

УДК 517.58, 514.774

О МЕТРИЗУЕМОСТИ НЕКОТОРЫХ СПЕЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

С.В. АГАПОВ

Аннотация. Исследуются обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка, которым удовлетворяют следующие специальные функции: функция Бесселя, гипергеометрическая функция, эллиптическая функция Вейерштрасса. Доказано, что все эти уравнения являются метризуемыми, в явном виде построены соответствующие метрики. Доказано, что во всех вышеперечисленных случаях уравнения геодезических допускают линейный по импульсам первый интеграл.

Ключевые слова: геодезические, метризуемость, специальные функции, интегрируемость, первый интеграл.

Mathematics Subject Classification: 34B30, 53C22

1. ВВЕДЕНИЕ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассмотрим двумерную поверхность M с локальными координатами $u = (u^1, u^2)$ и римановой (псевдоримановой) метрикой $ds^2 = g_{ij}(u)du^i du^j$. Геодезическими этой метрики называются кривые, которые удовлетворяют системе дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\ddot{u}^k + \Gamma_{ij}^k \dot{u}^i \dot{u}^j = 0, \quad k = 1, 2, \quad (1.1)$$

здесь и в дальнейшем, как обычно, по повторяющимся индексам подразумевается суммирование,

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{il}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_l} \right)$$

— символы Кристоффеля, а g^{ij} — тензор, обратный к метрическому: $g^{ik} g_{kj} = \delta_j^i$.

Рассматривая одну из координат как функцию от другой вдоль геодезической, перепишем систему (1.1) в виде одного дифференциального уравнения второго порядка:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = A_3(x, y) \left(\frac{dy}{dx} \right)^3 + A_2(x, y) \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + A_1(x, y) \left(\frac{dy}{dx} \right) + A_0(x, y), \quad (1.2)$$

здесь $u^1 = x$, $u^2 = y$, а коэффициенты $A_j(x, y)$, $j = 0, \dots, 3$ имеют вид

$$A_3 = \Gamma_{22}^1, \quad A_2 = 2\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{22}^2, \quad A_1 = \Gamma_{11}^1 - 2\Gamma_{12}^2, \quad A_0 = -\Gamma_{11}^2. \quad (1.3)$$

Поиск римановых метрик на двумерных поверхностях, уравнения геодезических которых можно проинтегрировать в квадратурах, является классической задачей. Напомним известный критерий интегрируемости, который обычно формулируется на языке гамильтоновой механики.

S.V. AGAPOV, ON METRIZABILITY OF SOME SPECIAL FUNCTIONS.

© АГАПОВ С.В. 2025.

Статья подготовлена в результате проведения исследования в рамках Программы фундаментальных исследований Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» (НИУ ВШЭ).

Поступила 31 декабря 2024 г.

Как известно, геодезические удовлетворяют уравнениям Эйлера — Лагранжа

$$\frac{\partial L}{\partial u^k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}^k} \right) = 0, \quad k = 1, 2 \quad (1.4)$$

для лагранжиана $L = \frac{|\dot{u}|^2}{2} = \frac{g_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j}{2}$, то есть являются экстремальными функционала энергии $S = \int L dt$. Применив преобразование Лежандра $(u, \dot{u}) \rightarrow (u, p)$, где $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{u}}$ — сопряженные импульсы, перепишем (1.4) в виде гамильтоновой системы

$$\dot{u}^k = \{u^k, H\} = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = \{p_k, H\} = -\frac{\partial H}{\partial u^k}, \quad H = \frac{1}{2}g^{ij}p_i p_j, \quad k = 1, 2 \quad (1.5)$$

с канонической скобкой Пуассона: $\{u^i, u^j\} = \{p_i, p_j\} = 0$, $\{u^i, p_j\} = \delta_j^i$.

Первым интегралом гамильтоновой системы (1.5) называется любая функция $F(u, p)$, сохраняющаяся вдоль траекторий (1.5). Первый интеграл F удовлетворяет условию

$$\dot{F} = \{F, H\} = \frac{\partial F}{\partial u^k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial u^k} \equiv 0.$$

