ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 17. № 4 (2025). С. 108-118.

УДК 517.984, 511.332

О НОВЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ ЗНАЧЕНИЙ ДЗЕТА–ФУНКЦИИ РИМАНА В НЕЧЕТНЫХ ТОЧКАХ И СВЯЗАННЫХ С НИМИ ЧИСЕЛ

Т.А. САФОНОВА, Б.Д. БАРМАК

Аннотация. Пусть $\zeta(s)$ и $\beta(s)$ — дзета–функция Римана и бета–функция Дирихле. В работе методами спектральной теории обыкновенных дифференциальных операторов, порождённых в гильбертовом пространстве $\mathcal{L}^2[0,\pi]$ выражением $l[y] = -y'' - a^2 y$, где a — параметр, и граничными условиями Дирихле, для некоторых определённых линейных комбинаций чисел $\zeta(2n+1)$ и $\beta(2n)$ получены новые представления в виде рядов, общий член которых содержит логарифмы. Из них, в частности, следуют хорошо известные и некоторые новые представления этих линейных комбинаций в виде сумм достаточно быстро сходящихся рядов, общий член которых содержит $\zeta(2n)$. Полученные результаты применяются к различным представлениям постоянных Каталана $\beta(2)$ и Апери $\zeta(3)$.

Ключевые слова: дзета–функция Римана, бета-функция Дирихле, постоянные Каталана и Апери.

Mathematics Subject Classification: 34L10, 33E20

1. Введение

Пусть, как обычно, $\zeta(s)$ — дзета–функция Римана, определяемая при $\operatorname{Re} s > 1$ равенством

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s}.$$

Следуя [7, гл. 23], символами $\beta(s)$, $\lambda(s)$ и $\eta(s)$ обозначим родственные с $\zeta(s)$ функции Дирихле, определяемые при $\operatorname{Re} s > 0$, $\operatorname{Re} s > 1$ и $\operatorname{Re} s > 0$ соответственно равенствами

$$\beta(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^s}, \qquad \lambda(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^s}, \qquad \eta(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^s}. \tag{1.1}$$

Хорошо известно, что

$$\lambda(s) = (1-2^{-s})\zeta(s), \qquad \eta(s) = (1-2^{1-s})\zeta(s) \tag{1.2}$$

и

$$\zeta(2n) = \frac{(-1)^{n-1}(2\pi)^{2n}}{2(2n)!} B_{2n}, \qquad \beta(2n-1) = \frac{(-1)^{n-1}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n-1}}{2(2n-2)!} E_{2(n-1)}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

T.A. Safonova, B.D. Barmak, On new representations for values of Riemann zeta function at odd points and related numbers.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ в рамках научного проекта № 24-21-00128.
Поступила 5 мая 2025 г.

где B_n и E_n — числа Бернулли и Эйлера соответственно (см., напр., [7, гл. 23, формулы 23.2.20, 23.2.19, 23.2.16 и 23.2.22]. Из этих равенств следует, что числа $\zeta(2n)$ и $\beta(2n+1)$ являются трансцендентными. Однако различные известные представления для чисел $\zeta(2n+1)$, $\beta(2n)$, $\lambda(2n+1)$ и $\eta(2n-1)$ при $n=1,2,\dots$ или их определённых комбинаций, например, интегральные представления

$$\zeta(2n+1)=\frac{(-1)^{n+1}(2\pi)^{2n+1}}{2(2n+1)!}\int\limits_0^1 B_{2n+1}(x)\operatorname{ctg}(\pi x)\,dx \tag{1.3}$$

и

$$\beta(2n)=\frac{(-1)^n\pi^{2n}}{4(2n-1)!}\int\limits_0^1 \frac{E_{2n-1}(x)}{\cos(\pi x)}\,dx, \tag{1.4}$$

уже ставшие классическими (см., напр., [7, гл. 23, формулы 23.2.17 и 23.2.23]), и сравнительно недавние

$$\lambda(2n+1)=\frac{(-1)^n\pi^{2n+1}}{4(2n)!}\int\limits_0^1 \frac{E_{2n}(x)}{\sin(\pi x)}\,dx \tag{1.5}$$

и

$$\eta(2n-1)=\frac{(-1)^n(2\pi)^{2n-1}}{2(2n-1)!}\int\limits_0^1 B_{2n-1}(x)\operatorname{tg}(\pi x)\,dx \tag{1.6}$$

(см. [10, теорема 1]), не позволяют судить об арифметической природе этих чисел, и об этом мало что известно. В частности, по этой причине отыскание представлений этих чисел или их комбинаций в виде интегралов, рядов и др. представляет особый интерес, а литература, посвящённая этой тематике, весьма обширна (см., напр., работы [10], [11], [15], [9] и цитируемую в них литературу).

