

УДК 517.5

О ВЫРОЖДЕННЫХ РЕШЕНИЯХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ
УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ПЛОСКОСТИ

А.Б. ЗАЙЦЕВ

Аннотация. В работе исследуются условия, при которых решение эллиптического уравнения с частными производными второго порядка в единичном круге на плоскости будет вырожденным. Доказано, что всякое вырожденное решение является либо многочленом степени не больше 2, либо линейной комбинацией константы и логарифма от дробно-рационального выражения. При доказательстве основного результата используется разложение в ряд Тейлора вырожденного решения данного уравнения в произвольной точке и исследование зависимости коэффициентов полученного ряда от коэффициентов при членах более младших степеней того же ряда.

Ключевые слова: эллиптическое уравнение, вырожденная функция, якобиан.

Mathematics Subject Classification: 35C99, 35J15

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть

$$L = \bar{\partial}\partial_{\beta}, \quad (1.1)$$

где $\bar{\partial}$ — оператор Коши — Римана, а $\partial_{\beta} = \frac{\partial}{\partial x} + \beta i \frac{\partial}{\partial y}$, $\beta \neq \pm 1$ — ненулевое действительное число. В данной работе исследуются условия, при которых решение u уравнения

$$Lu = 0 \quad (1.2)$$

является вырожденным, т.е. множество его значений на комплексной плоскости не имеет внутренних точек.

Если $\beta = -1$, то уравнение (1.2) — уравнение Лапласа, а функции, удовлетворяющие ему — гармонические. Существует достаточно много вырожденных гармонических функций. В частности, действительная часть любой комплекснозначной гармонической функции является вещественнозначной гармонической функцией. Последнее свойство не распространяется на случай $\beta \neq -1$: в данном случае решение уравнения (1.2) может быть вещественнозначным в некоторой области только если оно является многочленом степени не больше 2 от переменных x и y .

Если $\beta = 1$, то уравнение (1.2) имеет вид $\bar{\partial}^2 u = 0$, а функции, удовлетворяющие данному уравнению, называются бианалитическими. Если бианалитическая функция является вырожденной, то она равна либо $A(e^{i\alpha}z + \bar{z}) + A_1$, либо $A(z - c)^{\gamma}(\bar{z} - \bar{c}) + A_1$, где A , A_1 , c , α , γ — константы, $\text{Im } \alpha = 0$, $|\gamma| = 1$ ([1, теорема 1.11]).

Из [2, теорема 5] следует, что если $\beta > 0$, $\beta \neq 1$, решение $u(z)$ уравнения (1.2) является многочленом степени больше 2, то функция $u(z)$ не может быть вырожденной.

A.B. ZAITSEV, ON DEGENERATE SOLUTIONS OF SECOND ORDER ELLIPTIC EQUATIONS IN PLANE.

© Зайцев А.Б. 2025.

Поступила 22 августа 2024 г.

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Введем следующие обозначения. Пусть

$$z_\beta = x + \frac{i}{\beta}y = \frac{\beta+1}{2\beta}z + \frac{\beta-1}{2\beta}\bar{z}.$$

Определим линейное отображение T_β плоскости $\mathbb{C}$ по формуле $T_\beta(z) = z_\beta$. Пусть функция $u(z)$ удовлетворяет уравнению (1.2) в области D . Тогда

$$u(z) = f(z) - f_\beta(z_\beta), \quad (2.1)$$

где функции f и f_β голоморфны в областях D и $T_\beta(D)$ соответственно. Обозначим через $I_u(z)$ якобиан отображения $u(z)$ в точке $z \in D$. Очевидно,

$$I_u(z) = \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right|^2 - \left| \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} \right|^2.$$

Если $I_u(z) = 0$ и выполняется равенство (2.1), то

$$\left| \frac{f'_\beta(z_\beta)}{f'(z)} - \frac{1+\beta}{2} \right| = \left| \frac{1-\beta}{2} \right| \quad (2.2)$$

([2, §2], соответствующие рассуждения при доказательстве теоремы 1 верны и при $\beta > 0$, $\beta \neq 1$).

Сформулируем основной результат работы.