Гамильтониан H , очевидно, является первым интегралом (1.5). Если при этом существует дополнительный функционально независимый с H почти всюду первый интеграл F , то геодезический поток (1.5) называется *вполне интегрируемым*: в этом случае по теореме Арнольда — Лиувилля уравнения геодезических можно проинтегрировать в квадратурах [2]. Поискам первых интегралов посвящено огромное число работ; основное внимание при этом уделено полиномиальным интегралам, см., например, работы [3]–[6], [10], [19] и ссылки в них. Известно, например, что интегрируемые метрики с дополнительным линейным или квадратичным первым интегралом в подходящей локальной системе координат имеют вид:

$$\begin{aligned} 1) \quad ds^2 &= f(x)(dx^2 + dy^2), \quad F_1 = p_2, \\ 2) \quad ds^2 &= (f(x) + g(y))(dx^2 + dy^2), \quad F_2 = \frac{gp_1^2 - fp_2^2}{f + g}, \end{aligned} \quad (1.6)$$

здесь $f(x), g(y)$ — произвольные функции. Отметим, что даже при наличии дополнительного интеграла непосредственное интегрирование уравнений геодезических представляет собой отдельную и, вообще говоря, сложную задачу. В подавляющем же большинстве случаев уравнения геодезических не являются полиномиально интегрируемыми (см., например, [15]).

К задаче об интегрируемых геодезических потоках и их первых интегралах можно подойти иным путем. Уравнения вида (1.2) с подходящими коэффициентами A_j встречаются в самых разных задачах математической физики, их решениями часто являются различные специальные функции [8]. Зададимся вопросом о том, существуют ли двумерные метрики, геодезические которых удовлетворяют соответствующему уравнению (1.2) для какой-то *заранее фиксированной* специальной функции. В случае положительного ответа получим, вообще говоря, целое семейство метрик (см. детали ниже), уравнения геодезических которых интегрируются в терминах выбранной специальной функции. В целом, насколько нам известно, вопрос о метризуемости уравнений, имеющих вид (1.2) и представляющих непосредственный интерес в математической физике, начал активно исследоваться совсем недавно (см. [1], [9], [13]).

Понятно, что не любое уравнение вида (1.2) задает геодезические некоторой метрики: соответствующий критерий метризуемости был получен в [16] (см. также [11]). Он состоит в следующем. Рассмотрим систему линейных уравнений в частных производных на

функции $\psi_j(x, y)$, $j = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned}(\psi_1)_x &= \frac{2}{3}A_1\psi_1 - 2A_0\psi_2, \\(\psi_3)_y &= 2A_3\psi_2 - \frac{2}{3}A_2\psi_3, \\(\psi_1)_y + 2(\psi_2)_x &= \frac{4}{3}A_2\psi_1 - \frac{2}{3}A_1\psi_2 - 2A_0\psi_3, \\(\psi_3)_x + 2(\psi_2)_y &= 2A_3\psi_1 - \frac{4}{3}A_1\psi_3 + \frac{2}{3}A_2\psi_2.\end{aligned}\tag{1.7}$$

Если эта система имеет такое решение, что $\Delta = \psi_1\psi_3 - \psi_2^2 \neq 0$, то уравнение (1.2) задает геодезические метрики

$$ds^2 = \frac{(\psi_1 dx^2 + 2\psi_2 dx dy + \psi_3 dy^2)}{\Delta^2}$$

и выполнены соотношения (1.3). В этом случае будет говорить, что уравнение (1.2) метризуемо.

Система (1.7) обладает следующими замечательными свойствами.

- 1) Пространство решений системы (1.7), то есть пространство соответствующих метрик, является конечномерным векторным пространством. Геодезические этих метрик удовлетворяют одному и тому же уравнению (1.2), то есть совпадают как непараметризованные кривые. Такие метрики называются *геодезически эквивалентными* (в англоязычной литературе обычно используется термин *projectively equivalent*), они исследовались в различных работах (см., например, [7], [12]). Давно известно, что размерность пространства геодезически эквивалентных метрик не превосходит 6 [17].
- 2) Если размерность пространства решений (1.7) больше 3, то геодезический поток любой из соответствующих метрик обязательно допускает линейный по импульсам первый интеграл ([14], см. также [18], [20]).

В [1] исследовался вопрос о метризуемости уравнения Шредингера

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - u(x)y = 0.\tag{1.8}$$

Там же доказано, что в случае конечнозонного потенциала $u(x)$ метрика и геодезические находятся в явном виде в терминах функции Бейкера — Ахиезера.

В данной работе мы исследуем уравнение вида

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + f(x)\frac{dy}{dx} + g(x)y = 0,\tag{1.9}$$

которому, как известно, удовлетворяют многие специальные функции (при подходящем выборе $f(x)$, $g(x)$). Наши основные результаты заключаются в следующем.

