого порядка функции $f \in B_2$. Пользуясь соотношениями (1.3) и (1.4), для любого $r \in \mathbb{Z}_+$ имеем

$$\Delta_h^1 f^{(r)}(\rho e^{it}) = \sum_{k=r+1}^{\infty} \alpha_{k,r} c_k(f) \rho^{k-r} e^{i(k-r)t} \big(1 - e^{i(k-r)h}\big).$$

Отсюда, применяя тождество Парсеваля, получаем

$$\|\Delta_h^1 f^{(r)}\|^2 = 2 \sum_{k=r+1}^{\infty} \alpha_{k,r}^2 \frac{|c_k(f)|^2}{k-r+1} \big(1 - \cos(k-r)h\big) \tag{1.7}$$

и, следовательно,

$$\omega^2(f^{(r)}, \tau)_{B_2} = 2 \sup_{|h| \leqslant \tau} \sum_{k=r+1}^{\infty} \alpha_{k,r}^2 \frac{|c_k(f)|^2}{k-r+1} \big(1 - \cos(k-r)h\big). \tag{1.8}$$

2. Основные результаты

В этом пункте излагаем основные результаты, полученные в данной статье. Имеет место следующая

Теорема 2.1. *Для любой функции $f \in B_2$ и любого напередё заданного $n \in \mathbb{N}$ при любом $h \in \big(0, \frac{\pi}{n}\big]$ справедливо неравенство*

$$E_{n-1}^2(f)_{B_2} \leqslant \frac{\displaystyle\int_0^h \omega^2(f,t)_{B_2} \sin\frac{\pi}{h} t\, dt}{2\left[\dfrac{2h}{\pi} - \displaystyle\int_0^h \cos nt \sin\frac{\pi}{h} t\, dt\right]}. \tag{2.1}$$

Для функции $f_0(z) = z^n \in B_2$ неравенство (2.1) обращается в равенство для всех $h \in \big(0, \frac{\pi}{n}\big]$.

Доказательство. Пользуясь определением модуля непрерывности запишем

$$\begin{aligned} \omega^2(f,t)_{B_2} &\geqslant \|f(\cdot + t) - f(\cdot)\|_{B_2} = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho |f(\rho e^{i(x+t)}) - f(\rho e^{ix})|^2\, d\rho\, dx \\ &= 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} (1 - \cos kt) \geqslant 2 \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} (1 - \cos kt). \end{aligned} \tag{2.2}$$

В предположении $h \in \big(0, \frac{\pi}{n}\big]$ умножим обе части неравенства (2.2) на функцию $\sin\frac{\pi}{h} t$ и проинтегрируем по t от 0 до h. В итоге получаем

$$\begin{aligned} \int_0^h \omega^2(f,t)_{B_2} \sin\frac{\pi}{h} t &\geqslant 2 \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} \int_0^h (1 - \cos kt) \sin\frac{\pi}{h} t\, dt \\ &= 2 \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} \int_0^h \sin\frac{\pi}{h} t\, dt - 2 \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} \int_0^h \cos kt \sin\frac{\pi}{h} t\, dt. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Теперь заметим, что функция натурального аргумента

$$\varphi(k)=\int\limits_0^h \cos kt \sin\frac{\pi}{h}t\,dt$$

убывает по $k\in\mathbb{N}$ при $h\in\left(0,\frac{\pi}{k}\right]$, так как производная

$$\varphi'(k)=-\int\limits_0^h t\sin kt\sin\frac{\pi}{h}t\,dt<0.$$

Поэтому при $h\in\left(0,\frac{\pi}{k}\right]$, $t\in(0,h)$ и $k\geqslant n$

$$\int\limits_0^h \cos kt\sin\frac{\pi}{h}t\,dt\leqslant\int\limits_0^h\cos nt\sin\frac{\pi}{h}t\,dt. \tag{2.4}$$

При $h\in\left(\frac{\pi}{k},\frac{\pi}{n}\right]$, $t\in(0,h)$ и $k\geqslant n$ снова имеет место (2.4), так как

$$\int\limits_0^h\cos kt\sin\frac{\pi}{h}t\,dt=\frac{2\pi h}{\pi^2-h^2k^2}\cos^2\frac{kh}{2}\leqslant 0,$$

$$\int\limits_0^h\cos nt\sin\frac{\pi}{h}t\,dt=\frac{2\pi h}{\pi^2-h^2n^2}\cos^2\frac{nh}{2}\geqslant 0.$$