Теорема 2.1. Пусть функция $u(z)$ удовлетворяет уравнению (1.2) в некоторой области D , $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0; \pm 1\}$, и является вырожденной. Тогда либо $u(z)$ — многочлен степени не больше 2, либо

$$u(z) = c_1 + c_2 \ln \frac{z - c}{z_\beta - T_\beta c},$$

где c , c_1 , c_2 — некоторые комплексные константы.

Для доказательства данной теоремы нам потребуются следующие леммы.

Лемма 2.1. В окрестности произвольной точки $c \in \mathbb{C}$ существует не более одного вырожденного решения уравнения (1.2) с заданными коэффициентами при одночленах степени не больше 3 тейлоровского разложения данного решения с центром в точке c при условии, что градиент данного решения в точке c не равен нулю.

Лемма 2.2. Пусть функция $u(z)$ удовлетворяет следующим условиям:

1. $u(z)$ является решением уравнения (1.2) в окрестности точки 0;
2. $u(z) = f(z) - f_\beta(z_\beta)$, где

$$f(z) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k, \quad f_\beta(z_\beta) = \sum_{k=1}^{\infty} c_{\beta,k} z_\beta^k, \quad c_1 \neq 0, \quad c_{\beta,1} \neq 0.$$

Тогда коэффициенты при одночленах степени не больше $n-1$ тейлоровского разложения функции $\ln \frac{f'_\beta(z_\beta)}{f'(z)}$ в окрестности точки 0 однозначно определяются коэффициентами c_k и $c_{\beta,k}$, $k = 1, 2, \dots, n$. Обратно, коэффициенты c_k , $k = 2, \dots, n$ и $c_{\beta,k}$, $k = 1, 2, \dots, n$ однозначно определяются коэффициентами при одночленах степени не больше $n-1$ тейлоровского разложения функции $\ln \frac{f'_\beta(z_\beta)}{f'(z)}$ в окрестности точки 0 и коэффициентом c_1 .

Лемма 2.3. Пусть $u(z) = f(z) - f_\beta(z_\beta)$ — вырожденное решение уравнения (1.2) в окрестности точки 0, и градиент функции $u(z)$ в точке 0 не равен 0. Тогда существует не более одной функции $\ln \frac{f'_\beta(z_\beta)}{f'(z)}$ с заданными коэффициентами при одночленах степени не больше 2 тейлоровского разложения данной функции с центром в точке 0.

Доказательство леммы 2.2. В окрестности точки 0 имеем $f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k z^{k-1}$, следовательно,

$$\begin{aligned} \ln f'(z) &= \ln c_1 + \ln \left(1 + \sum_{k=2}^{\infty} k \frac{c_k}{c_1} z^{k-1} \right) \\ &= \ln c_1 + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{l-1}}{l} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (k+1) \frac{c_{k+1}}{c_1} z^k \right)^l = \ln c_1 + \sum_{l=1}^{\infty} d_l z^l, \end{aligned}$$

где

$$d_1 = \frac{2c_2}{c_1}, \quad d_l = \frac{(l+1)c_{l+1}}{c_1} + \varepsilon_l, \quad l = 2, 3, \dots, \quad (2.3)$$

константы ε_l зависят только от коэффициентов $c_1, \dots, c_l$, $l = 2, 3, \dots$.

Используя аналогичные рассуждения получаем, что

$$\ln f'_\beta(z_\beta) = \ln c_{\beta,1} + \sum_{l=1}^{\infty} d_{\beta,l} z_\beta^l,$$

где

$$d_{\beta,1} = \frac{2c_{\beta,2}}{c_{\beta,1}}, \quad d_{\beta,l} = \frac{(l+1)c_{\beta,l+1}}{c_{\beta,1}} + \varepsilon_{\beta,l}, \quad l = 2, 3, \dots, \quad (2.4)$$

константы $\varepsilon_{\beta,l}$ зависят только от коэффициентов $c_{\beta,1}, \dots, c_{\beta,l}$, $l = 2, 3, \dots$.