Теорема 1.1 (Функция Бесселя). *Уравнение (1.9) при*

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad g(x) = \frac{x^2 - \alpha^2}{x^2}, \quad \alpha \in \mathbb{R},\tag{1.10}$$

является метризуемым. А именно, имеется 6-параметрическое семейство двумерных метрик, геодезические которых удовлетворяют (1.9), (1.10) и обладают линейным по импульсам первым интегралом.

Теорема 1.2 (Гипергеометрическая функция). *Уравнение (1.9) при*

$$f(x) = \frac{c - (a + b + 1)x}{x(1 - x)}, \quad g(x) = -\frac{ab}{x(1 - x)}, \quad a, b, c \in \mathbb{R},\tag{1.11}$$

является метризуемым. А именно, имеется 6-параметрическое семейство двумерных метрик, геодезические которых удовлетворяют (1.9), (1.11) и обладают линейным по импульсам первым интегралом.

Рассмотрим также уравнение вида

$$\frac{d^2y}{dx^2} = ay^2 + by + c, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad (1.12)$$

которому, в частности, удовлетворяет эллиптическая функция Вейерштрасса. Имеет место

Теорема 1.3 (Эллиптическая функция Вейерштрасса). *Уравнение (1.12) является метризуемым. А именно, имеется 2-параметрическое семейство двумерных метрик, геодезические которых удовлетворяют (1.12) и обладают линейным по импульсам первым интегралом. При этом имеется еще один трансцендентный интеграл, то есть геодезический поток является суперинтегрируемым.*

2. ФУНКЦИЯ БЕССЕЛЯ

Доказательство теоремы 1.1. Функция Бесселя [8] удовлетворяет уравнению

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - \alpha^2)y = 0, \quad (2.1)$$

здесь $\alpha \in \mathbb{R}$ — произвольный параметр, который называется порядком. Для уравнения (2.1) имеем

$$A_3 = A_2 = 0, \quad A_1 = -\frac{1}{x}, \quad A_0 = -\frac{x^2 - \alpha^2}{x^2}y$$

и, следовательно, система (1.7) принимает вид

$$\begin{aligned} (\psi_1)_x + \frac{2}{3x}\psi_1 + \frac{2y(\alpha^2 - x^2)}{x^2}\psi_2 &= 0, & (\psi_3)_y &= 0, \\ (\psi_1)_y + 2(\psi_2)_x - \frac{2}{3x}\psi_2 + \frac{2y(\alpha^2 - x^2)}{x^2}\psi_3 &= 0, & (\psi_3)_x + 2(\psi_2)_y - \frac{4}{3x}\psi_3 &= 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Отсюда немедленно следует, что $\psi_3(x, y) = l(x)$. Интегрируя четвертое уравнение системы (2.2), находим ψ_2 :

$$\psi_2(x, y) = \frac{2y}{3x}l(x) - \frac{y}{2}l'(x) + s(x),$$

где $s(x)$ — произвольная функция. Интегрируя третье уравнение (2.2), получим

$$\psi_1(x, y) = \frac{1}{18x^2} \{ 2y^2 (9x^2 - 9\alpha^2 + 8) l(x) + 3x(6x\gamma(x) + y(4s(x) - 5yl'(x) - 12xs'(x) + 3xyl''(x))) \},$$

где $\gamma(x)$ — произвольная функция. После этого первое уравнение (2.2) принимает вид

$$R_0(x) + R_1(x)y + R_2(x)y^2 = 0,$$

где

$$R_0 = 36x^2\gamma(x) + 54x^3\gamma'(x),$$

$$R_1 = -108x^3s''(x) - 36x^2s'(x) - 12x(9x^2 - 9\alpha^2 + 1)s(x),$$

$$R_2 = 27x^3l'''(x) - 27x^2l''(x) + 9x(12x^2 - 12\alpha^2 + 7)l'(x) - 4(9x^2 - 36\alpha^2 + 16)l(x).$$

Общее решение системы $R_0 = R_1 = R_2 = 0$ имеет вид:

$$\begin{aligned} \gamma(x) &= \frac{c_0}{x^{\frac{3}{2}}}, & s(x) &= x^{\frac{1}{3}} (c_1 J_\alpha(x) + c_2 Y_\alpha(x)), \\ l(x) &= x^{\frac{4}{3}} (c_3 J_\alpha^2(x) + c_4 J_\alpha(x) Y_\alpha(x) + c_5 Y_\alpha^2(x)), \end{aligned}$$