Таким образом, при всех $h\in\left(0,\frac{\pi}{n}\right]$, $t\in(0,h)$ и $k\geqslant n$

$$\int\limits_0^h \cos kt\sin\frac{\pi}{h}t\,dt\leqslant\int\limits_0^h\cos nt\sin\frac{\pi}{h}t\,dt.$$

Отсюда из (2.3) получаем

$$\int\limits_0^h\omega^2(f,t)_{B_2}\sin\frac{\pi}{h}t\geqslant\frac{4h}{\pi}E_{n-1}^2(f)_{B_2}-2E_{n-1}^2(f)_{B_2}\int\limits_0^h\cos nt\sin\frac{\pi}{h}t\,dt$$

$$=E_{n-1}^2(f)_{B_2}\left[\frac{4h}{\pi}-2\int\limits_0^h\cos nt\sin\frac{\pi}{h}t\,dt\right],$$

откуда и следует неравенство (2.1). Знак равенства для $f_0(z)=z^n\in B_2$ проверяется непосредственным вычислением. □

Замечание 2.1. *Так как при* $h=\frac{\pi}{n}$

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{n}}\cos nt\sin nt\,dt=0,$$

из (2.1) получаем

$$E_{n-1}(f)_{B_2}\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{n}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{n}}\omega^2(f,t)_{B_2}\sin nt\,dt\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.5}$$

Неравенство (2.5) является аналогом известного неравенства Н.И. Черныха [21], доказанного для класса периодических функций $L_2 := L_2[0, 2\pi]$ на случай аналитических в единичном круге функций, принадлежащих пространству Бергмана B_2.

Теорема 2.2. *Для любой функции $f \in B_2^{(r)}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ и любой $n \in \mathbb{N}$, $n > r$ справедливо неравенство*

$$E_{n-1}^2(f)_{B_2} \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}}\frac{1}{\alpha_{n,r}}\frac{\displaystyle\int_0^h \omega^2(f^{(r)}, t)_{B_2} \sin\frac{\pi}{h}t\,dt}{\displaystyle\int_0^h (1-\cos(n-r)t)\sin\frac{\pi}{h}t\,dt}. \tag{2.6}$$

Доказательство. В [30] доказано, что для произвольной функции $f \in B_2^{(r)}$ при любых $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $n > r$ имеет место неравенство

$$E_{n-1}(f)_{B_2} \leqslant \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}}\frac{1}{\alpha_{n,r}}E_{n-r-1}(f^{(r)})_{B_2}. \tag{2.7}$$

В силу теоремы 2.1 имеем

$$\begin{aligned} E_{n-r-1}(f^{(r)})_{B_2} &\leqslant \frac{\left\{\displaystyle\int_0^h \omega^2(f^{(r)}, t)_{B_2} \sin\frac{\pi}{h}t\,dt\right\}^{\frac{1}{2}}}{\left\{2\left[\dfrac{2h}{\pi} - \displaystyle\int_0^h \cos(n-r)t\sin\frac{\pi}{h}t\,dt\right]\right\}^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{\left\{\displaystyle\int_0^h \omega^2(f^{(r)}, t)_{B_2} \sin\frac{\pi}{h}t\,dt\right\}^{\frac{1}{2}}}{\left\{2\displaystyle\int_0^h (1-\cos(n-r)t)\sin\frac{\pi}{h}t\,dt\right\}^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Учитывая неравенство (2.8), из (2.7) получаем

$$E_{n-1}(f)_{B_2} \leqslant \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}}\frac{1}{\alpha_{n,r}}\frac{\left\{\displaystyle\int_0^h \omega^2(f^{(r)}, t)_{B_2} \sin\frac{\pi}{h}t\,dt\right\}^{\frac{1}{2}}}{\left\{2\displaystyle\int_0^h (1-\cos(n-r)t)\sin\frac{\pi}{h}t\,dt\right\}^{\frac{1}{2}}} \tag{2.9}$$