Таким образом, в окрестности точки 0 имеем

$$\ln \frac{f'_\beta(z_\beta)}{f'(z)} = d_0 - \left(\sum_{l=1}^{\infty} d_l z^l \right) + \sum_{l=1}^{\infty} d_{\beta,l} z_\beta^l,$$

где $d_0 = \ln \frac{c_{\beta,1}}{c_1}$. Отсюда и из (2.3) и (2.4) следует что коэффициенты d_0 , d_k и $d_{\beta,k}$, $k = 1, 2, \dots, n-1$, однозначно определяются коэффициентами c_k и $c_{\beta,k}$, $k = 1, 2, \dots, n$, и обратно, коэффициенты c_k , $k = 2, \dots, n$ и $c_{\beta,k}$, $k = 1, 2, \dots, n$ однозначно определяются коэффициентами d_0 , c_1 , d_k и $d_{\beta,k}$, $k = 1, 2, \dots, n-1$. Лемма 2.2 доказана. $\square$

Доказательство леммы 2.1. Пусть $u(z)$ — вырожденное решение уравнения (1.2) в окрестности точки c и градиент $u(z)$ в точке c не равен нулю. Не ограничивая общности, предположим, что $c = 0$, и что в окрестности 0 тейлоровское разложение $u(z)$ имеет вид

$$u(z) = a_0 + x + \alpha y + \sum_{n=2}^{\infty} (a_n z^n + b_n z_\beta^n),$$

где α — некоторое действительное число.

С помощью элементарных вычислений получаем, что сумма одночленов третьей степени ряда Тейлора функции $I_u(z)$ в окрестности точки 0 равна

$$\begin{aligned} &4 \left(\operatorname{Re} a_4 + \frac{\operatorname{Re} b_4}{\beta} - \alpha (\operatorname{Im} a_4 + \operatorname{Im} b_4) + l_{30} \right) x^3 \\ &- 12 \left(\operatorname{Im} a_4 + \frac{\operatorname{Im} b_4}{\beta^2} + \alpha \left(\operatorname{Re} a_4 + \frac{\operatorname{Re} b_4}{\beta} \right) + l_{21} \right) x^2 y \\ &- 12 \left(\operatorname{Re} a_4 + \frac{\operatorname{Re} b_4}{\beta^3} - \alpha (\operatorname{Im} a_4 + \frac{\operatorname{Im} b_4}{\beta^2}) + l_{12} \right) x y^2 \\ &+ 4 \left(\operatorname{Im} a_4 + \frac{\operatorname{Im} b_4}{\beta^4} + \alpha \left(\operatorname{Re} a_4 + \frac{\operatorname{Re} b_4}{\beta^3} \right) + l_{03} \right) y^3, \end{aligned}$$

где числа l_{30} , l_{21} , l_{12} , l_{03} зависят только от коэффициентов α , a_2 , a_3 , b_2 , b_3 .

Если $u(z)$ — вырожденная функция, то $I_u(z) = 0$ в окрестности точки 0. Таким образом, имеем

$$\begin{cases} \operatorname{Re} a_4 + \frac{\operatorname{Re} b_4}{\beta} - \alpha (\operatorname{Im} a_4 + \operatorname{Im} b_4) + l_{30} = 0, \\ \alpha \left(\operatorname{Re} a_4 + \frac{\operatorname{Re} b_4}{\beta} \right) + \operatorname{Im} a_4 + \frac{\operatorname{Im} b_4}{\beta^2} + l_{21} = 0, \\ \operatorname{Re} a_4 + \frac{\operatorname{Re} b_4}{\beta^3} - \alpha \left(\operatorname{Im} a_4 + \frac{\operatorname{Im} b_4}{\beta^2} \right) + l_{12} = 0, \\ \alpha \left(\operatorname{Re} a_4 + \frac{\operatorname{Re} b_4}{\beta^3} \right) + \operatorname{Im} a_4 + \frac{\operatorname{Im} b_4}{\beta^4} + l_{03} = 0. \end{cases}$$

Мы получили систему линейных уравнений с неизвестными $\operatorname{Re} a_4, \operatorname{Re} b_4, \operatorname{Im} a_4, \operatorname{Im} b_4$. Ее определитель равен

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{\beta} & -\alpha & -\alpha \\ \alpha & \frac{\alpha}{\beta} & 1 & \frac{1}{\beta^2} \\ 1 & \frac{1}{\beta^3} & -\alpha & \frac{-\alpha}{\beta^2} \\ \alpha & \frac{\alpha}{\beta^3} & 1 & \frac{1}{\beta^4} \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{\beta^3} - \frac{1}{\beta} \right) (1 + \alpha^2) \left(\frac{1}{\beta^2} + \alpha^2 - \frac{1}{\beta^4} - \frac{\alpha^2}{\beta^2} \right) \\ = \left(\frac{1}{\beta^3} - \frac{1}{\beta} \right) (1 + \alpha^2) \left(\frac{1}{\beta^2} + \alpha^2 \right) \left(1 - \frac{1}{\beta^2} \right) \neq 0$$