здесь $J_\alpha(x)$ и $Y_\alpha(x)$ — функции Бесселя соответственно первого и второго рода. Итак, все функции $\psi_1(x, y)$, $\psi_2(x, y)$, $\psi_3(x, y)$ найдены и, следовательно, искомые метрические коэффициенты восстанавливаются по формулам

$$g_{11} = \frac{\psi_1}{(\psi_1\psi_3 - \psi_2^2)^2}, \quad g_{12} = \frac{\psi_2}{(\psi_1\psi_3 - \psi_2^2)^2}, \quad g_{22} = \frac{\psi_3}{(\psi_1\psi_3 - \psi_2^2)^2}. \quad (2.3)$$

Коэффициенты метрики зависят от 6 произвольных параметров $c_0, \dots, c_5$. Таким образом, мы построили 6-параметрическое семейство геодезически эквивалентных метрик. Следовательно, геодезический поток любой метрики из этого семейства обладает линейным первым интегралом [14]. Теорема доказана. $\square$

Отметим, что в случае произвольных постоянных $c_0, \dots, c_5$ построенные метрические коэффициенты имеют достаточно громоздкий вид и, в отличие от метрики (1.6), в данном случае предъявить линейный первый интеграл в явном виде не так просто. Так, например, в частном случае $c_2 = c_4 = c_5 = 0$ имеем:

$$g_{11}(x, y) = \frac{c_0 + y(xJ_{\alpha-1}(x) - \alpha J_\alpha(x))(-2c_1 + c_3xyJ_{\alpha-1}(x) - c_3y\alpha J_\alpha(x))}{x^2(c_1^2 - c_0c_3)^2J_\alpha^4(x)},$$

$$g_{12}(x, y) = \frac{c_1 + c_3y\alpha J_\alpha(x) - c_3xyJ_{\alpha-1}(x)}{x(c_1^2 - c_0c_3)^2J_\alpha^3(x)}, \quad g_{22}(x, y) = \frac{c_3}{(c_1^2 - c_0c_3)^2J_\alpha^2(x)}.$$

Гауссова кривизна этой метрики равна нулю. Вообще, по всей видимости, при любых значениях параметров $c_0, \dots, c_5$ все построенные метрики являются плоскими.

3. ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ

Доказательство теоремы 1.2. Гипергеометрическая функция ${}_2F_1(a, b; c; x)$ [8] удовлетворяет уравнению

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + (c - (a+b+1)x)\frac{dy}{dx} - aby = 0, \quad (3.1)$$

здесь a, b, c — произвольные постоянные. Последовательно интегрируя второе, четвертое и третье уравнения системы (1.7), получим:

$$\psi_3(x, y) = l(x), \quad \psi_2(x, y) = \frac{2(c - (a+b+1)x)}{3x(1-x)}yl(x) - \frac{y}{2}l'(x) + s(x),$$

$$\psi_1(x, y) = \frac{y}{18x^2(1-x)^2} \{ 2y(2c(3+c) - 9abx - 4(a+b+4)cx + (2a^2 + 13ab + 2b^2 + 10a + 10b + 8)x^2)l(x) + 3x(x-1) \cdot (4s(x)(-c + x(a+b+1)) - 5y(-c + x(a+b+1))l'(x) + 3x(x-1)(yl''(x) - 4s'(x))) \} + \gamma(x).$$

Оставшееся уравнение (1.7) примет вид

$$R_0(x) + R_1(x)y + R_2(x)y^2 = 0.$$

Проинтегрировав соотношения $R_0 = R_1 = R_2 = 0$, получим

$$\begin{aligned}\gamma(x) &= d_0 x^{-\frac{2c}{3}} (x-1)^{-\frac{2(a+b+1-c)}{3}}, \\ s(x) &= (-1)^{-c} x^{-\frac{2c}{3}} (x-1)^{\frac{(a+b+1-c)}{3}} \{(-1)^c d_1 x_2^c F_1(a, b; c; x) \\ &\quad - d_2 x_2 F_1(1+a-c, 1+b-c; 2-c; x)\}, \\ l(x) &= (-1)^{-2c} x^{-\frac{2c}{3}} (x-1)^{4(a+b+1-c)/3} \{(-1)^{2c} d_3 x_2^{2c} F_1(a, b; c; x)^2 \\ &\quad - (-1)^c d_4 x_2^{1+c} F_1(a, b; c; x) {}_2F_1(1+a-c, 1+b-c; 2-c; x) \\ &\quad + d_5 x_2^2 F_1(1+a-c, 1+b-c; 2-c; x)^2\},\end{aligned}$$

здесь $d_0, \dots, d_5$ — произвольные постоянные.