В п. 2 настоящей работе приведены предварительные сведения, используемые в установлении справедливости основных результатов настоящей работы (п.п. 3 – 6), в которых сформулированы утверждения о новых представлениях некоторых определённых линейных комбинаций чисел $\zeta(2n+1)$, $\beta(2n)$, $\lambda(2n+1)$ и $\eta(2n-1)$ в виде рядов, общий член которых содержит логарифмы (теорема 3.1 и следствия 4.1–5.1 из неё) и сумм достаточно быстро сходящихся рядов, общий член которых содержит $\zeta(2n)$ (следствия 6.1 и 6.2).

На протяжении всей работы особое внимание уделяется вопросам применения полученных результатов к различным представлениям постоянных Каталана $\beta(2)$ $(=: G)$ и Апери $\zeta(3)$.

2. Предварительные сведения

Как и в работах [2] и [3] рассмотрим дифференциальный оператор, порождённый выражением

$$l[y]=-y''-a^2y,\qquad -1<a<1,$$

и граничными условиями Дирихле $y(0)=y(\pi)=0$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{L}^2[0,\pi]$ — пространстве всех классов попарно п.в. равных между собой комплекснозначных измеримых функций y, таких, что $|y|^2$ интегрируема по Лебегу на $[0,\pi]$. Используя метод спектральной теории для него, в упомянутых выше работах, в частности, получены интегральные представления для последовательностей чисел

$$\mathcal{A}_m=\pi^{2m}\left(\sum_{n=1}^m\frac{(-1)^{m-n}}{2^{2(m-n)}(2m-2n)!}\frac{\beta(2n)}{\pi^{2n}}\right),$$

$$\mathcal{B}_m = \pi^{2m+1}\left(\sum_{n=1}^{m}\frac{(-1)^{m-n}}{2^{2(m-n)+1}(2m-2n+1)!}\frac{\beta(2n)}{\pi^{2n}} - \frac{\lambda(2m+1)}{\pi^{2m+1}}\right),$$
$$\mathcal{C}_m = \pi^{2m}\left(\sum_{n=1}^{m}\frac{(-1)^{m-n}}{(2m-2n+1)!}\frac{\eta(2n-1)}{\pi^{2n-1}}\right),$$
$$\mathcal{D}_m = \pi^{2m+1}\left(\sum_{n=1}^{m}\frac{(-1)^{m-n}}{(2m-2n+2)!}\frac{\eta(2n-1)}{\pi^{2n-1}} - \frac{2^{2m+1}-1}{2^{2m}}\frac{\zeta(2m+1)}{\pi^{2m+1}}\right)$$

при $m = 1, 2, \ldots$, а именно, в работе [2, следствие 1] установлена справедливость следующей теоремы.

Теорема 2.1. *При $m = 1, 2, \ldots$ справедливы следующие равенства*

$$\mathcal{A}_m = \frac{(-1)^{m-1}}{2(2m-1)!}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x^{2m-1}}{\sin x}\,dx, \tag{2.1}$$

$$\mathcal{B}_m = \frac{(-1)^{m-1}}{2(2m)!}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x^{2m}}{\sin x}\,dx, \tag{2.2}$$

$$\mathcal{C}_m = \frac{(-1)^{m-1}2^{2m-1}}{(2m)!}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x^{2m}}{\sin^2 x}\,dx \tag{2.3}$$

$$\mathcal{D}_m = \frac{(-1)^{m-1}2^{2m}}{(2m+1)!}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x^{2m+1}}{\sin^2 x}\,dx. \tag{2.4}$$

Из этой теоремы, в частности, следует справедливость следующих известных равенств для чисел G, $\lambda(3)$, $\eta(1)(=\ln 2)$, $\eta(3)$ и $\zeta(3)$

$$G = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{\sin x}\,dx, \qquad \lambda(3) = \frac{\pi}{2}G - \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x^2}{\sin x}\,dx, \qquad \eta(1) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x^2}{\sin^2 x}\,dx,$$

$$\eta(3) = \frac{\pi^2}{6}\ln 2 - \frac{1}{3\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x^4}{\sin^2 x}\,dx, \qquad \zeta(3) = \frac{2\pi^2}{7}\ln 2 - \frac{8}{21}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x^3}{\sin^2 x}\,dx$$

(формулы для G, $\eta(1)$ и $\eta(3)$ приведены, например, в [4, гл. 2, п.2.5.4, формулы 5 и 7], а формула для $\lambda(3)$ следует из одного тождества Рамануджана (см. [8, entry 14, p. 261]).

