

УДК 517.938.5

О ГОМОКЛИНИЧЕСКИХ ТОЧКАХ И ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ЭНТРОПИИ НЕПРЕРЫВНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ НА ОДНОМЕРНЫХ РАЗВЕТВЛЕННЫХ КОНТИНУУМАХ

Е.Н. МАХРОВА

Аннотация. Пусть X — дендроид, $f : X \rightarrow X$ — непрерывное отображение, а p — периодическая точка отображения f , и пусть существует гомоклиническая точка x в X к периодической точке p . В статье изучаются свойства гомоклинической точки x и неустойчивого многообразия периодической точки p . Исследуется локальная структура дендроида, при которой из существования гомоклинической точки следует положительность топологической энтропии отображения f . В работе также приводятся различия в свойствах гомоклинических точек и неустойчивых многообразий периодических точек непрерывных отображений, заданных на дендроидах, дендритах и конечных деревьях.

Ключевые слова: дендроид, дендрит, конечное дерево, непрерывное отображение, неустойчивое многообразие, гомоклиническая точка, топологическая энтропия.

Mathematics Subject Classification: 37B40, 37B45, 37E25, 54F50

1. ВВЕДЕНИЕ

Под континуумом будем понимать непустое компактное связное метрическое пространство. Пусть X — континуум, p — произвольная точка из X . Если связными компонентами границы произвольной окрестности $U(p)$ точки p в X являются одноточечные множества, то X называется *одномерным континуумом* (см., например, [3, гл.2, §25, I]).

В настоящее время наблюдается возрастание интереса к динамическим системам на одномерных разветвленных континуумах со сложной топологической структурой. Это связано с тем, что указанные континуумы появляются, например, как множества Жюлиа в комплексных динамических системах [24], как предельные множества динамических систем с фазовыми пространствами размерности, не меньшей двойки [9], [10], как глобальные аттракторы косых произведений и интегрируемых отображений [15], [16], в задачах математической физики [7], [13] и др.

В настоящей работе изучаются гомоклинические точки, впервые обнаруженные А. Пуанкаре в задачах небесной механики [6, гл. XXXIII, п. 395], у непрерывных отображений на одномерных разветвленных континуумах таких, как дендроиды, частным случаем которых являются дендриты и конечные деревья (см. определение 2.2). Существование

E.N. MAKHOVA, ON HOMOCLINIC POINTS AND TOPOLOGICAL ENTROPY OF CONTINUOUS MAPS ON ONE-DIMENSIONAL RAMIFIED CONTINUA.

© МАХРОВА Е.Н. 2025.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00242, <https://rscf.ru/project/24-21-00242/>.

Поступила 16 июня 2024 г.

гомоклинических точек у непрерывных отображений отрезка или конечных деревьев, эквивалентно положительности топологической энтропии [2], [11]. В то же время наличие гомоклинических точек у непрерывных отображений дендритов, не являющихся конечными деревьями, не определяют положительность или равенство нулю топологической энтропии [2], [5], [14], [19], [21]. Более того, сложность структуры одномерных разветвленных континуумов приводит к тому, что даже у заданных на них гомеоморфизмов и монотонных отображений наблюдаются свойства, нехарактерные для непрерывных отображений отрезка (см., например, [21], [22]). Поэтому эффективным оказывается подход к изучению динамики отображений на указанных континуумах, устанавливающих такие особенности их топологической структуры, при которых рассматриваемые отображения демонстрируют свойства, аналогичные свойствам непрерывных отображений отрезков или конечных деревьев. Подобный подход впервые был реализован для непрерывных отображений дендритов в [12], а также в работах [21], [23].

Поскольку дендроиды имеют более сложную топологическую структуру, чем дендриты, в настоящей работе изучаются условия на локальную структуру дендроидов, при которых из существования гомоклинической точки следует положительность топологической энтропии заданных на них отображений. Кроме этого, изучаются свойства неустойчивого многообразия периодической точки, которые также зависят от структуры самого дендроида. Отметим, что свойства неустойчивого многообразия у непрерывных отображений на конечных деревьях изучались в [17].

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Обозначим через $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, $\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел, i — мнимая единица.

Пусть X — одномерный континуум с метрикой d , A — подмножество X . Обозначим через $\text{diam } A$ — диаметр множества A ; $\text{card } A$ — мощность множества A ; $\partial(A)$ — границу множества A . Символом $A^{(1)}$ будем обозначать производное множество, то есть множество всех предельных точек множества A .

Следуя работе [2], связное подмножество континуума X , замыкание которого гомеоморфно отрезку $[0; 1]$ на прямой $\mathbb{R}^1$, будем называть дугой.

Символом $[x; y]$ будем обозначать дугу с концами в точках x и y , содержащую эти точки; символами $(x; y) = [x; y] \setminus \{x\}$, $(x; y) = [x; y] \setminus \{y\}$, $(x; y) = [x; y] \setminus \{x, y\}$.

Мы будем использовать определение порядка точки в смысле Менгера — Урысона [4, гл. 6, §51].

Определение 2.1 ([4, гл. 6, §51]). Пусть X — одномерный континуум, z — точка в X .

- 1) Будем говорить, что порядок точки z конечен, если существует такое $n \in \mathbb{N}$, что для любой окрестности $U(z)$ точки z в X найдется такая окрестность $U_1(z) \subset U(z)$, что $\text{card } \partial(U_1(z)) = n$, и не существует подокрестности $U_2(z) \subset U_1(z)$, для которой $\text{card } \partial(U_2(z)) < n^1$. В этом случае говорим, что порядок точки z равен n ($\text{ord } z = n$).
- 2) Порядок точки z будем называть бесконечным, если для любого числа $n \in \mathbb{N}$ найдется такая окрестность $U(z)$ точки z в X , что для любой окрестности $U_1(z) \subset U(z)$ $\text{card } \partial(U_1(z)) > n$.

Точки конечного порядка, большего 2, и точки бесконечного порядка называются точками ветвления континуума X . Точки, порядок которых равен 1, называются концевыми

¹По поводу отношения порядка на множестве кардинальных чисел см., например, [1, Глава 3]

точками континуума X . Условимся обозначать через $R(X)$ ($E(X)$) множество точек ветвления (концевых точек) континуума X .