Таким образом, все функции $\psi_1(x, y)$, $\psi_2(x, y)$, $\psi_3(x, y)$ найдены. Соответствующие метрические коэффициенты находятся по формулам (2.3) и, как и в случае функции Бесселя, имеют весьма громоздкий вид. В итоге получилось 6-параметрическое семейство геодезически эквивалентных метрик (по-видимому, плоских), откуда ввиду результатов, полученных в [14], следует наличие линейного интеграла. Теорема доказана. $\square$

4. ЭЛЛИПТИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ ВЕЙЕРШТРАССА

Эллиптическая функция Вейерштрасса $\wp(z)$ удовлетворяет уравнению [8]

$$(\wp')^2 = 4\wp^3 + g_2\wp^2 + g_1\wp + g_0,$$

где g_0, g_1, g_2 — произвольные постоянные. Дифференцируя это уравнение по z и упрощая, получим

$$\wp'' = 6\wp^2 + g_2\wp + \frac{g_1}{2}.$$

Доказательство теоремы 1.3. Для доказательства теоремы 1.3 исследуем вопрос о метризуемости уравнения чуть более общего вида:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = ay^2 + by + c, \quad (4.1)$$

где a, b, c — произвольные постоянные. Интегрируя систему (1.7), получим в итоге

$$\psi_1(x, y) = d_1 - \frac{d_0}{3} (2ay^2 + 3by + 6c) y, \quad \psi_2(x, y) = 0, \quad \psi_3(x, y) = d_0,$$

то есть, в силу (2.3),

$$\begin{aligned}g_{11} &= d_0^{-2} \left(d_1 - \frac{d_0}{3} (2ay^2 + 3by + 6c) y \right)^{-1}, & g_{12} &= 0, \\ g_{22} &= d_0^{-1} \left(d_1 - \frac{d_0}{3} (2ay^2 + 3by + 6c) y \right)^{-2}.\end{aligned} \quad (4.2)$$

здесь d_0, d_1 — произвольные постоянные. Гауссова кривизна K этой метрики равна

$$K = \frac{d_0^2}{3} (d_0(a^2 y^4 + 2aby^3 + 6acy^2 - 3c^2) - 3d_1(2ay + b)).$$

Перепишем уравнения геодезических метрики (4.2) в гамильтоновом виде (1.5). Поскольку компоненты метрики g_{ij} зависят только от y , координата x — циклическая и, следовательно, функция $F_1 = p_1$ наряду с гамильтонианом H является первым интегралом (1.5). Покажем, как спроецировать F_1 на первый интеграл уравнения (4.1). Воспользуемся обратным преобразованием Лежандра и выразим p_1, p_2 как функции от $x, y, \dot{x}, \dot{y}$. Функция $J = \frac{H}{F_1^2}$, очевидно, также является первым интегралом. Заменяя в J импульсы p_1, p_2 на

их выражения через скорости $\dot{x}$, $\dot{y}$ и пользуясь равенством $y_x = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$, получим в итоге автономный первый интеграл

$$I_1(x, y, y_x) = 3y_x^2 - 2ay^3 - 3by^2 - 6cy$$

уравнения (4.1).

Уравнение (4.1) допускает еще один первый интеграл. При его поиске мы будем следовать идеям, изложенным в [13], где рассматривалось похожее уравнение. По определению первый интеграл $I(x, y, u)$ уравнения (4.1) удовлетворяет соотношению

$$I_x + I_y u + I_u(ay^2 + by + c) = 0,$$

где $u = y_x$. Предположим, что $I = x + f(y, u)$. Тогда

$$uf_y + (ay^2 + by + c)f_u = -1.$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\frac{dy}{u} = \frac{du}{ay^2 + by + c} = \frac{df}{-1}.$$

Из первого равенства сразу следует, что $udu = (ay^2 + by + c)dy$, то есть

$$3y_x^2 - 2ay^3 - 3by^2 - 6cy = k_0,$$

где k_0 — произвольная постоянная (это в точности интеграл I_1 , построенный выше). С учетом этого, из равенства $udf = -dy$ следует, что

$$f = - \int \frac{dy}{\sqrt{\frac{k_0}{3} + \frac{2}{3}ay^3 + by^2 + 2cy}}.$$

Следовательно, первые интегралы уравнения (4.1) найдены в квадратурах и имеют вид:

$$I_1 = 3y_x^2 - 2ay^3 - 3by^2 - 6cy, \quad I_2 = x - \int \frac{dy}{\sqrt{\frac{I_1}{3} + \frac{2}{3}ay^3 + by^2 + 2cy}}.$$

Таким образом, геодезический поток метрики (4.2) является суперинтегрируемым.