Отметим, что все эти равенства, кроме равенства для $\eta(3)$, являются частными случаями равенств (1.3)–(1.6) при $n = 1$, а тождество для $\eta(3)$ следует из (1.6) при $n = 2$.

3. Основная теорема

Используя разложения

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} + 2x\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{x^2-(\pi k)^2}, \qquad \operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} + 2x\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{x^2-(\pi k)^2} \tag{3.1}$$

(см., напр., [16, формулы 4.22.5 и 4.22.3]), докажем, что справедливо следующее утверждение.

Лемма 3.1. *При $j = 1, 2, \ldots$ справедливы равенства*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^j}{\sin x}\,dx = \left(\frac{\pi}{2}\right)^j \left(\frac{1}{j} - 2\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k \int_0^1 \frac{u^{j+1}}{(2k)^2 - u^2}du\right) \tag{3.2}$$

и

$$\frac{1}{j+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^{j+1}}{\sin^2 x}\,dx = \left(\frac{\pi}{2}\right)^j \left(\frac{1}{j} - 2\sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^1 \frac{u^{j+1}}{(2k)^2 - u^2}du\right). \tag{3.3}$$

Доказательство. Заметив

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^j}{\sin x}\,dx = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{j+1} \int_0^1 \frac{x^j}{\sin\frac{\pi x}{2}}\,dx,$$

заменив x на $\dfrac{\pi x}{2}$ в первом тождестве из (3.1), умножив затем обе части на x^j и интегрируя полученное равенство в пределах от 0 до 1, находим, что

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^j}{\sin x}\,dx = \left(\frac{\pi}{2}\right)^j \left(\frac{1}{j} + 2\int_0^1 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}x^{j+1}}{(2k)^2 - x^2}\,dx\right).$$

Абсолютная величина общего члена ряда, стоящего под знаком интеграла, при $0 \leqslant x \leqslant 1$ и $k = 1, 2, \ldots$ удовлетворяет, очевидно, неравенству

$$\frac{x^{j+1}}{(2k)^2 - x^2} \leqslant \frac{1}{(2k)^2 - 1}.$$

Отсюда следует, что этот функциональный ряд сходится абсолютно и равномерно на $[0, 1]$, поэтому его можно почленно интегрировать, т.е. справедливо равенство (3.2).

Справедливость равенства (3.3) доказывается аналогично, с той лишь разницей, что следует исходить из равенства

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^j}{\sin^2 x}\,dx = j\left(\frac{\pi}{2}\right)^j \int_0^1 x^{j-1} ctg\frac{\pi x}{2}\,dx$$

и учесть второе тождество из (3.1). Лемма 3.1 доказана. □

Отметим далее, что интегралы из правых частей равенств (3.2) и (3.3) явно вычисляются, а именно, при $m = 1, 2, \ldots$ для них справедливы формулы

$$\int_0^1 \frac{u^{2m}}{(2k)^2 - u^2}du = -\frac{1}{2}\left((2k)^{2m-1}\ln\frac{2k-1}{2k+1} + 2\sum_{l=0}^{m-1}\frac{(2k)^{2l}}{2m-2l-1}\right) \tag{3.4}$$

и

$$\int_0^1 \frac{u^{2m+1}}{(2k)^2 - u^2}du = -\frac{1}{2}\left((2k)^{2m}\ln\left(1 - \frac{1}{(2k)^2}\right) + \sum_{l=0}^{m-1}\frac{(2k)^{2l}}{m-l}\right) \tag{3.5}$$

(см., напр., [4, гл. 1, п. 1.2.10, формулы 9 и 10]).

Применяя теперь формулы (3.2)–(3.5) в равенствах (2.1)–(2.4) теоремы 2.1, находим, что справедлива следующая теорема.