Континуум X называется *уникогерентным*, если для любых подконтинуумов A и B в X , удовлетворяющих условию $A \cup B = X$, пересечение $A \cap B$ связно.

Отметим, что любой отрезок на прямой $\mathbb{R}^1$ уникогерентен, а окружность не является уникогерентным множеством.

Континуум X — *наследственно уникогерентен*, если любой подконтинуум Y в X является уникогерентным.

Континуум называется *дугообразно связным*, если любую пару его точек можно соединить дугой.

Определение 2.2. *Континуум X называется дендроидом, если X — дугообразно связен и наследственно уникогерентен.*

Локально связный дендроид называется дендритом.

Дендрит с конечным множеством концевых точек называется конечным деревом.

Отметим следующие свойства дендроидов.

Лемма 2.1 ([20]). *Пусть X — дендроид. Тогда*

- 1) X — одномерный континуум;
- 2) X не содержит подмножеств, гомеоморфных окружности;
- 3) любые различные две точки x, y в X можно соединить единственной дугой $[x; y]$;
- 4) любой подконтинуум дендроиды — дендроид.

Пусть p — произвольная точка из дендроиды X . Тогда $X \setminus \{p\}$ состоит из одной или нескольких связных компонент, которые называются *компонентами точки p* .

Из определения 2.1 следует: если порядок точки p дендроиды X конечен, то число компонент точки p конечно. Обратное утверждение неверно для дендроидов, не являющихся дендритами (см, например, [20]). Так, в дендроиде

$$X = [0; \mathbf{i}] \cup [0; 1] \cup \bigcup_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2^n}; \frac{1}{2^n} + \mathbf{i} \right]^1,$$

который не является дендритом, каждая точка p из $[0; \mathbf{i}]$ согласно определению 2.1 является точкой ветвления бесконечного порядка, но точка p имеет либо одну компоненту (если $x = \mathbf{i}$), либо две компоненты (если $p \in [0; \mathbf{i})$). Но если дендроид X является дендритом, и число компонент точки p в X конечно, то оно совпадает с порядком точки p (см. [4, гл.6, §51, VI]).

Пусть $f : X \rightarrow X$ — непрерывное отображение дендроиды X . Точка p в X называется *периодической точкой отображения f* , если существует такое натуральное число $m \geq 1$, что $f^m(p) = p$; наименьшее m , удовлетворяющее данному условию, называется *периодом периодической точки p* . Если $m = 1$, то точка p называется *неподвижной точкой отображения f* .

Множество периодических (неподвижных) точек отображения f обозначим через $\text{Per}(f)$ ($\text{Fix}(f)$).

Определение 2.3 ([11]). *Неустойчивым многообразием периодической точки p периода m непрерывного отображения $f : X \rightarrow X$ называется такое множество точек $W^u(p, f^m)$ дендроиды X , что для любой точки $z \in W^u(p, f^m)$ и произвольной окрестности $U(p)$ точки p в X , не содержащей точку z , найдется такое натуральное число $i \geq 1$, что $z \in f^{im}(U(p))$.*

¹Обозначение отрезка совпадает с обозначением дуги, поскольку любой отрезок на плоскости является дугой согласно введенному ранее определению дуги.

Определение 2.4 ([11]). Устойчивым многообразием периодической точки p периода t непрерывного отображения $f : X \rightarrow X$ называется такое множество точек $W^s(p, f^m)$ дендроида X , что для любой точки $z \in W^s(p, f^m)$ ω -предельным множеством $\omega(z, f^m)$ траектории точки z относительно отображения f^m является точка p , то есть $\omega(z, f^m) = \{p\}$.

Определение 2.5 ([6]). Точка $z \in X$ называется гомоклинической точкой отображения $f : X \rightarrow X$, если существует такая периодическая точка $p \in X$ периода t , что $p \neq z$, и $z \in W^u(p, f^m) \cap W^s(p, f^m)$.

Напомним определение топологической энтропии, впервые введенное в работе [8].

Пусть X — компактное топологическое пространство, $f : X \rightarrow X$ — непрерывное отображение, U — любое открытое покрытие X . В силу компактности X существует конечное подпокрытие X . Обозначим через $N(U)$ мощность наименьшего подпокрытия, выделенного из U . Для любых двух покрытий U, V пространства X положим

$$U \vee V = \{A \cap B, \text{ где } A \in U, B \in V\}.$$

Определение 2.6 ([8]). Топологической энтропией $h(f, U)$ отображения f относительно покрытия U называется

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log N(U \vee f^{-1}(U) \vee \dots \vee f^{-n+1}(U))}{n},$$

где $f^{-j}(\cdot)$ означает j -тый полный прообраз множества $(\cdot)$.

Топологической энтропией $h(f)$ отображения f называется $\sup_U h(f, U)$.

Перейдем к основным результатам настоящей работы. Первая теорема является обобщением известных свойств неустойчивого многообразия периодической точки непрерывных отображений, заданных на отрезке и конечном дереве [11], [17].

Теорема 2.1. Пусть $f : X \rightarrow X$ — непрерывное отображение дендроида X , $p \in \text{Per}(f)$, t — период точки p . Тогда

- 1) $W^u(p, f^m)$ инвариантно относительно f^m , то есть $f^m(W^u(p, f^m)) \subseteq W^u(p, f^m)$;
- 2) если дополнительно $\text{ord } p$ конечен и $p \notin R^{(1)}(X)$, то $W^u(p, f^m)$ дугообразно связно.

В [17] доказано следующее утверждение.

Лемма 2.2 ([17]). Пусть $f : X \rightarrow X$ — непрерывное отображение конечного дерева X , точка $p \in \text{Fix}(f)$. Тогда если $\overline{W^u(p, f)} \setminus W^u(p, f) \neq \emptyset$, то $\overline{W^u(p, f)} \setminus W^u(p, f) \subset \text{Per}(f)$.

В настоящей работе показано, что утверждение леммы 2.2 неверно для непрерывных отображений, заданных на дендроиде (см. пример 3.2).

В следующей теореме 2.2 получены локальные условия на структуру дендроида, при выполнении которых мы получаем аналог утверждения, доказанного для непрерывных отображений отрезка [11].