так как $\beta \neq \pm 1$. Поэтому система имеет единственное решение относительно $\operatorname{Re} a_4, \operatorname{Re} b_4, \operatorname{Im} a_4, \operatorname{Im} b_4$, т.е. коэффициенты a_4 и b_4 однозначно находятся при заданных коэффициентах $\alpha, a_2, a_3, b_2, b_3$.

Далее — по индукции: пусть уже доказано что, все коэффициенты a_i и $b_i, i = 4, \dots, n-1$ ($n > 4$) однозначно определяются коэффициентами $\alpha, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$. Обозначим

$$f(z) = a_0 + \frac{1 + \alpha\beta i}{1 - \beta} z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k, \quad f_{\beta}(z_{\beta}) = \frac{\beta(1 + \alpha i)}{1 - \beta} z_{\beta} - \sum_{k=2}^{\infty} b_k z_{\beta}^k.$$

Тогда $u(z) = f(z) - f_{\beta}(z_{\beta})$. Так как $I_u(z) = 0$ в окрестности точки 0, имеем

$$\left| \frac{f'_{\beta}(z_{\beta})}{f'(z)} - \frac{1 + \beta}{2} \right| = \left| \frac{1 - \beta}{2} \right|$$

при всех окрестностях точки 0. Но тогда функция $\ln \frac{f'_{\beta}(z_{\beta})}{f'(z)}$, определенная и удовлетворяющая уравнению (1.2) в окрестности точки 0, также является вырожденной. Но тогда по лемме 2.2 полностью определены члены ряда Тейлора функции $\ln \frac{f'_{\beta}(z_{\beta})}{f'(z)}$ в окрестности точки 0 до третьей степени включительно. Так как функция $\ln \frac{f'_{\beta}(z_{\beta})}{f'(z)}$ также является вырожденным решением уравнения (1.2), по индукционному предположению однозначно определяются коэффициенты при одночленах степени не больше $n-1$ тейлоровского разложения данной функции. Снова применив лемму 2.2, получаем, что однозначно определяются коэффициенты a_n и b_n . Итак, $u(z)$ однозначно определяется коэффициентами $a_0, \alpha, a_2, a_3, b_2, b_3$. Лемма 2.1 доказана. $\square$

Доказательство леммы 2.3. Пусть заданы коэффициенты при одночленах степени не больше 2 тейлоровского разложения функции $\ln \frac{f'_{\beta}(z_{\beta})}{f'(z)}$ с центром в точке 0. Из леммы 2.2 следует, что в таком случае однозначно определяются коэффициенты при одночленах степени не больше 3 тейлоровского разложения функции $u(z)$ с центром в точке 0, если $u(0) = 0, f'(0) = 1$. Отсюда и из леммы 2.1 следует единственность функции $u(z)$, а значит, и $\ln \frac{f'_{\beta}(z_{\beta})}{f'(z)}$. Лемма доказана. $\square$

Доказательство теоремы 2.1. Не ограничивая общности, будем считать, что

$$u(z) = f(z) - f_\beta(z_\beta)$$

— вырожденное решение уравнения (1.2) в окрестности точки 0, и градиент функции $u(z)$ в точке 0 не равен 0. При доказательстве леммы 2.1 было установлено, что в таком случае функция $\ln \frac{f'_\beta(z_\beta)}{f'(z)}$ также является вырожденным решением данного уравнения в окрестности точки 0. Обозначим $g(z) = \ln f'(z)$, $g_\beta(z_\beta) = \ln f'_\beta(z_\beta)$. Тогда

$$\ln \frac{f'_\beta(z_\beta)}{f'(z)} = g_\beta(z_\beta) - g(z).$$

Если функция $\ln \frac{f'_\beta(z_\beta)}{f'(z)}$ является константой, то функции $f'(z)$ и $f'_\beta(z_\beta)$ также являются константами, и следовательно, функция $u(z)$ является линейной.