Теорема 3.1. *При* $m = 1, 2, \ldots$ *справедливы равенства*

$$\mathcal{A}_m = \frac{(-1)^{m-1}\pi^{2m-1}}{4^m(2m-1)!} \cdot \left(\frac{1}{2m-1} + \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\left((2k)^{2m-1}\ln\frac{2k-1}{2k+1} + 2\sum_{l=0}^{m-1}\frac{(2k)^{2l}}{2m-2l-1}\right)\right), \tag{3.6}$$

$$\mathcal{B}_m = \frac{(-1)^{m-1}\pi^{2m}}{4^m 2(2m)!} \cdot \left(\frac{1}{2m} + \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\left((2k)^{2m}\ln\left(1-\frac{1}{(2k)^2}\right) + \sum_{l=0}^{m-1}\frac{(2k)^{2l}}{m-l}\right)\right), \tag{3.7}$$

$$\mathcal{C}_m = \frac{(-1)^{m-1}\pi^{2m-1}}{(2m-1)!} \cdot \left(\frac{1}{2m-1} + \sum_{k=1}^{+\infty}\left((2k)^{2m-1}\ln\frac{2k-1}{2k+1} + 2\sum_{l=0}^{m-1}\frac{(2k)^{2l}}{2m-2l-1}\right)\right), \tag{3.8}$$

$$\mathcal{D}_m = \frac{(-1)^{m-1}\pi^{2m}}{(2m)!}\left(\frac{1}{2m} + \sum_{k=1}^{+\infty}\left((2k)^{2m}\ln\left(1-\frac{1}{(2k)^2}\right) + \sum_{l=0}^{m-1}\frac{(2k)^{2l}}{m-l}\right)\right). \tag{3.9}$$

Отметим, что равенство (3.6) было получено нами ранее в работе [5], а равенства (3.7)–(3.9), насколько нам известно, являются новыми.

4. О постоянных Каталана, Апери и $\ln 2$

Теорема 3.1 позволяет представить постоянные $\zeta(3)$, G, $\lambda(3)$, $\eta(3)$ и $\ln 2$ в виде рядов, общий член которых содержит логарифмы, а именно, полагая $m = 1$ в равенствах (3.6)–(3.9) и $m = 2$ в (3.8), приходим к справедливости следующих следствий из неё.

Следствие 4.1. *Справедливы равенства*

$$G = \frac{\pi}{4}\left(1 + 2\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\left(1 + k\ln\frac{2k-1}{2k+1}\right)\right), \tag{4.1}$$

$$\lambda(3) = \frac{\pi}{2}G - \frac{\pi^2}{32}\left(1 + 2\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\left(1 + 4k^2\ln\left(1-\frac{1}{4k^2}\right)\right)\right), \tag{4.2}$$

$$\ln 2 = 1 + 2\sum_{k=1}^{+\infty}\left(1 + k\ln\frac{2k-1}{2k+1}\right), \tag{4.3}$$

$$\eta(3) = \frac{\pi^2}{6}\ln 2 - \frac{\pi^2}{18}\left(1 + 2\sum_{k=1}^{+\infty}\left(1 + 12k^2 + 12k^3\ln\frac{2k-1}{2k+1}\right)\right), \tag{4.4}$$

$$\zeta(3) = \frac{2\pi^2}{7}\ln 2 - \frac{\pi^2}{7}\left(1 + 2\sum_{k=1}^{+\infty}\left(1 + 4k^2\ln\left(1-\frac{1}{4k^2}\right)\right)\right). \tag{4.5}$$

Следствие 4.2. *Справедливы равенства*

$$2\pi G - \frac{7}{2}\zeta(3) = \frac{\pi^2}{8}\left(1 + 2\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\left(1 + 4k^2\ln\left(1-\frac{1}{4k^2}\right)\right)\right)$$

и

$$2\pi G - \frac{35}{8}\zeta(3) = -\frac{\pi^2}{4}\ln 2 + \frac{\pi^2}{4}\left(1 + 2\sum_{k=1}^{+\infty}\left(1 + 16k^2\ln\left(1 - \frac{1}{16k^2}\right)\right)\right).$$

Доказательство. Справедливость первого равенства немедленно следует из (4.2), если в нём учесть первое соотношение из (1.2). Если же из из обеих частей полученного равенства вычесть равенство (4.5), умноженное на $\frac{7}{8}$, то приходим к справедливости второго равенства. Следствие 4.2 доказано. □

Отметим далее, что частичные суммы S_{2m} и $\overline{S}_{2m}$ рядов, стоящих в правых частях равенств (4.1) и (4.2), запишутся, соответственно, в виде

$$S_{2m} = \sum_{k=1}^{2m}(-1)^k k\ln\frac{2k-1}{2k+1} \qquad \text{и} \qquad \overline{S}_{2m} = 4\sum_{k=1}^{2m}(-1)^k k^2\ln\left(1 - \frac{1}{4k^2}\right).$$

Вычисляя пределы частичных сумм S_{2m} и $\overline{S}_{2m}$ при $m \to +\infty$, приходим к справедливости следующего утверждения.