Теорема 1.3 доказана. □

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор благодарен М.В. Дёминой за интерес к этой работе и полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. С.В. Агапов, А.Е. Миронов. *Конечнозонные потенциалы и интегрируемые уравнения геодезических на двумерной поверхности* // Тр. Мат. Инст. Стеклова **327**, 7–17 (2024).
2. В.И. Арнольд. *Математические методы классической механики*. М.: Наука. 1989.
3. Дж. Биркгоф. *Динамические системы*. М.-Л.: Гостехиздат. 1941.
4. А.В. Болсинов, В.С. Матвеев, А.Т. Фоменко. *Двумерные римановы метрики с интегрируемым геодезическим потоком. Локальная и глобальная геометрия* // Мат. сб. **189**:10, 5–32 (1998).
5. В.В. Козлов. *Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике*. Ижевск: Изд-во Удмуртского гос. ун-та. 1995.
6. В.Н. Колокольцов. *Геодезические потоки на двумерных многообразиях с дополнительным полиномиальным по скоростям первым интегралом* // Изв. Акад. Наук СССР., Сер. мат. **46**:5, 994–1010 (1982).
7. В.С. Матвеев, П.Ж. Топалов. *Геодезическая эквивалентность метрик как частный случай интегрируемости геодезических потоков* // Теор. мат. физ. **123**:2, 285–293 (2000).

8. M. Abramowitz, I.A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions With Formulas, Graphs and Mathematical Tables*. Wiley–Interscience Publication, New York (1972).
9. S.V. Agapov, M.V. Demina. *Integrable geodesic flows and metrisable second-order ordinary differential equations* // J. Geom. Phys. **199**, 105168 (2024).
10. E. Bour. *Sur l'integration des équations différentielles partielles du premier et du second ordre* // J. Ec. Polytech. **22**, 149–191 (1862).
11. R. Bryant, M. Dunajski, M. Eastwood. *Metrisability of two-dimensional projective structures* // J. Diff. Geom. **83**:3, 465–499 (2009).
12. U. Dini. *Sopra un problema che si presenta nella teoria generale delle rappresentazioni geografiche di una superficie su un'altra* // Brioschi Ann. (2) III, 269–294 (1869).
13. J. Giné, D.I. Sinelshchikov. *On the geometric and analytical properties of the anharmonic oscillator* // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. **131**, 107875 (2024).
14. G. Koenigs. *Sur les géodesiques a intégrales quadratiques. Note II from Darboux* // In: “Lecons sur la Théorie Générale des Surfaces”, Vol. 4. Chelsea Publishing, Vermont (1896).
15. B. Kruglikov, V.S. Matveev. *The geodesic flow of a generic metric does not admit nontrivial integrals polynomial in momenta* // Nonlinearity **29**:6, 1755–1768 (2016).
16. R. Liouville. *Sur une classe d'équations différentielles, parmi lesquelles, en particulier, toutes celles des lignes géodésiques se trouvent comprises* // C. R. Acad. Sci., Paris **105**, 1062–1064 (1887).
17. R. Liouville. *Sur les invariants de certaines équations différentielles et sur leurs applications* // J. de l'Ecole Polytechnique **59**, 7–76 (1889).
18. G. Manno, A. Vollmer. *Normal forms of two-dimensional metrics admitting exactly one essential projective vector field* // J. Math. Pures Appl. (9) **135**, 26–82 (2020).
19. F. Massieu. *Sur les intégrales algébriques des problèmes de mécanique*. Thèse doct. sci. math., Mallet Bachelier, Paris (1861).
20. V.S. Matveev. *Two-dimensional metrics admitting precisely one projective vector field* // Math. Ann. **352**:4, 865–909 (2012).

Сергей Вадимович Агапов,
 Национальный исследовательский университет
 «Высшая школа экономики»,
 Таллинская улица, 34,
 123458, г. Москва, Россия
 Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
 пр.-т акад. Коптюга, 4,
 630090, г. Новосибирск, Россия
 E-mail: agapov.sergey.v@gmail.com