Теорема 2.2. Пусть $f : X \rightarrow X$ — непрерывное отображение дендроида X и неподвижная точка $p \in X$ удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $p \notin R^{(1)}(X)$;
- 2) $\text{ord } p$ конечен.

Тогда для любой точки $x \in W^u(p, f)$, $x \neq p$, и для любой окрестности $U(p)$ точки p в X найдутся точка $y \in U(p) \cap W^u(p, f)$ и натуральное число $n \geq 1$, для которых $f^n(y) = x$.

В статье также показано, что нарушение хотя бы одного из условий 1) или 2) теоремы 2.2 влечет невыполнение утверждения данной теоремы (см. примеры 4.1 и 4.2).

Так как любая точка конечного дерева удовлетворяет условиям 1), 2) теоремы 2.2, получаем справедливость следующего утверждения.

Следствие 2.1. Пусть $f : X \rightarrow X$ — непрерывное отображение конечного дерева X , $p \in \text{Fix}(f)$. Тогда для любой точки $x \in W^u(p, f)$, $x \neq p$, и для любой окрестности $U(p)$ точки p в X найдутся точка $y \in U(p) \cap W^u(p, f)$ и натуральное число n , для которых $f^n(y) = x$.

Поскольку любая гомоклиническая точка к периодической точке p отображения f принадлежит неустойчивому многообразию точки p , из теоремы 2.2 получаем следующее утверждение.

Следствие 2.2. Пусть $f : X \rightarrow X$ — непрерывное отображение дендроида X , f имеет гомоклиническую точку $x \in X$ к периодической точке $p \in X$ периода m , и выполнены следующие условия:

- 1) $p \notin R^{(1)}(X)$;
- 2) $\text{ord } p$ конечен.

Тогда для любой окрестности $U(p)$ точки p существуют гомоклиническая точка $y \in U(p)$ к периодической точке p и натуральное число $n \geq 1$, для которых $f^{mn}(y) = x$.

Таким образом, при выполнении условий следствия 2.2 в произвольной окрестности периодической точки p существует бесконечное число гомоклинических точек отображения f , что неверно при нарушении хотя бы одного из условий 1) – 2) данного следствия (см. указанные ниже примеры 4.1 и 4.2).

В следующей теореме получены локальные условия на структуру дендроида, при выполнении которых существование гомоклинической точки отображения f влечет положительность топологической энтропии.

Теорема 2.3. Пусть $f : X \rightarrow X$ — непрерывное отображение дендроида X , и существует гомоклиническая точка $x \in X$ к периодической точке $p \in X$, где точка p удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $p \notin R^{(1)}(X)$;
- 2) $\text{ord } p$ — конечен.

Тогда топологическая энтропия отображения f положительная.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.1

Для доказательства теоремы 2.1 нам потребуется понятие n -ода, где $n \geq 3$. Множество точек комплексной плоскости, n -я степень которых принадлежит отрезку $[0; 1]$, называется n -одом. Отметим, что n -од имеет единственную точку ветвления 0.

Лемма 3.1. Пусть $f : X \rightarrow X$ — непрерывное отображение дендроида X , $p \in \text{Fix}(f)$. Тогда $f(W^u(p, f)) \subseteq W^u(p, f)$.

Доказательство. Пусть точка $x \in W^u(p, f)$. Согласно определению 2.3 для любой окрестности $U(p)$ точки p найдется такое натуральное число $n \geq 1$, что $x \in f^n(U(p))$. Тогда $f(x) \in f^{n+1}(U(p))$, то есть $f(x) \in W^u(p, f)$. Лемма 3.1 доказана. $\square$

Лемма 3.2. Пусть X — дендроид, а точка p в X удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $p \notin R^{(1)}(X)$;
- 2) $\text{ord } p = n$, где $n \in \mathbb{N}$.

Тогда для любой окрестности $U(p)$ точки p в X существует такая окрестность $U_1(p) \subset U(p)$, что $\overline{U_1(p)}$ — либо дуга (при $n = 1$ или 2), либо гомеоморфно n -оду (при $n \geq 3$).

Доказательство. Пусть $U(p)$ — произвольная окрестность точки p в X . Так как порядок точки p конечен, из определения 2.1 следует, что число компонент точки p равно n . Обозначим через $X_i(p)$ — компоненты точки p , где $1 \leq i \leq n$. Поскольку $p \notin R^{(1)}(X)$, для каждого числа $1 \leq i \leq n$ найдется такая точка $\alpha_i \in X_i(p) \cap U(p)$, что

$$(p; \alpha_i] \cap R(X) = \emptyset.$$

Положим $Y = \bigcup_{i=1}^n [p; \alpha_i]$. Тогда $\overline{Y}$ — либо дуга (при $n = 1$ или 2), либо гомеоморфно n -оду (при $n \geq 3$). Если $Y \subseteq U(p)$, то положим $U_1(p) = Y$, в этом случае утверждение леммы 3.2 доказано.

Рассмотрим случай, когда $Y \not\subseteq U(p)$. Поскольку $\overline{Y}$ — дуга или гомеоморфно n -оду, тогда $\overline{Y}$ локально связный континуум. Поэтому существует связная окрестность $U_1(p) \subset Y \cap U(p)$. Тогда $\overline{U_1(p)}$ — либо дуга (при $n = 1$ или 2), либо гомеоморфно n -оду (при $n \geq 3$). Лемма 3.2 доказана. $\square$

Лемма 3.3. Пусть $f : X \rightarrow X$ — непрерывное отображение дендроида X , $p \in \text{Fix}(f)$, $\text{ord } p$ конечен, и $p \notin R^{(1)}(X)$. Тогда $W^u(p, f)$ дугообразно связно.

Доказательство. Поскольку $p \in W^u(p, f)$, достаточно показать, что для любой точки x из $W^u(p, f) \setminus \{p\}$ существует такая дуга $[p; x]$, что $[p; x] \subseteq W^u(p, f)$.

Так как X — дендроид, согласно свойству 3) леммы 2.1 существует единственная дуга $[p; x] \subset X$. Покажем, что любая точка z из $(p; x)$ принадлежит $W^u(p, f)$.