Следствие 4.3. *Справедливы равенства*

$$G = \frac{\pi}{4}\left(1 + 2\lim_{m\to+\infty}\sum_{k=1}^{2m}(-1)^k k\ln\frac{2k-1}{2k+1}\right)$$

и

$$\lambda(3) = \frac{\pi}{2}G - \frac{\pi^2}{32}\left(1 + 8\lim_{m\to+\infty}\sum_{k=1}^{2m}(-1)^k k^2\ln\left(1 - \frac{1}{4k^2}\right)\right).$$

Заметим, что если в интеграле, стоящем в правой части равенства (2.1), при $m = 1$ сделать замену $x = \frac{\pi}{2} - t$, в полученном интеграле учесть разложение

$$\frac{1}{\cos x} = 4\pi\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}(2k-1)}{(\pi(2k-1))^2 - (2x)^2}$$

(см., напр., [1, п. 1.422, формула 1]), проинтегрировать почленно полученный при этом ряд и вычислить возникающий интеграл от дробно–рациональной функции, то можно установить справедливость следующей цепочки равенств

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{\pi}{2}-x}{\cos x}\,dx &= \pi\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}(2k-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x-\frac{\pi}{2}}{x^2 - \left(\frac{\pi}{2}(2k-1)\right)^2}\,dx\\
&= \pi\left(\ln 2 + \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k(2k+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x-\frac{\pi}{2}}{x^2 - \left(\frac{\pi}{2}(2k+1)\right)^2}\,dx\right)\\
&= \pi\left(\ln 2 + \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\left(k\ln\frac{2k}{2k+1} + (k+1)\ln\frac{2k+2}{2k+1}\right)\right)\\
&= \pi\left(\ln 2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k(2k+1)\ln\left(1 - \frac{1}{(2k+1)^2}\right) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\ln\frac{k+1}{k}\right)
\end{aligned}$$

и, следовательно, согласно (2.1) при $m = 1$ следующего равенства для постоянной Каталана

$$G = \frac{\pi}{2}\left(\ln 2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k(2k+1)\ln\left(1 - \frac{1}{(2k+1)^2}\right) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k \ln\frac{k+1}{k}\right).$$

Далее, применяя формулу Валлиса, получим, что

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k \ln\frac{k+1}{k} = -\ln\prod_{n=1}^{+\infty}\frac{4n^2}{(2n-1)(2n+1)} = -\ln\frac{\pi}{2}.$$

Таким образом,

$$G = \frac{\pi}{4}\left(\ln\frac{8}{\pi} + \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k(2k+1)\ln\left(1 - \frac{1}{(2k+1)^2}\right)\right). \tag{4.6}$$

Это равенство принадлежит Рамануджану (см. [13]), а равенства из перечисленных выше следствий были приведены нами ранее в работах [5] и [6].

В заключении этого параграфа отметим, что из теоремы 3.1, очевидно, можно получить утверждение, аналогичное утверждению следствия 4.1 для произвольного m. Однако формулы, которые при этом получаются, являются громоздкими, и здесь мы ограничимся приведением только одной из них. Полагая $m = 2$ в равенстве (3.6), находим, что

$$\beta(4) = \frac{\pi^2}{8}G - \frac{\pi^3}{288}\left(1 + 2\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\left(1 + 12k^2 + 12k^3\ln\frac{2k-1}{2k+1}\right)\right).$$

Используя это равенство и равенство (4.4) и учитывая, что $\eta(3) = \dfrac{3\zeta(3)}{4}$ (см. второе равенство из (1.2) при $s = 3$), получаем

$$\frac{9G}{\pi} - \frac{72\beta(4)}{\pi^3} - \frac{27\zeta(3)}{8\pi^2} + \frac{3\ln 2}{4} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(12(2k)^3\ln\frac{4k-1}{4k+1} + 12(2k)^2 + 1\right)$$

и

$$\frac{9G}{\pi} - \frac{72\beta(4)}{\pi^3} + \frac{27\zeta(3)}{8\pi^2} - \frac{3\ln 2}{4} = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(12(2k+1)^3\ln\frac{4k+3}{4k+1} - 12(2k+1)^2 - 1\right).$$

5. Постоянные Каталана, Апери, ln 2 и бесконечные произведения

Равенства (4.1)–(4.5), очевидно, можно записать в несколько ином виде. А именно, справедливо следующее утверждение.