и таким образом неравенство (2.6) доказано. Легко проверить, что неравенство (2.6) для функции $f_0(z) = z^n \in B_2^{(r)}$, $n > r$, $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ обращается в равенство. □

Следствие 2.1. *В условиях теоремы при* $h=\frac{\pi}{(n-r)}$, $n>r$ *имеет место неравенство*

$$E_{n-1}(f)_{B_2}\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}}\frac{1}{\alpha_{n,r}}\left\{\frac{n-r}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{(n-r)}}\omega^2(f^{(r)},t)_{B_2}\sin(n-r)t\,dt\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{2.10}$$

Следствие 2.2. *Для произвольной функции* $f_0\in B_2^{(r)}$ *при любых* $n\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $n>r$ *имеет место неравенство типа Джексона*

$$E_{n-1}(f)_{B_2}\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}}\frac{1}{\alpha_{n,r}}\omega\left(f^{(r)},\frac{\pi}{n-r}\right)_{B_2}. \tag{2.11}$$

Неравенство (2.11) является следствием монотонного возрастания модуля непрерывности $\omega(f^{(r)},t)_{B_2}$ на отрезке $\left[0,\frac{\pi}{(n-r)}\right]$. Но, если модуль непрерывности $\omega(f^{(r)},t)_{B_2}$ на отрезке $\left[0,\frac{\pi}{(n-r)}\right]$ является выпуклой вверх функцией, то есть для любых $t\in\left[0,\frac{\pi}{(n-r)}\right]$ удовлетворяет условию

$$\omega^2(f^{(r)},t)_{B_2}+\omega^2\left(f^{(r)},\frac{\pi}{n-r}-t\right)_{B_2}\leqslant 2\omega^2\left(f^{(r)},\frac{\pi}{n-r}\right)_{B_2}, \tag{2.12}$$

то неравенство (2.11) можно уточнить.

Следствие 2.3. *На множестве функций* $f\in B_2^{(r)}$, *у которых функция* $\omega(f^{(r)},t)_{B_2}$ *удовлетворяет условию (2.12), справедливо неравенство*

$$E_{n-1}(f)_{B_2}\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}}\frac{1}{\alpha_{n,r}}\omega\left(f^{(r)},\frac{\pi}{2(n-r)}\right)_{B_2}. \tag{2.13}$$

Существует функция $f_0\in B_2^{(r)}$, *которая обращает (2.13) в равенство.*

Доказательство. Для произвольной функции $f\in B_2^{(r)}$ с учетом неравенства (2.12) имеем

$$\begin{aligned}\int\limits_0^{\frac{\pi}{(n-r)}}\omega^2(f^{(r)},t)_{B_2}\sin(n-r)t\,dt &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2(n-r)}}\omega^2(f^{(r)},t)_{B_2}\sin(n-r)t\,dt\\ &\quad+\int\limits_{\frac{\pi}{2(n-r)}}^{\frac{\pi}{(n-r)}}\omega^2(f^{(r)},t)_{B_2}\sin(n-r)t\,dt\\ &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2(n-r)}}\omega^2(f^{(r)},t)_{B_2}\sin(n-r)t\,dt\\ &\quad+\int\limits_0^{\frac{\pi}{2(n-r)}}\omega^2\left(f^{(r)},\frac{\pi}{n-r}-t\right)_{B_2}\sin(n-r)t\,dt\\ &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2(n-r)}}\left[\omega^2(f^{(r)},t)_{B_2}+\omega^2\left(f^{(r)},\frac{\pi}{n-r}-t\right)_{B_2}\right]\sin(n-r)t\,dt\end{aligned}$$

$$\leqslant \int\limits_0^{\frac{\pi}{2(n-r)}} 2\omega^2\left(f^{(r)}, \frac{\pi}{2(n-r)}\right)_{B_2} \sin(n-r)t\,dt$$
$$= \frac{2}{n-r}\omega^2\left(f^{(r)}, \frac{\pi}{2(n-r)}\right)_{B_2},$$

откуда сразу следует, что

$$E_{n-1}(f)_{B_2} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}}\frac{1}{\alpha_{n,r}}\omega\left(f^{(r)}, \frac{\pi}{2(n-r)}\right)_{B_2}$$

и неравенство (2.13) доказано.