Пусть $U(p)$ — произвольная окрестность точки p в X , не содержащая точку z . Поскольку $\text{ord } p$ конечен, и $p \notin R^{(1)}(X)$, согласно лемме 3.2 найдется такая окрестность $U_1(p) \subset U(p)$, что $\overline{U_1(p)}$ является дугой или гомеоморфно n -оду.

Так как $x \in W^u(p, f)$, в силу определения 2.3 для данной окрестности $U_1(p)$ точки p найдется такое натуральное число $k \geq 1$, что $x \in f^k(U_1(p))$. Тогда существует такая точка $y \in U_1(p)$, что $f^k(y) = x$. Поскольку $y \in U_1(p)$, в силу выбора окрестности $U_1(p)$ дуга $[p; y] \subset U_1(p)$. С другой стороны, из непрерывности f следует, что множество $f^k([p; y])$ связно и содержит точки p и x . Поэтому $[p; x] \subseteq f^k([p; y])$. Поскольку $z \in (p; x)$, получаем, что

$$z \in f^k([p; y]) \subset f^k(U_1(p)).$$

Поскольку $U_1(p) \subset U(p)$, а $U(p)$ — произвольная окрестность точки p , имеем $z \in W^u(p, f)$. Лемма 3.3 доказана. $\square$

Справедливость теоремы 2.1 следует из лемм 3.1 и 3.3. Если $\text{ord } p$ не является конечным, то утверждение леммы 3.3 неверно. Идея следующего примера принадлежит рецензенту.

Пример 3.1. Пусть $I_n = \left[\frac{1}{2^n}; \frac{1}{2^n} + \mathbf{i} \right]$, где $n \geq 0$. На дендроиде

$$X = [0; \mathbf{i}] \cup [0; 1] \cup \bigcup_{n=0}^{\infty} I_n$$

определим отображение $f : X \rightarrow X$ следующим образом:

- 1) $f(x) = x$, если $x \in [0; \mathbf{i}] \cup I_0$;
- 2) $f(x) = 2x$, если $x \in [0; \frac{1}{2}]$;
- 3) $f(x) = 1$, если $x \in [\frac{1}{2}; 1]$;

- 4) $f : I_{n+1} \rightarrow I_n$ — линейный гомеоморфизм со следующим свойством: для любой точки x из I_{n+1} выполнено равенство $\text{Im } x = \text{Im } f(x)$, где $\text{Im}(\cdot)$ — мнимая часть числа $(\cdot)$. Тогда $f(I_{n+1}) = I_n$ для каждого целого числа $n \geq 0$.

Построенное отображение f является непрерывным, неустойчивое многообразие любой неподвижной точки x из $(0, \mathbf{i}]$ не является связным. Отметим, что согласно определению 2.1 порядок любой точки $x \in (0, \mathbf{i}]$ бесконечен.

В заключении данного раздела покажем, что утверждение леммы 2.2 неверно для непрерывного отображения, заданного на дендроиде.

Пример 3.2. Пусть

$$X = [0; 1] \cup \bigcup_{j=0}^{+\infty} I_j, \quad \text{где } I_j = \left[0; \exp\left(\frac{\pi}{2^j} \mathbf{i}\right)\right], \quad j \geq 0.$$

В каждой точке x из $(0; 1]$ континуум X не является локально связным. Поэтому X — дендроид, не являющийся дендритом.

Для задания отображения $f : X \rightarrow X$ нам потребуются два вспомогательных отображения. Первое из них $h_j : I_j \rightarrow [0; 1]$ ($j \geq 1$) мы определим по формуле:

$$h_j(x) = x \cdot \exp\left(-\frac{\pi}{2^j} \mathbf{i}\right) \quad \text{для любой точки } x \in I_j, \quad j \geq 1.$$

Отметим, что h_j — гомеоморфизм, и $h_j(I_j) = [0; 1]$.

Определим второе вспомогательное отображение $g_j : I_j \rightarrow I_j$ ($j \geq 1$), положив

$$g_j(x) = h_j^{-1}(\sqrt{h_j(x)}) \quad \text{для любой точки } x \in I_j, \quad j \geq 1.$$

Отметим, что для каждого числа $j \geq 1$

$$\text{Per}(g_j) = \text{Fix}(g_j) = \left\{0; \exp\left(\frac{\pi}{2^j} \mathbf{i}\right)\right\},$$

и для любой точки x из $I_j \setminus \left\{0; \exp\left(\frac{\pi}{2^j} \mathbf{i}\right)\right\}$ ω -предельным множеством $\omega(x, g_j)$ траектории точки x относительно отображения g_j является неподвижная точка $\exp\left(\frac{\pi}{2^j} \mathbf{i}\right)$.

Определим отображение $f : X \rightarrow X$ следующим образом:

- 1) $f(x) = x$, если $x \in [-1; 0]$;
- 2) $f(x) = g_j(x) \cdot \exp\left(\frac{\pi}{2^j} \mathbf{i}\right)$, если $x \in I_j$ для всех $j \geq 1$;
- 3) $f(x) = \sqrt{x}$, если $x \in [0; 1]$.

Построенное отображение f непрерывно, $\text{Per}(f) = \text{Fix}(f) = [-1; 0] \cup \{1\}$.

Покажем, что любая точка y из $I_j \setminus \left\{0; \exp\left(\frac{\pi}{2^j} \mathbf{i}\right)\right\}$ ($j \geq 1$) принадлежит $W^u(0, f)$. Пусть $U(0)$ — любая окрестность точки 0, не содержащая точку y , и пусть x — произвольная точка из $U(0) \cap (I_j \setminus \{0\})$. Так как $\omega(x, g_j) = \left\{\exp\left(\frac{\pi}{2^j} \mathbf{i}\right)\right\}$, найдется такое натуральное число $n \geq 1$, что $g_j^n(x) \in \left(y; \exp\left(\frac{\pi}{2^j} \mathbf{i}\right)\right)$. Тогда

$$y \in g_j^n(U(0) \cap I_j).$$

Из пункта 2) построения отображения f следует, что $y \in f^n(U(0) \cap I_{j+n})$. Поэтому $y \in f^n(U(0))$. Таким образом,

$$X \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} \left\{\exp\left(\frac{\pi}{2^j} \mathbf{i}\right)\right\} \subset W^u(0, f).$$