Следствие 5.1. *Справедливы равенства*

$$e^{\frac{G}{\pi}} = \frac{3\sqrt[4]{2}}{e}\prod_{k=1}^{+\infty}\left(e^{-1}\left(1 + \frac{2}{4k+1}\right)^{2k+1}\right), \tag{5.1}$$

$$e^{\frac{4G}{\pi} - \frac{35\zeta(3)}{4\pi^2}} = \sqrt{\frac{e}{2}}\prod_{k=1}^{+\infty}\left(e\left(1 - \frac{1}{(4k)^2}\right)^{(4k)^2}\right), \tag{5.2}$$

$$\sqrt{\frac{2}{e}} = \prod_{k=1}^{+\infty}\left(e^{-1}\left(1 + \frac{2}{2k-1}\right)^{k}\right), \tag{5.3}$$

$$e^{-\frac{9\eta(3)}{\pi^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{e}{2}}\prod_{k=1}^{+\infty}\left(e^{1+12k^2}\left(1-\frac{2}{2k+1}\right)^{12k^3}\right), \tag{5.4}$$

$$e^{-\frac{7\zeta(3)}{2\pi^2}} = \sqrt{\frac{e}{2}}\prod_{k=1}^{\infty}\left(e\left(1-\frac{1}{(2k)^2}\right)^{(2k)^2}\right). \tag{5.5}$$

Доказательство. Сначала установим справедливость равенства (5.1). Для этого обе части равенства (4.1) разделим на π, а обе части (4.3) — на 4 и, вычитая почленно из первого полученного равенства второе, находим, что

$$\frac{G}{\pi} = \frac{\ln 2}{4} + \sum_{k=0}^{+\infty}\left((2k+1)\ln\frac{4k+3}{4k+1} - 1\right).$$

Таким образом,

$$e^{\frac{G}{\pi}} = \sqrt[4]{2}\exp\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\left((2k+1)\ln\frac{4k+3}{4k+1}-1\right)\right) = \frac{3\sqrt[4]{2}}{e}\exp\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\left((2k+1)\ln\frac{4k+3}{4k+1}-1\right)\right),$$

т.е. равенство (5.1) справедливо. Далее, второе тождество из следствия 4.2 можно записать в виде

$$-\frac{35\zeta(3)}{4\pi^2} + \frac{4G}{\pi} + \frac{\ln 2}{2} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(1+(4k)^2\ln\left(1-\frac{1}{(4k)^2}\right)\right),$$

из которого следует справедливость равенства (5.2). Справедливость равенств (5.3)–(5.5) следует, очевидно, из справедливости (4.3)–(4.5). Следствие 5.1 доказано. □

Из равенства (4.1) следует также соотношение

$$\frac{G}{\pi} = \frac{1}{2} - \frac{\ln 2}{4} + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(1 + 2k\ln\frac{4k-1}{4k+1}\right),$$

т.е.

$$e^{\frac{G}{\pi}} = \frac{\sqrt{e}}{\sqrt[4]{2}}\prod_{k=1}^{+\infty}\left(e\left(1-\frac{2}{4k+1}\right)^{2k}\right). \tag{5.6}$$

Перемножение и возведение в квадрат равенств (5.1) и (5.6) приводит к соотношению

$$e\cdot e^{\frac{4G}{\pi}} = 9\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1+\frac{4}{4k-1}\right)\left(1-\frac{4}{(4k+1)^2}\right)^{4k+1},$$

напоминающему тождество Рамануджана

$$\pi\cdot e^{\frac{4G}{\pi}} = 8\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{(2k+1)^2}\right)^{(-1)^k(2k+1)}$$

(см. равенство (4.6)).

В заключении этого параграфа отметим, что в работе [12] приведены формулы разложения некоторых математических констант, включая числа $\sqrt{e}$, $e^{\frac{G}{\pi}}$, $e^{\frac{7\zeta(3)}{(4\pi^2)}}$ и др., в бесконечные произведения. Однако они получены другими методами и отличаются от приведённых выше формул. Отметим также, что некоторые из приведённых в этом параграфе формул в несколько ином виде были приведены нами ранее в работах [5] и [6].

6. Представления $\mathcal{A}_m$, $\mathcal{B}_m$, $\mathcal{C}_m$ и $\mathcal{D}_m$ в виде рядов, общий член которых содержит $\zeta(2n)$

Теорема 3.1 позволяет представить числовые последовательности $\mathcal{A}_m$, $\mathcal{B}_m$, $\mathcal{C}_m$ и $\mathcal{D}_m$ в виде сумм достаточно быстро сходящихся рядов, общий член которых содержит $\zeta(2n)$. А именно, справедливо следующее следствие из неё.