Докажем, что для функции $f_0(z) = z^n \in B_2^{(r)}$ неравенство (2.13) обращается в равенство. Для этой функции

$$E_{n-1}(f_0)_{B_2} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

и так как

$$f_0^{(r)}(z) = \alpha_{n,r}z^{n-r}, \quad n > r,$$

в силу формулы (1.8) имеем

$$\omega\left(f_0^{(r)}, t\right)_{B_2} = \frac{\sqrt{2}\alpha_{n,r}}{\sqrt{n-r+1}}\left(1-\cos(n-r)t\right)^{\frac{1}{2}},$$
$$\omega\left(f_0^{(r)}, \frac{\pi}{2(n-r)}\right)_{B_2} = \frac{\sqrt{2}\alpha_{n,r}}{\sqrt{n-r+1}}.$$

Пользуясь этими равенствами, запишем

$$\sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}}\frac{1}{\alpha_{n,r}}\frac{1}{\sqrt{2}}\omega\left(f_0^{(r)}, \frac{\pi}{2(n-r)}\right)_{B_2}$$
$$= \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}}\frac{1}{\alpha_{n,r}}\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}\alpha_{n,r}}{\sqrt{n-r+1}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} = E_{n-1}(f_0)_{B_2}$$

и следствие 2.3 доказано. □

3. Точные значения n–поперечников классов функций $W_2(\omega, \Phi)$ в B_2

Для формулировки результатов данного пункта напомним необходимые понятия и определения.

Пусть $S := \{f : \|f\| \leqslant 1\}$ — единичный шар в B_2; $\mathfrak{M}$ — выпуклое центрально–симметричное подмножество из B_2; $\mathcal{L}_n \subset B_2$ — n–мерное подпространство; $\mathcal{L}^n \subset B_2$ — подпространство коразмерности n; $\Lambda : B_2 \to \mathcal{L}_n$ — непрерывный линейный оператор; $\Lambda^\perp : B_2 \to \mathcal{L}^n$ — непрерывный оператор линейного проектирования. Величины

$$b_n(\mathfrak{M}, B_2) = \sup\left\{\sup\left\{\varepsilon > 0 : \varepsilon S \cap \mathcal{L}_{n+1} \subset \mathfrak{M}\right\} : \mathcal{L}_{n+1} \subset B_2\right\},$$
$$d_n(\mathfrak{M}, B_2) = \inf\left\{\sup\left\{\inf\left\{\|f-\varphi\|_{B_2} : \varphi \in \mathcal{L}_n\right\} : f \in \mathfrak{M}\right\} : \mathcal{L}_n \subset B_2\right\},$$
$$\delta_n(\mathfrak{M}, B_2) = \inf\left\{\inf\left\{\sup\left\{\|f-\Lambda f\|B_2 : f \in \mathfrak{M}\right\} : \Lambda B_2 \subset \mathcal{L}_n\right\} : \mathcal{L}_n \subset B_2\right\},$$
$$d^n(\mathfrak{M}, B_2) = \inf\left\{\sup\left\{\|f\|_{B_2} : f \in \mathfrak{M} \cap \mathcal{L}^n\right\} : \mathcal{L}^n \subset B_2\right\},$$
$$\Pi_n(\mathfrak{M}, B_2) = \inf\left\{\inf\left\{\sup\left\{\|f-\Lambda^\perp f\|_{B_2} : f \in \mathfrak{M}\right\} : \Lambda^\perp B_2 \subset \mathcal{L}_n\right\} : \mathcal{L}_n \subset B_2\right\},$$

называют соответственно *бернштейновским, колмогоровским, линейным, гельфандовским, проекционным n–поперечниками* множества $\mathfrak{M}$ в пространстве B_2.