Так как $f(I_1) = I_0$, в силу леммы 3.1 $(-1; 0] \subset W^u(0, f)$. Поскольку для любой окрестности $U(0)$ точки 0 , для которой $U(0) \cap E(X) = \emptyset$, и любого натурального числа $n \geq 1$ выполнено условие: $f^n(U(0)) \cap E(X) = \emptyset$, находим $W^u(0, f) \cap E(X) = \emptyset$. Суммируя все вышесказанное, получаем равенство

$$W^u(0, f) = X \setminus E(X).$$

Тогда $\overline{W^u(0, f)} \setminus W^u(0, f) = E(X)$, причем каждая точка $\exp\left(\frac{\pi}{2^j} \mathbf{i}\right)$ ($j \geq 1$) из $E(X)$ не является периодической точкой отображения f .

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.2

Предположим, что утверждение теоремы 2.2 неверно. Тогда найдутся точка $x \in W^u(p, f)$ и окрестность $U(p)$ точки p в X , не содержащая x , удовлетворяющие следующему условию:

$$f^n(U(p) \cap W^u(p, f)) \cap \{x\} = \emptyset \quad \text{для любого числа } n \in \mathbb{N}. \quad (4.1)$$

Пусть $r = \text{ord } p$, где $r \in \mathbb{N}$. Так как порядок точки p конечен, и $p \notin R^{(1)}(X)$, согласно лемме 3.2 существует такая окрестность $U_1(p) \subset U(p)$, что $\overline{U_1(p)}$ — либо дуга (если $r = 1$ или 2), либо гомеоморфно r -оду (если $r \geq 3$). Положим $Y = \overline{U_1(p)}$.

Так как $p, x \in W^u(p, f)$, согласно лемме 3.3 дуга $[p; x] \subseteq W^u(p, f)$. Следовательно,

$$[p; x] \cap Y \subseteq W^u(p, f). \quad (4.2)$$

Поэтому существует хотя бы одна компонента точки p в Y , содержащая точки из $W^u(p, f)$.

С другой стороны, поскольку $x \in W^u(p, f)$, из (4.1), условия $Y \subset U(p)$ и связности $W^u(p, f)$ следует существование хотя бы одной компоненты точки p в Y , не содержащей точек из $W^u(p, f)$. С учетом (4.2) получаем, что порядок точки p больше 1, то есть $r \geq 2$.

Пусть s — количество компонент точки p , не содержащих точек из $W^u(p, f)$. Тогда $1 \leq s \leq r - 1$. Обозначим через $Y_{i_1}(p), \dots, Y_{i_s}(p)$ — компоненты точки p в Y , для которых

$$Y_{i_j}(p) \cap W^u(p, f) = \emptyset, \quad 1 \leq j \leq s, \quad (4.3)$$

а $Y_{i_{s+1}}(p), \dots, Y_{i_r}(p)$ — компоненты точки p , для которых

$$Y_{i_j}(p) \cap W^u(p, f) \neq \emptyset, \quad s + 1 \leq j \leq r.$$

Так как $W^u(p, f)$ связно, $Y_{i_j}(p) \cap W^u(p, f)$ также связно ($s + 1 \leq j \leq r$). Поэтому без ограничения общности будем считать, что

$$Y_{i_j}(p) \subseteq W^u(p, f) \quad \text{для всех } s + 1 \leq j \leq r. \quad (4.4)$$

В противном случае, используя условие локальной связности Y и связности $W^u(p, f)$, выберем такую связную подокрестность $U_0(p) \subset U_1(p)$, что все компоненты точки p в $\overline{U_0(p)}$, содержащие точки из $W^u(p, f)$, целиком принадлежат $W^u(p, f)$.

В силу непрерывности f и локальной связности континуума Y найдется такая связная окрестность $U_2(p)$ точки p , что $U_2(p) \subset U_1(p)$, и

$$f(U_2(p)) \subset U_1(p). \quad (4.5)$$

Поскольку $U_2(p)$ связная окрестность, и $U_2(p) \subset U_1(p)$, тогда $\overline{U_2(p)}$ — либо дуга (если $r = 1$ или 2), либо гомеоморфно r -оду (если $r \geq 3$). Следовательно, $Y_{i_j}(p) \cap \partial(U_2(p))$ — одноточечное множество для любого числа $1 \leq j \leq r$. Положим $\alpha_j = Y_{i_j}(p) \cap \partial(U_2(p))$

для $1 \leq j \leq s$. В силу (4.3) $\alpha_j \notin W^u(p, f)$ ($1 \leq j \leq s$). Следовательно, найдется такая окрестность $U_3(p)$ точки p , что $U_3(p) \subset U_2(p)$, и

$$f^j(U_3(p)) \cap \{\alpha_1, \dots, \alpha_s\} = \emptyset \quad \text{для всех } j \geq 1. \quad (4.6)$$

Покажем, что $f^n(U_3(p)) \cap \{x\} = \emptyset$ для любого числа $n \geq 1$. Предположим противное. Тогда найдутся точка $y \in U_3(p)$ и $n_0 \in \mathbb{N}$, для которых $f^{n_0}(y) = x$. Поскольку $x \notin U(p)$, и $U_3(p) \subset U_2(p) \subset U_1(p) \subset U(p)$, имеем $x \notin U_3(p)$. Таким образом, $y \in U_3(p)$, а $x \notin U_3(p)$. Следовательно, найдется такое натуральное число $k \geq 1$, что

$$\{y, f(y), \dots, f^{k-1}(y)\} \subset U_3(p), \quad \text{а } f^k(y) \notin U_3(p).$$

Тогда из включения $U_3(p) \subset U_2(p)$ и (4.5) получаем, что $f^k(y) \in U_1(p)$. Отсюда с учетом условий: $U_1(p) \subset U(p)$, $x \notin U(p)$ следует, что $k < n_0$.