Если функция $\ln \frac{f'_\beta(z_\beta)}{f'(z)}$ не является константой, то не ограничивая общности, можно предположить, что $g'(0) \neq 0$, $g'_\beta(0) \neq 0$. Применяя лемму 2.3 и рассуждения, аналогичные доказательству данной леммы, получаем, что функция $\ln \frac{g'_\beta(z_\beta)}{g'(z)}$ однозначно определяется линейной частью своего тейлоровского разложения с центром в точке 0.

Пусть

$$\ln \frac{g'_\beta(z_\beta)}{g'(z)} = \sigma_0 + \sigma_1 z - \sigma_2 z_\beta + \dots$$

в окрестности точки 0. Если функция $\ln \frac{g'_\beta(z_\beta)}{g'(z)}$ является константой, то функции $g'(z)$ и $g'_\beta(z_\beta)$ также являются константами, и следовательно, функция $\ln \frac{f'_\beta(z_\beta)}{f'(z)}$ является линейной. Так как данная функция — вырожденная, множество ее значений лежит на некоторой прямой. Но тогда множество значений функции $\frac{f'_\beta(z_\beta)}{f'(z)}$ лежит либо на прямой, либо на окружности с центром в точке 0, либо на спирали. В то же время множество значений данной функции лежит на окружности с центром в точке $\frac{1+\beta}{2} \neq 0$. Таким образом, функция $\frac{f'_\beta(z_\beta)}{f'(z)}$ может принимать только дискретное число значений, и значит, является константой. Но тогда константами являются также функции $f'(z)$ и $f'_\beta(z_\beta)$, и следовательно, функция $u(z)$ является линейной.

Если функция $\ln \frac{g'_\beta(z_\beta)}{g'(z)}$ не является константой, то не ограничивая общности, предположим, что $\sigma_1 \neq 0$, $\sigma_2 \neq 0$. Так как функция $\ln \frac{f'_\beta(z_\beta)}{f'(z)}$ является вырожденной, функция $\ln \frac{g'_\beta(z_\beta)}{g'(z)}$ также является вырожденной. Но тогда якобиан последней функции тождественно равен нулю в окрестности точки 0, и значит,

$$\left| \frac{\sigma_2}{\sigma_1} - \frac{1+\beta}{2} \right| = \left| \frac{1-\beta}{2} \right|.$$

Поэтому $\sigma_1 = \frac{\gamma}{c}$, $\sigma_2 = \frac{\gamma}{T_\beta c}$, где γ и c — некоторые комплексные константы. Так как функция

$$\ln \frac{z-c}{z_\beta - T_\beta c} = \ln \frac{c}{T_\beta c} - \frac{z}{c} + \frac{z_\beta}{T_\beta c} + \dots$$

является вырожденной, можно предположить, что

$$\ln \frac{g'_\beta(z_\beta)}{g'(z)} = \gamma_0 + \gamma_1 \ln \frac{z-c}{z_\beta - T_\beta c},$$

где γ_0 и γ_1 — некоторые комплексные константы, и доказать, что при некоторых γ_0 и γ_1 существуют соответствующие функции f и f_β , а значит, и функция $u(z)$, являющаяся

вырожденным решением уравнения (1.2). Так как параметры c , γ_0 и γ_1 полностью определяют линейную часть тейлоровского разложения функции $\ln \frac{g'_\beta(z_\beta)}{g'(z)}$, из доказанного выше следует, что в таком случае других вырожденных решений данного уравнения в окрестности точки 0 не существует.

Имеем

$$\frac{g'_\beta(z_\beta)}{g'(z)} = e^{\gamma_0} \left(\frac{z - c}{z_\beta - T_\beta c} \right)^{\gamma_1}.$$

Левая часть последнего равенства удовлетворяет условию

$$\left| \frac{g'_\beta(z_\beta)}{g'(z)} - \frac{1 + \beta}{2} \right| = \left| \frac{1 - \beta}{2} \right|.$$

В то же время

$$\left| \frac{z - c}{z_\beta - T_\beta c} - \frac{1 + \beta}{2} \right| = \left| \frac{1 - \beta}{2} \right|.$$

Так как $\frac{1+\beta}{2} \neq 0$, множество точек вида $\left(\frac{z-c}{z_\beta - T_\beta c} \right)^{\gamma_1}$ лежит на некоторой окружности тогда и только тогда, когда $\gamma_1 = \pm 1$.