Так как B_2 является гильбертовым пространством, то между перечисленными выше n–поперечниками выполняются соотношения [17], [32]:

$$b_n(\mathfrak{M}, B_2) \leqslant d^n(\mathfrak{M}, B_2) \leqslant d_n(\mathfrak{M}, B_2) = \delta_n(\mathfrak{M}, B_2) = \Pi_n(\mathfrak{M}, B_2). \tag{3.1}$$

Напомним, что вычислению в пространстве B_2 точных значений n–поперечников классов аналитических в единичном круге функций, определенных при помощи модулей непрерывности и иных характеристик гладкости, посвящены работы С.Б. Вакарчука [4]–[7], [9], М.Ш. Шабозова с учениками [22]–[24], А. Пинкуса [32], Ю.А. Фаркова [19], М.Р. Лангаршоева [12], [13], С.Б. Вакарчука и М.Ш. Шабозова [8] и многих других.

Используя определение модуля непрерывности, рассмотрим следующий класс функций. Пусть $\Phi(u)$, где $0 \leqslant u \leqslant 2\pi$ есть непрерывная возрастающая функция такая, что $\Phi(0) = 0$.

Символом $W_2^{(r)}(\omega, \Phi)$ обозначим класс функций $f \in B_2^{(r)}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, для которых при любом $u \in (0, \pi]$ выполняется неравенство

$$\int_0^u \omega^2(f^{(r)}, t)_{B_2} \sin\frac{\pi}{u} t\, dt \leqslant \Phi^2(u).$$

Вычислим точные значения вышеперечисленных n–поперечников при выполнении некоторых ограничений на мажоранту $\Phi^2(u)$.

Отметим, что подобные классы функций впервые появились в работах Л.В. Тайкова [15], [16] и его ученика Н. Айнуллоева [1] при вычислении точных значение поперечников классов периодических функций в $L_2 := L_2[0, 2\pi]$ и аналитических в единичном круге функций, принадлежащих пространству Харди H_q $(q \geqslant 1)$.

Естественно, возникает желание использовать указанные классы функций при решении ряда экстремальных задач в пространстве Бергмана.

Теорема 3.1. *Если для заданного $\lambda \in (0, 1)$ и для всех $\mu > 0$, $u \in (0, \pi]$ мажоранта Φ удовлетворяет условию*

$$\Phi^2\left(\frac{u}{\mu}\lambda\right) \int_0^{\pi\mu} (1 - \cos t)_* \sin\frac{t}{\mu}\, dt \leqslant \Phi^2(u) \int_0^{\pi\lambda} (1 - \cos t) \sin\frac{t}{\lambda}\, dt, \tag{3.2}$$

где

$$(1 - \cos t)_* = \begin{cases} 1 - \cos t, & t \leqslant \pi, \\ 2, & t \geqslant \pi, \end{cases}$$

то при любых $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $n > r$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} \lambda_n(W_2^{(r)}(\omega, \Phi), B_2) &= E_{n-1}(W_2^{(r)}(\omega, \Phi))_{B_2} \\ &= \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \frac{n-r}{\alpha_{n,r}} \frac{\Phi\left(\dfrac{\pi\lambda}{n-r}\right)}{\sqrt{2}\left(\displaystyle\int_0^{\pi\lambda} (1 - \cos t) \sin\frac{t}{\lambda}\, dt\right)^{\frac{1}{2}}}, \end{aligned} \tag{3.3}$$

где $\lambda_n(\cdot)$ любой из вышеперечисленных n–поперечников, а для $\mathfrak{N} \subset B_2$ положено

$$E_{n-1}(\mathfrak{N})_{B_2} := \sup\left\{E_{n-1}(f)_{B_2} : f \in B_2\right\}. \tag{3.4}$$

Доказательство. Если в правой части (2.9) положить $h = \frac{\pi\lambda}{(n-r)}$, $\lambda \in (0,1)$, $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $n > r$ и использовать определение класса $W_2^{(r)}(\omega, \Phi)$, то в силу соотношения (3.1) получим оценку сверху всех n–поперечников и величины (3.4):

$$\begin{aligned}\lambda_n(W_2^{(r)}(\omega,\Phi), B_2) &\leqslant E_{n-1}(W_2^{(r)}(\omega,\Phi)_{B_2} \\ &\leqslant \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}}\frac{1}{\alpha_{n,r}}\frac{\Phi\left(\dfrac{\pi\lambda}{n-r}\right)}{\sqrt{2}\left(\displaystyle\int\limits_0^{\pi\lambda/(n-r)}(1-\cos(n-r)t)\sin\frac{n-r}{\lambda}t\,dt\right)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}}\frac{\sqrt{n-r}}{\alpha_{n,r}}\frac{\Phi\left(\dfrac{\pi\lambda}{n-r}\right)}{\left(\displaystyle\int\limits_0^{\pi\lambda}(1-\cos t)\sin\frac{t}{\lambda}\,dt\right)^{\frac{1}{2}}}.\end{aligned} \tag{3.5}$$