Следствие 6.1. *При $m = 1, 2, \dots$ справедливы равенства*

$$\mathcal{A}_m = \frac{(-1)^{m-1}}{(2m-1)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2m-1}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2^{2n}-2)\zeta(2n)}{16^n(2n+2m-1)}, \tag{6.1}$$

$$\mathcal{B}_m = \frac{(-1)^{m-1}}{(2m)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2m}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2^{2n-1}-1)\zeta(2n)}{16^n(n+m)}, \tag{6.2}$$

$$\mathcal{C}_m = \frac{(-1)^m 2\pi^{2m-1}}{(2m-1)!}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\zeta(2n)}{4^n(2n+2m-1)}, \tag{6.3}$$

$$\mathcal{D}_m = \frac{(-1)^m\pi^{2m}}{(2m)!}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\zeta(2n)}{4^n(n+m)}. \tag{6.4}$$

Доказательство. Сначала установим справедливость равенства (6.1). Если в правой части равенства (3.6) учесть известное разложение

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \qquad |x| < 1 \tag{6.5}$$

(см., напр., [4, п. 5.2.4, формула 8]), а затем поменять порядок суммирования, учтя определение эта–функции (см. третье равенство из (1.1)), для последовательности $\mathcal{A}_m$ получим следующую цепочку равенств

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_m =& \frac{(-1)^{m-1}}{2(2m-1)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2m-1}\\ &\cdot\left(\frac{1}{2m-1} + 2\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\left(\sum_{l=0}^{m-1}\frac{(2k)^{2l}}{2m-2l-1} - (2k)^{2m-1}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k)^{2n+1}(2n+1)}\right)\right)\\ =& \frac{(-1)^{m-1}}{2(2m-1)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2m-1}\left(\frac{1}{2m-1} + 2\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}\left(\sum_{n=m}^{+\infty}\frac{1}{(2k)^{2n-2m+2}(2n+1)}\right)\right)\\ =& \frac{(-1)^{m-1}}{2(2m-1)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2m-1}\left(\frac{1}{2m-1} + 2\sum_{n=m}^{+\infty}\frac{1}{2^{2n-2m+2}(2n+1)}\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^{2n-2m+2}}\right)\right)\\ =& \frac{(-1)^{m-1}}{2(2m-1)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2m-1}\left(\frac{1}{2m-1} + 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\eta(2n)}{4^n(2n+2m-1)}\right).\end{aligned}$$

Аналитическое продолжение функции $\zeta(s)$ на всю комплексную плоскость обладает тем свойством, что $\zeta(0) = -\dfrac{1}{2}$. Далее учитывая это и второе тождества из (1.2) в последнем равенстве, приходим к справедливости (6.1).

Справедливость равенств (6.2)–(6.4) доказывается аналогично, если исходить из равенств (3.7)–(3.9). При этом в правой части равенства (6.3) используется то же самое разложение (6.5), а в правых частях (3.7) и (3.9) вместо него нужно использовать разложение

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}, \qquad -1 \leqslant x < 1$$

(см., напр., [4, п. 5.2.4, формула 4]). Следствие 6.1 доказано. □

Взяв в равенствах (6.1)–(6.4) $m = 1$ и дополнительно $m = 2$ в (6.3), приходим к справедливости следующего утверждения для постоянных G, $\zeta(3)$, $\lambda(3)$, $\eta(3)$ и $\ln 2$.

Следствие 6.2. *Справедливы равенства*

$$G = \pi \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2^{2n-1}-1)\zeta(2n)}{16^n(2n+1)}, \tag{6.6}$$

$$\lambda(3) = \frac{\pi}{2}G - \frac{\pi^2}{8}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2^{2n-1}-1)\zeta(2n)}{16^n(n+1)} = \frac{\pi^2}{8}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2^{2n-1}-1)(2n+3)\zeta(2n)}{16^n(n+1)(2n+1)}, \tag{6.7}$$

$$\ln 2 = -2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\zeta(2n)}{4^n(2n+1)}, \tag{6.8}$$

$$\eta(3) = \frac{\pi^2}{6}\left(\ln 2 + 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\zeta(2n)}{4^n(2n+3)}\right), \tag{6.9}$$

$$\zeta(3) = \frac{2\pi^2}{7}\left(\ln 2 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\zeta(2n)}{4^n(n+1)}\right). \tag{6.10}$$

Отметим, что часть результатов, сформулированных нами в следствиях 6.1 и 6.2, хорошо известны и были получены ранее другими авторами. Например, равенства (6.3) и (6.4) другими методами были установлены в [14] (см. также [15, формулы 58 и 59]). Кроме того, все равенства следствий 6.1 и 6.2 методами, отличающихся от методов настоящей работы, были получены нами ранее в работе [2], и формулы (6.1) и (6.2), по–видимому, впервые появились там. Отметим также, что равенства (6.6)–(6.10) были приведены нами в [6].