Таким образом, либо

$$\frac{g'_\beta(z_\beta)}{g'(z)} = \beta \frac{z_\beta - T_\beta c}{z - c} \quad (\gamma_1 = -1, \gamma_0 = \ln \beta),$$

либо

$$\frac{g'_\beta(z_\beta)}{g'(z)} = \frac{z - c}{z_\beta - T_\beta c} \quad (\gamma_1 = 1, \gamma_0 = 0).$$

В первом случае имеем

$$g'(z) = \gamma_2(z - c), \quad g'_\beta(z_\beta) = \beta \gamma_2(z_\beta - T_\beta c),$$

где γ_2 — некоторая ненулевая комплексная константа. Следовательно,

$$\ln \frac{f'_\beta(z_\beta)}{f'(z)} = g_\beta(z_\beta) - g(z) = \gamma_3 + \frac{\gamma_2}{2}(\beta(z_\beta - T_\beta c)^2 - (z - c)^2),$$

где γ_3 — некоторая ненулевая комплексная константа. Так как многочлен

$$\beta(z_\beta - T_\beta c)^2 - (z - c)^2$$

принимает только действительные значения, множество значений функции $\ln \frac{f'_\beta(z_\beta)}{f'(z)}$ лежит на некоторой прямой. Но как было показано ранее, в таком случае функция $u(z)$ является линейной.

Если

$$\frac{g'_\beta(z_\beta)}{g'(z)} = \frac{z - c}{z_\beta - T_\beta c},$$

то

$$g'(z) = \frac{\gamma_4}{z - c}, \quad g'_\beta(z_\beta) = \frac{\gamma_4}{z_\beta - T_\beta c},$$

где γ_4 — некоторая ненулевая комплексная константа. Следовательно,

$$\ln \frac{f'_\beta(z_\beta)}{f'(z)} = g_\beta(z_\beta) - g(z) = \gamma_5 + \gamma_4 \ln \frac{z_\beta - T_\beta c}{z - c},$$

где γ_5 — некоторая ненулевая комплексная константа. Повторяя предыдущие рассуждения с заменой $g(z)$ на $f(z)$ и $g_\beta(z)$ на $f_\beta(z)$, получаем что либо

$$u(z) = \gamma_6 + \gamma_7((z - c)^2 - \beta(z_\beta - T_\beta c)^2),$$

где γ_6, γ_7 — некоторые комплексные константы, и тогда $u(z)$ — многочлен второй степени, либо

$$u(z) = c_1 + c_2 \ln \frac{z - c}{z_\beta - T_\beta c},$$

где c_1, c_2 — некоторые комплексные константы. Теорема доказана. $\square$

Следствие 2.1. Пусть функция $u(z)$ удовлетворяет уравнению (1.2) в некоторой области D , $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0; \pm 1\}$, и является вырожденной. Тогда множество значений функции $u(z)$ — либо константа, либо прямая, либо в случае $\beta < 0$ кривая

$$z = c_1 + c_2 \left(\ln \left(\frac{1+\beta}{2} \cos \varphi + \sqrt{\left(\frac{1-\beta}{2} \right)^2 - \left(\frac{1+\beta}{2} \right)^2 \sin^2 \varphi} \right) + i\varphi \right), \quad 0 < \varphi < 4\pi,$$

а в случае $\beta > 0$ кривая

$$z = c_1 + c_2 \left(\ln \left(\frac{1+\beta}{2} \cos \varphi \pm \sqrt{\left(\frac{1-\beta}{2} \right)^2 - \left(\frac{1+\beta}{2} \right)^2 \sin^2 \varphi} \right) + i\varphi \right),$$

$$\pi - \arcsin \left| \frac{1-\beta}{1+\beta} \right| \leq \varphi \leq \pi + \arcsin \left| \frac{1-\beta}{1+\beta} \right|,$$

где c, c_1, c_2 — некоторые комплексные константы.

Доказательство. Если $u(z)$ — вырожденный многочлен первой степени, то он имеет вид

$$u(z) = c(\alpha_1 x + \alpha_2 y), \quad c \in \mathbb{C}, \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R},$$

и значит, множество его значений — прямая.