Для доказательства соотношения (3.3) в силу (3.1) достаточно получить оценку *бернштейновского* n–поперечника, равную правой части (3.5). С этой целью для произвольного полинома

$$p_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \in \mathcal{P}_n$$

оценим $\omega(p_n^{(r)}, t)_{B_2}$ при условии $t \in \left(0, \frac{\pi}{(n-r)}\right]$. В силу равенства Парсеваля имеем

$$\begin{aligned}\|p_n^{(r)}(\rho e^{i(x+t)}) - p_n^{(r)}(\rho e^{ix})\|_{B_2}^2 &= 2\sum_{k=r}^{n}\alpha_{k,r}^2\frac{|a_k|^2}{k-r+1}(1-\cos(k-r)t) \\ &= 2\sum_{k=r}^{n}\alpha_{k,r}^2\frac{k+1}{k-r+1}\frac{|a_k|^2}{k+1}(1-\cos(k-r)t).\end{aligned} \tag{3.6}$$

Так как

$$\max_{r\leqslant k\leqslant n}\alpha_{k,r}^2\frac{k+1}{k-r+1} = \alpha_{n,r}^2\frac{n+1}{n-r+1}$$

и при любых $k, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ и любом $t \geqslant 0$ и $k \leqslant n$, $\cos(k-r)t \geqslant \cos(n-r)t$, из (3.6) и определении модуля непрерывности (1.8) имеем

$$\begin{aligned}\omega^2(p_n^{(r)}, t)_{B_2} &\leqslant 2\alpha_{n,r}^2\frac{n+1}{n-r+1}(1-\cos(n-r)t)_*\sum_{k=r}^{n}\frac{|a_k|^2}{k+1} \\ &\leqslant 2\alpha_{n,r}^2\frac{n+1}{n-r+1}(1-\cos(n-r)t)_*\|p_n\|_{B_2}^2.\end{aligned}$$

Умножая обе части полученного неравенства на функцию $\sin\dfrac{\pi}{u}t$ и интегрируя по t от 0 до u, получаем

$$\int\limits_0^u \omega^2(p_n^{(r)}, t)_{B_2}\sin\frac{\pi}{u}t\,dt \leqslant 2\alpha_{n,r}^2\frac{n+1}{n-r+1}\|p_n\|_{B_2}^2\int\limits_0^u(1-\cos(n-r)t)_*\sin\frac{\pi}{u}t\,dt. \tag{3.7}$$

Введём в рассмотрение сферу $(n+1)$–мерных полиномов

$$S_{n+1} := \left\{ p_n \in \mathcal{P}_n : \|p_n\|^2_{B_2} = \frac{n-r+1}{n+1}\frac{n-r}{\alpha^2_{n,r}} \frac{\Phi^2\left(\dfrac{\pi\lambda}{n-r}\right)}{2\displaystyle\int_0^{2\lambda}(1-\cos t)\sin\frac{t}{\lambda}\,dt} \right\},$$

и покажем, что эта сфера содержится в классе $W_2^{(r)}(\omega,\Phi)$. Для этого возьмём любой полином $p_n \in S_{n+1}$ и покажем, что $p_n \in W_2^{(r)}(\omega,\Phi)$. Пусть $p_n \in S_{n+1}$. Тогда из (3.7) получаем

$$\int_0^u \omega^2(p_n^{(r)},t)_{B_2}\sin\frac{\pi}{u}t\,dt \leqslant \Phi^2\left(\frac{\pi\lambda}{n-r}\right)\frac{(n-r)\displaystyle\int_0^u(1-\cos(n-r)t)_*\sin\frac{\pi}{u}t\,dt}{\displaystyle\int_0^{2\lambda}(1-\cos t)\sin\frac{t}{\lambda}\,dt}. \tag{3.8}$$