Таким образом,

$$f^k(y) \in U_1(p) \setminus U_3(p) \subset \bigcup_{j=1}^r Y_{i_j}(p) \setminus U_3(p).$$

Тогда, учитывая условия: $p \in \text{Fix}(f)$, и f — непрерывное отображение, получаем, что

$$f^k([p; y]) \cap \partial U_3(p) \neq \emptyset.$$

В силу (4.6)

$$f^k([p; y]) \cap \{\alpha_1, \dots, \alpha_s\} = \emptyset.$$

Поэтому

$$f^k(y) \in \bigcup_{j=s+1}^r Y_{i_j}(p) \setminus U_3(p).$$

Тогда с учетом (4.4) получаем, что $f^k(y) \in W^u(p, f)$. Следовательно,

$$x \in f^{n_0-k}(U_3(p) \cap W^u(p, f)),$$

что противоречит (4.1), поскольку $U_3(p) \subset U(p)$. Таким образом, $f^n(U_3(p)) \cap \{x\} = \emptyset$ для любого числа $n \geq 1$. Последнее противоречит условию: $x \in W^u(p, f)$. Теорема 2.2 доказана.

Следующие два примера показывают, что утверждение теоремы 2.2 неверно, если не выполнено хотя бы одно из условий 1), 2) теоремы 2.2. В примере 4.1 мы построим непрерывное отображение на континууме X_1 , на котором не выполнено условие 1), а в примере 4.2 — на континууме X_2 , на котором нарушается условие 2) теоремы 2.2.

Пример 4.1. 1. Построение континуума X_1 .

Для каждого целого числа $k \geq 0$ положим $I_k = \left[\frac{1}{2^k}; \frac{1}{2^k} + \frac{\mathbf{i}}{2^k} \right]$ — вертикальные отрезки, длины которых стремятся к 0 при $k \rightarrow +\infty$. Определим дендроид

$$Z = [0; 1] \cup \bigcup_{k=0}^{\infty} I_k,$$

являющийся дендритом. Дендрит Z имеет счетное число точек ветвления, порядок каждой точки ветвления равен 3, а точка $0 \in R^{(1)}(Z)$. Отрезок $[0; 1]$ будем называть основанием дендрита Z .

Для каждого $j \in \mathbb{N}$ обозначим Z_j — дендрит, полученный из дендрита Z , сжатием по всем направлениям в $\frac{1}{2^{j+1}}$ раз и сдвигом вдоль отрезка $[0; 1]$ на $\frac{1}{2^j}$ вправо. В результате основание дендрита Z_j совпадает с отрезком $\left[\frac{1}{2^j}; \frac{3}{2^{j+1}} \right]$ ($j \geq 1$). Каждый вертикальный

отрезок дендрита Z_j , полученный сжатием и сдвигом отрезка I_k , обозначим через $I_k^{(j)}$, где $j \geq 1$, $k \geq 0$. Отметим, что

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \text{diam } Z_j = 0. \quad (4.7)$$

Положим

$$J_k = \left[1; 1 + \frac{1}{2^k} \exp \left(\frac{\pi}{2^k} i \right) \right],$$

где $k \geq 1$. Пусть $Y = \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k$. Континуум Y является дендритом и имеет единственную точку ветвления 1, порядок которой бесконечный.

Определим континуум

$$X_1 = [0; 1] \cup \bigcup_{j=1}^{\infty} Z_j \cup Y,$$

см. рис. 1. В силу (4.7) континуум X_1 локально связный, поэтому X_1 — дендрит. Отметим, что дендрит X_1 имеет счетное число точек ветвления, причем $0 \in R^{(1)}(X_1)$.

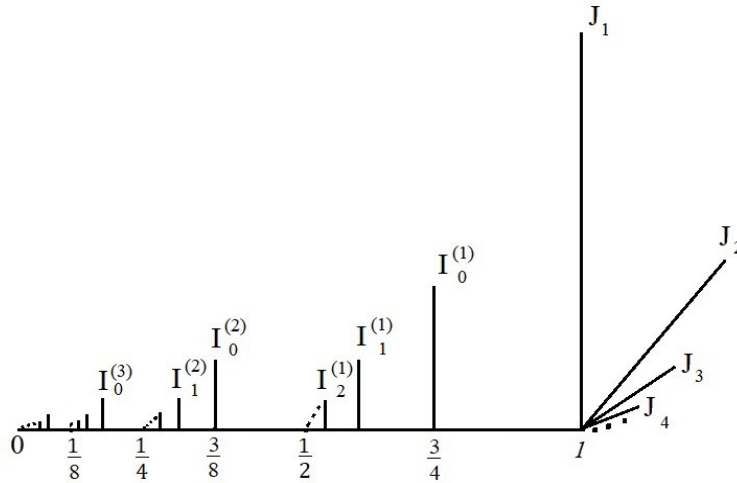


Рис. 1. Дендрит X_1

2. Определим отображение $f : X_1 \rightarrow X_1$ следующим образом:

1) $f(0) = 0$.

2) Для каждого $j \geq 2$ положим $f(x) = x + \frac{1}{2^j}$, если $x \in Z_j$. В результате каждый дендрит Z_j ($j \geq 2$) сдвигается на $\frac{1}{2^j}$ единиц вправо вдоль отрезка $[0; 1]$, причем $f(I_k^{(j)}) = I_{k+1}^{(j-1)}$ для всех $k \geq 0$. Таким образом, $f(Z_j) \subset Z_{j-1}$ для каждого числа $j \geq 2$. Отметим, что каждый отрезок

$$\left[\frac{1}{2^j}; \frac{3}{2^{j+1}} \right],$$

являющийся основанием дендрита Z_j , отображается на отрезок

$$\left[\frac{1}{2^{j-1}}; \frac{5}{2^{j+1}} \right] \quad (j \geq 2).$$

3) Для любого числа $j \geq 1$ определим линейный гомеоморфизм

$$f : \left[\frac{3}{2^{j+2}}; \frac{1}{2^j} \right] \rightarrow \left[\frac{5}{2^{j+2}}; \frac{1}{2^{j-1}} \right] \quad \text{так, чтобы} \quad f\left(\frac{3}{2^{j+2}}\right) = \frac{5}{2^{j+2}}, \quad f\left(\frac{1}{2^j}\right) = \frac{1}{2^{j-1}}.$$

4) $f(x) = 1$, если $x \in \left[\frac{3}{4}; 1 \right]$.