Если $u(z)$ — многочлен второй степени, то с помощью параллельного переноса он приводится к виду

$$u(z) = \gamma_1 + \gamma_2(z^2 + bz_\beta^2),$$

где γ_1 и γ_2 — некоторые комплексные константы. При этом если $u(z)$ — вырожденный многочлен, то $I_u(z) = 0$ при всех $z \in \mathbb{C}$. Равенство (2.2) в таком случае приобретает вид

$$\left| b \frac{z_\beta}{z} + \frac{1+\beta}{2} \right| = \left| \frac{1-\beta}{2} \right|$$

при всех $z \in \mathbb{C}$.

Так как

$$\left| \frac{z_\beta}{z} - \frac{1+\beta}{2\beta} \right| = \left| \frac{1-\beta}{2\beta} \right|$$

при всех $z \in \mathbb{C}$, получаем $b = -\beta$, и значит,

$$u(z) = \gamma_1 + \gamma_2(z^2 - \beta z_\beta^2) = \gamma_1 + \gamma_2 \left((1-\beta)x^2 + \left(\frac{1}{\beta} - 1 \right) y^2 \right).$$

Таким образом, множество значений $u(z)$ является прямой.

Пусть теперь

$$u(z) = c_1 + c_2 \ln \frac{z - c}{z_\beta - T_\beta c},$$

где c_1, c_2 — некоторые комплексные константы. Множество значений функции $\frac{z-c}{z_\beta - T_\beta c}$ является окружностью радиуса $\left| \frac{1-\beta}{2} \right|$ с центром в точке $\frac{1+\beta}{2}$. При $\beta < 0$ данная окружность выражается в полярных координатах уравнением

$$r = \frac{1+\beta}{2} \cos \varphi + \sqrt{\left(\frac{1-\beta}{2} \right)^2 - \left(\frac{1+\beta}{2} \right)^2 \sin^2 \varphi}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

функция $u(z)$ определена и удовлетворяет уравнению (1.2) в области $\mathbb{C} \setminus \Gamma$, где

$$\Gamma = \{y = \operatorname{Im} c, x \geq 0\},$$

приращение аргумента выражения $\frac{z-c}{z\beta-T_\beta c}$ при полном обходе окружности с центром в точке c в положительном направлении равно 4π , и значит, множеством значений данной функции является кривая

$$z = c_1 + c_2 \left(\ln \left(\frac{1+\beta}{2} \cos \varphi + \sqrt{\left(\frac{1-\beta}{2} \right)^2 - \left(\frac{1+\beta}{2} \right)^2 \sin^2 \varphi} \right) + i\varphi \right), \quad 0 < \varphi < 4\pi.$$

Аналогично, при $\beta > 0$ данная окружность выражается в полярных координатах уравнением

$$r = \frac{1+\beta}{2} \cos \varphi \pm \sqrt{\left(\frac{1-\beta}{2} \right)^2 - \left(\frac{1+\beta}{2} \right)^2 \sin^2 \varphi},$$

$$\pi - \arcsin \left| \frac{1-\beta}{1+\beta} \right| \leq \varphi \leq \pi + \arcsin \left| \frac{1-\beta}{1+\beta} \right|,$$

функция $u(z)$ определена и удовлетворяет уравнению (1.2) в области $\mathbb{C} \setminus \{c\}$, и значит, множеством значений данной функции является кривая

$$z = c_1 + c_2 \left(\ln \left(\frac{1+\beta}{2} \cos \varphi \pm \sqrt{\left(\frac{1-\beta}{2} \right)^2 - \left(\frac{1+\beta}{2} \right)^2 \sin^2 \varphi} \right) + i\varphi \right),$$

$$\pi - \arcsin \left| \frac{1-\beta}{1+\beta} \right| \leq \varphi \leq \pi + \arcsin \left| \frac{1-\beta}{1+\beta} \right|.$$

Следствие доказано. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. М.Б. Балк. *Полианалитические функции и их обобщения* // Итоги науки тех., Сер. соврем. пробл. мат., Фундам. направления **85**, 187–246 (1991).
2. А.Б. Зайцев. *Об отображениях решениями эллиптических уравнений второго порядка* // Мат. заметки **95**:5, 718–733 (2014).

Зайцев Александр Борисович,
 Российский технологический университет МИРЭА,
 просп. Вернадского, 78,
 119454, г. Москва, Россия
 E-mail: abzai75@mail.ru