Положив в правой части (3.8) $u = \frac{\pi\mu}{(n-r)}, \mu > 0$ и сделав замену переменной, в силу ограничения (3.2) имеем

$$\int_0^u \omega^2(p_n^{(r)},t)_{B_2}\sin\frac{\pi}{u}t\,dt \leqslant \Phi^2\left(\frac{u}{\mu}\lambda\right)\frac{\displaystyle\int_0^{\pi\mu}(1-\cos t)_*\sin\frac{t}{\mu}\,dt}{\displaystyle\int_0^{\pi\lambda}(1-\cos t)\sin\frac{t}{\lambda}\,dt} \leqslant \Phi^2(u).$$

Следовательно, $S_{n+1} \in W_2^{(r)}(\omega,\Phi)$ и по определению *бернштейновского* n*–поперечника*

$$b_n(W_2^{(r)}(\omega,\Phi),B_2) \geqslant b_n(S_{n+1},B_2)$$
$$= \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}}\frac{\sqrt{n-r}}{\alpha_{n,r}}\frac{\Phi\left(\dfrac{\pi\lambda}{n-r}\right)}{\sqrt{2}\left(\displaystyle\int_0^{\pi\lambda}(1-\cos t)\sin\frac{t}{\lambda}\,dt\right)^{\frac{1}{2}}}. \tag{3.9}$$

Требуемое равенство (3.3) в силу соотношения (3.1) следует из сопоставления оценки сверху (3.5) и снизу (3.9). Теорема полностью доказана. □

В [2] доказано, что для функции $\Phi_*^2(u) = u^\alpha$ неравенства (3.2) выполняются для значений α в пределах $\dfrac{\pi}{8}+1 < \alpha < 3$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Н. Айнуллоев, Л.В. Тайков. *Наилучшие приближения в смысле А.Н. Колмогорова классов аналитических в единичном круге функций* // Мат. заметки **40**:3, 341–351 (1986).
2. Н. Айнуллоев. *Наилучшее приближение некоторых классов дифференцируемых функций в* L_2 // В: *Применение функционального анализа в теории приближений*, Калининский госуниверситет, Калинин, 3–10 (1986).