5) Зададим $f : Z_1 \rightarrow Y$ таким образом, чтобы

$$f\left(\left[\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right]\right) = 1,$$

$f : I_k^{(1)} \rightarrow J_{k+1}$ — линейный гомеоморфизм со свойством: $f(I_k^{(1)}) = J_{k+1}$ для каждого числа $k \geq 0$. Тогда $f(Z_1) = Y$.

6) Для каждого числа $k \geq 2$ определим линейный гомеоморфизм $f : J_k \rightarrow J_{k-1}$ так, чтобы

$$f\left(1 + \frac{1}{2^k} \exp\left(\frac{\pi}{2^k} \mathbf{i}\right)\right) = 1 + \frac{1}{2^{k-1}} \exp\left(\frac{\pi}{2^{k-1}} \mathbf{i}\right), \quad f(0) = 0.$$

Тогда $f(J_k) = J_{k-1}$.

7) Пусть $f : J_1 \rightarrow [0; 1]$ — линейный гомеоморфизм, у которого

$$f(1) = 1, \quad f\left(1 + \frac{1}{2} \exp\left(\frac{\pi}{2} \mathbf{i}\right)\right) = 0.$$

Отображение f является непрерывным, $\text{Per}(f) = \text{Fix}(f) = \{0; 1\}$. Из пункта 2) построения отображения f следует, что

$$f^{j-1}(I_k^{(j)}) = I_{k+j-1}^{(1)} \quad \text{для любых чисел} \quad j \geq 2 \quad \text{и} \quad k \geq 0.$$

Тогда с учетом пункта 5) построения отображения f получаем равенства:

$$f^j(I_k^{(j)}) = f(f^{j-1}(I_k^{(j)})) = f(I_{k+j-1}^{(1)}) = J_{k+j}, \quad \text{где} \quad j \geq 1, \quad k \geq 0.$$

Отсюда следует, что

$$f^j(Z_j) = \bigcup_{i=j}^{\infty} J_i \quad \text{для всех} \quad j \geq 1. \quad (4.8)$$

Покажем, что неустойчивым многообразием $W^u(0, f)$ точки 0 является множество $[0; 1] \cup Y$. Из пунктов 2) – 3) построения отображения f следует, что любая точка $x \in (0; 1]$ принадлежит $W^u(0, f)$. Покажем, что любая точка e из $Y \setminus \{1\}$ принадлежит $W^u(0, f)$. Пусть $U(0)$ — произвольная окрестность точки 0 в X_1 , не содержащая точку 1. В силу (4.7) найдется такое натуральное число $j_0 \geq 1$, что дендрит $Z_{j_0} \subset U(0)$. Согласно построению дендрита Y найдется такое натуральное число $k_0 \geq 1$, что $e \in J_{k_0}$. Если $k_0 \geq j_0$, то в силу (4.8) $e \in f^{j_0}(U(0))$. Если $k_0 < j_0$, то в силу выбора номера j_0 , (4.8) и пункта 6) построения отображения f получаем:

$$f^{2j_0-k_0}(U(0)) \supset f^{j_0-k_0}(f^{j_0}(Z_{j_0})) \supset f^{j_0-k_0}\left(\bigcup_{i=j_0}^{\infty} J_i\right) \supset f^{j_0-k_0}(J_{j_0}) = J_{k_0} \ni e.$$

Таким образом, $e \in W^u(0, f)$. Следовательно,

$$[0; 1] \cup Y \subseteq W^u(0, f). \quad (4.9)$$

Из пункта 2) построения отображения f следует, что $f^{-k-1}(I_k^{(j)}) = \emptyset$ для любых $j \geq 1$ и $k \geq 0$. Отсюда и из (4.9) получаем, что

$$W^u(0, f) = [0; 1] \cup Y.$$

Таким образом, для любой окрестности $U(0)$ точки 0 в X , не содержащей точку 1 , $U(0) \cap W^u(0, f) \subset [0; 1)$. Но для любой точки $x \in Y \setminus \{1\}$ и любого натурального числа $n \geq 1$ $f^{-n}(x) \cap [0; 1) = \emptyset$. Следовательно, для произвольной точки $x \in Y \setminus \{1\}$ имеем:

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} f^{-n}(x) \cap (U(0) \cap W^u(0, f)) = \emptyset.$$

Таким образом, если нарушено условие 1) теоремы 2.2, то утверждение теоремы 2.2 неверно.

В заключении отметим, что в силу пункта 7) построения отображения f любая концевая точка $1 + \frac{1}{2^k} \exp\left(\frac{\pi}{2^k} \mathbf{i}\right)$ ($k \geq 1$) континуума Y является гомоклинической точкой отображения f к неподвижной точке 0 . Но ни у одной из них среди ее прообразов нет гомоклинических точек в окрестности $U(0)$ точки 0 . Таким образом, следствие 2.2 неверно при нарушении условия 1) следствия 2.2.

Пример 4.2. Построим континуум X_2 .

Для каждого натурального числа $k \geq 1$ положим

$$I_k = \left[0; \frac{1}{2^{k-1}} \exp\left(\frac{\pi}{2^k} \mathbf{i}\right)\right].$$

Как в примере 4.1 определим

$$J_k = \left[1; 1 + \frac{1}{2^k} \exp\left(\frac{\pi}{2^k} \mathbf{i}\right)\right],$$

где $k \geq 1$. Отметим, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{diam } I_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \text{diam } J_k = 0. \quad (4.10)$$

Положим

$$X_2 = [0; 1] \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} (I_k \cup J_k),$$

см. рис. 2.