В заключении отметим, что теорема 3.1 не охватывает известную формулу

$$\gamma = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k} - \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right),$$

где γ — постоянная Эйлера (см., напр.,[4, п.5.5.1, формула 15]), но содержит известную формулу (4.3) для $\ln 2$ (см., напр., [4, п.5.5.1, формула 21]). По–видимому, новые формулы (4.1)–(4.5) можно трактовать как продолжение этого списка. Таким образом, равенства следствия 6.2 показывают, что теорема 3.1 является обобщением равенств для γ и $\ln 2$ на случай последовательностей чисел $\mathcal{A}_m$, $\mathcal{B}_m$, $\mathcal{C}_m$ и $\mathcal{D}_m$.

Благодарности

Авторы выражают искреннюю благодарность профессору К.А. Мирзоеву за постоянное внимание к настоящей работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.* М.: ФИЗМАТЛИТ (1963).
2. К.А. Мирзоев, Т.А. Сафонова. *Представления $\zeta(2n+1)$ и связанных с ними чисел в виде определённых интегралов и быстро сходящихся рядов* // Докл. росс. акад. наук, мат. информ. процессы упр. **494**, 48–52 (2020).
3. К.А. Мирзоев, Т.А. Сафонова. *Вокруг теоремы Гаусса о значениях дигамма-функции Эйлера в рациональных точках* // Алгебра анал. **35**:2, 86–106 (2023).
4. А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. *Интегралы и ряды. В 3 т. Т.1. Элементарные функции.* М.: ФИЗМАТЛИТ (2002).
5. Т.А. Сафонова. *О новых представлениях значений бета-функции Дирихле в четных точках* // Мат. заметки **115**:5, 800–804 (2024).
6. Т.А. Сафонова. *О старых и новых формулах для постоянных Каталана и Апери* // Мат. заметки **117**:3, 470–474 (2025).
7. M. Abramowitz, I.A. Stegu. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables.* Dover Publ., New York (1972).
8. B.C. Berndt. *Ramanujann's Notebooks: Part I.* Springer Verlag, New York (1985).
9. D.M. Bradley. *Representations of Catalan's Constant* // Preprint: https://www.researchgate.net/publication/2325473 (2001).
10. D. Cvijović, J. Klinowski. *Integral representations of the Riemann zeta function for odd–integer arguments* // J. Comput. Appl. Math. **142**:2, 435–439 (2002).
11. S.R. Finch. *Mathematical constants.* Cambridge University Press, New York (2003).
12. J. Guillera, J. Sondow. *Double integrals and infinite products for some classical constants via analytic continuations of Lerch's transcendent* // Ramanujan J. **16**:3, 247–270 (2008).
13. S. Ramanujan. *On the integral* $\int\limits_0^x \frac{\tan^{-1} t}{t}dt$ // J. Indian Math. Soc. **7**, 93–96 (1915).
14. H.M. Srivastava, M.L. Glasser, V.S. Adamchik. *Some Definite Integrals Associated with the Riemann Zeta Function* // Z. Anal. Anwend. **19**:3, 831–846 (2000).
15. H.M. Srivastava. *The zeta and related functions: recent developments* // J. Adv. Eng. Comput. **3**:1, 329–354 (2019).
16. F.W.J. Olver, D.W. Lozier, R.F. Boisvert, Ch. W. Clark. *NIST Handbook of Mathematical Functions.* Cambridge, New York (2010).

Татьяна Анатольевна Сафонова,
Северный (Арктический) федеральный
университет имени М.В. Ломоносова,
ул. наб. Северной Двины, 17,
163002, г. Архангельск, Россия
E-mail: `t.Safonova@narfu.ru`

Белла Давидовна Бармак,
Северный (Арктический) федеральный
университет имени М.В. Ломоносова,
ул. наб. Северной Двины, 17,
163002, г. Архангельск, Россия

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова,
Ленинские горы, 1,
119991, г. Москва, Россия
E-mail: `barmakbella@mail.ru`