3. К.И. Бабенко. *О наилучших приближениях одного класса аналитических функций* // Изв. акад. наук СССР, Сер. мат. **22**:5, 631–640 (1958).
4. С.Б. Вакарчук. *О поперечниках некоторых классов аналитических в единичном круге функций. I* // Укр. мат. ж. **42**:7, 873–881 (1990).
5. С.Б. Вакарчук. *О поперечниках некоторых классов аналитических в единичном круге функций. II* // Укр. мат. ж. **42**:8, 1019–1026 (1990).
6. С.Б. Вакарчук. *Наилучшие линейные методы приближения и поперечники классов аналитических в круге функций* // Мат. заметки **57**:1, 30–39 (1995).
7. С.Б. Вакарчук. *О наилучших линейных методах приближения и поперечниках некоторых классов аналитических функций* // Мат. заметки **65**:2, 186–193 (1999).
8. С.Б. Вакарчук, М.Ш. Шабозов. *О поперечниках классов функций, аналитических в круге* // Мат. сб. **201**:8, 3–22 (2010).
9. С.Б. Вакарчук, Б.М. Вакарчук. *Неравенства типа Колмогорова для аналитических функций одной и двух переменных и их приложение к теории аппроксимации* // Укр. мат. ж. **63**:12, 1579–1601 (2011).
10. С.Б. Вакарчук. *Оценки значений n–поперечниковклассов аналитических функций в весовых пространствах $H_{2\gamma}(D)$* // Мат. заметки **108**:6, 803–822 (2020).
11. М.З. Двейрин, И.В. Чебаненко. *О полиномиальной аппроксимации в банаховых пространствах аналитических функций* // В: «Теория отображений и приближение функций», Наукова думка, Киев, 62–73 (1983).
12. М.Р. Лангаршоев. *О наилучшем приближении и значениях поперечников некоторых классов функций в весовом пространстве Бергмана* // Вестн. росс. унив., Мат. **27**:140, 339–350 (2022).
13. М.Р. Лангаршоев. *Наилучшее приближение и значения поперечников некоторых классов аналитических функций в весовом пространстве Бергмана $B_{2,\gamma}$* // Вестн. росс. унив., Мат. **28**:142, 182–192 (2023).
14. В.И. Смирнов, Н.А. Лебедев. *Конструктивная теория функций комплексного переменного.* М.-Л.: Наука. 1964.
15. Л.В. Тайков. *О наилучшем приближении в среднем некоторых классов аналитических функций* // Мат. заметки **1**:2, 155–162 (1967).
16. Л.В. Тайков. *Поперечники некоторых классов аналитических функций* // Мат. заметки **22**:2, 285–295 (1977).
17. В.М. Тихомиров. *Некоторые вопросы теории приближений.* Москва: МГУ. 1976.
18. Ю.А. Фарков. *Поперечники классов Харди и Бергмана в шаре $\mathbb{C}^n$* // Усп. мат. наук **45**:5(275), 197–198 (1990).
19. Ю.А. Фарков. *О наилучшем линейном приближении голоморфных функций* // Фундам. прикл. мат. **19**:5, 185–212 (2014).
20. Х.М. Хуромонов. *Точные неравенства между наилучшими полиномиальными приближениями и усредненными нормами конечных разностей в пространстве B_2 и поперечники некоторых классов функций* //Изв. высш. учебн. завед., Мат. **2022**:3, 61–70 (2022).
21. Н.И. Черных. *О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2* // Мат. заметки **2**:5, 803–808 (1967).
22. М.Ш. Шабозов, О.Ш. Шабозов. *Поперечники некоторых классов аналитических функций в пространстве Харди H_2* // Мат. заметки **68**:5, 796–800 (2000).
23. М.Ш. Шабозов, К. Тухлиев. *Наилучшие полиномиальные приближения и поперечники некоторых функциональных классов в L_2* // Мат. заметки **94**:6, 908–917 (2013).
24. М.Ш. Шабозов, М.С. Саидусайнов. *Значения n–поперечников и наилучшие линейные методы приближения некоторых классов аналитических функций в весовом пространстве Бергмана* // Изв. ТулГУ. Естественные науки. **3**, 40–57 (2014).
25. М.Ш. Шабозов, Г.А. Юсупов. *Наилучшие методы приближения и значения поперечников некоторых классов функций в пространстве $H_{q,\rho}$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, $0 < \rho \leqslant 1$* // Сиб. мат. ж. **57**:2, 469–478 (2016).

26. М.Ш. Шабозов, М.С. Саидусайнов. *Среднеквадратичное приближение функций комплексной переменной рядами Фурье в весовом пространстве Бергмана* // Владикавказ. мат. ж. **20**:1, 86–97 (2018).
27. М.Ш. Шабозов, М.Р. Лангаршоев. *О наилучших линейных методах приближения некоторых классов аналитических в единичном круге функций* // Сиб. мат. ж. **60**:6, 1414–1423 (2019).
28. М.Ш. Шабозов, М.С. Саидусайнов. *Среднеквадратическое приближение функций комплексного переменного суммами Фурье по ортогональным системам* // Труды ИММ УрО РАН **25**:2, 258–272 (2019).
29. М.Ш. Шабозов, Н.У. Кадамшоев. *Точные неравенства между наилучшими среднеквадратическими приближениями аналитических в круге функций и некоторыми характеристиками гладкости в пространстве Бергмана* // Мат. заметки **110**:2, 266–281 (2021).
30. М.Ш. Шабозов, М.С. Саидусайнов. *Верхние грани приближения некоторых классов функций комплексной переменной рядами Фурье в пространстве* L_2 *и значения* n*–поперечников* // Мат. заметки **103**:4, 656–668 (2018).
31. Ch. Horowitz. *Zeros of functions in Bergman Space* // Bull. Amer. Math. Soc. **80**:4, 713–714 (1974).
32. A. Pinkus. *n-Widths in Approximation Theory.* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, New-York, Tokyo. 1985.

Дилшод Камаридинович Тухлиев,
Худжандский государственный университет имени Б. Гафурова,
ул. Мавлонбекова, д. 1,
735700, г. Худжанд, Таджикистан
E-mail: dtukhliev@mail.ru