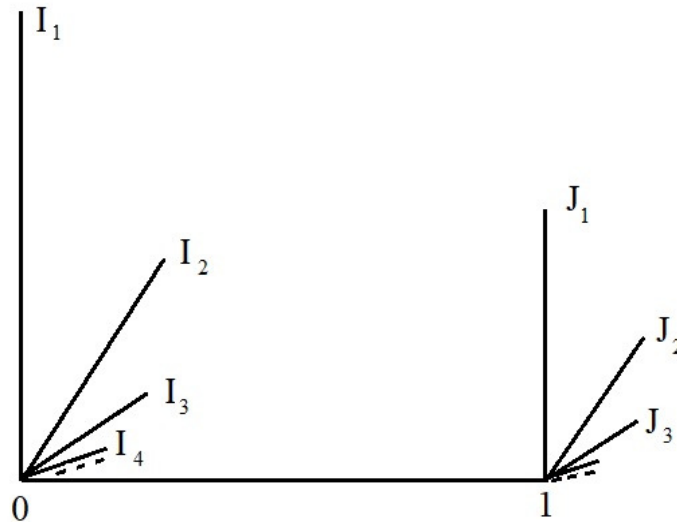


Рис. 2. Дендрит X_2

В силу (4.10) континуум X_2 является локально связным. Следовательно, X_2 — дендрит, имеющий только две точки ветвления 0 и 1 бесконечного порядка.

Обозначим через $Y = \bigcup_{k \geq 1} J_k$, через $e_k = 1 + \frac{1}{2^k} \exp\left(\frac{\pi}{2^k} \mathbf{i}\right)$ — концевые точки континуума Y , $k \geq 1$.

Перейдем к построению отображения $f : X_2 \rightarrow X_2$.

- 1) Положим $f(z) = z$, если $z \in [0; 1]$.
- 2) Пусть $f : \left[0; \frac{\mathbf{i}}{2}\right] \rightarrow [0; 1]$ — линейный гомеоморфизм, у которого

$$f(0) = 0, \quad f\left(\frac{\mathbf{i}}{2}\right) = 1.$$

- 3) Для задания отображения $f : \left[\frac{\mathbf{i}}{2}; \mathbf{i}\right] \rightarrow Y$ обозначим $z_k = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^k}\right) \mathbf{i}$, $k \geq 1$. Отметим, что $\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = \frac{\mathbf{i}}{2}$.

Для всех $k \geq 1$ определим линейный гомеоморфизм $f : [z_k; z_{k+1}] \rightarrow [e_k; e_{k+1}]$ таким образом, чтобы $f(z_k) = e_k$, $f(z_{k+1}) = e_{k+1}$. Тогда $f([z_k; z_{k+1}]) = J_k \cup J_{k+1}$, ($k \geq 1$).

Следовательно, $f\left(\left[\frac{\mathbf{i}}{2}; \mathbf{i}\right]\right) = Y$.

- 4) Для задания отображения $f : I_{k+1} \rightarrow I_k$ ($k \geq 1$) поделим каждый отрезок I_k на 2 равные части и обозначим через $I_k^{(1)}$ ту половину, которая содержит точку 0, а через $I_k^{(2)}$ — другую половину. Определим

$$f(z) = 2z \cdot \exp\left(\frac{\pi}{2^{k+1}} \mathbf{i}\right), \quad \text{если} \quad z \in I_{k+1}^{(1)} \quad \text{для всех} \quad k \geq 1. \quad (4.11)$$

Тогда $f(I_{k+1}^{(1)}) = I_k^{(1)}$ для $k \geq 1$. На каждом отрезке

$$I_{k+1}^{(2)} = \left[\frac{1}{2^{k+1}} \exp\left(\frac{\pi}{2^{k+1}} \mathbf{i}\right); \frac{1}{2^k} \exp\left(\frac{\pi}{2^{k+1}} \mathbf{i}\right)\right] \quad (k \geq 1)$$

определим линейный гомеоморфизм

$$f : I_{k+1}^{(2)} \rightarrow \left[\frac{1}{2^k} \exp\left(\frac{\pi}{2^k} \mathbf{i}\right); \frac{3}{2^{k+1}} \exp\left(\frac{\pi}{2^k} \mathbf{i}\right)\right]$$

таким образом, чтобы

$$f\left(\frac{1}{2^{k+1}} \exp\left(\frac{\pi}{2^{k+1}} \mathbf{i}\right)\right) = \frac{1}{2^k} \exp\left(\frac{\pi}{2^k} \mathbf{i}\right), \quad f\left(\frac{1}{2^k} \exp\left(\frac{\pi}{2^{k+1}} \mathbf{i}\right)\right) = \frac{3}{2^{k+1}} \exp\left(\frac{\pi}{2^k} \mathbf{i}\right),$$

причем расстояние между любыми двумя точками из $I_{k+1}^{(2)}$ сохраняется, то есть для любых точек x, y из $I_{k+1}^{(2)}$ выполнено $d(x, y) = d(f(x), f(y))$. Тогда $f(I_{k+1}^{(2)}) \subset I_k^{(2)}$, а, точнее, отрезок $I_{k+1}^{(2)}$ отображается только на половину отрезка $I_k^{(2)}$. Тогда для каждой концевой точки $\frac{1}{2^{k-1}} \exp\left(\frac{\pi}{2^k} \mathbf{i}\right)$, принадлежащей I_k , выполнено условие:

$$f^{k-1}\left(\frac{1}{2^{k-1}} \exp\left(\frac{\pi}{2^k} \mathbf{i}\right)\right) = z_k, \quad k \geq 2. \quad (4.12)$$

Таким образом, из (4.11) и (4.12) следует равенство:

$$f^{k-1}(I_k) = [0; z_k], \quad k \geq 2. \quad (4.13)$$

- 5) Для каждого $k \geq 1$ определим линейный гомеоморфизм $f : J_{k+1} \rightarrow J_k$ так, чтобы $f(e_{k+1}) = e_k$, $f(1) = 1$.
- 6) Пусть $f : J_1 \rightarrow [0; 1]$ — такой линейный гомеоморфизм, что $f(e_1) = 0$, $f(1) = 1$.

Построенное отображение f является непрерывным, $\text{Per}(f) = \text{Fix}(f) = [0; 1]$.

Покажем, что

$$W^u(0, f) = [0; 1] \cup Y \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k^{(1)}.$$

Покажем сначала, что любая точка e континуума Y принадлежит $W^u(0, f)$. Пусть $e \in J_k$ ($k \geq 1$), а $U(0)$ — произвольная окрестность точки 0 , не содержащая 1 . В силу (4.10) найдется такое натуральное число $j_0 \geq k$, что $I_{j_0} \subset U(0)$. Применяя (4.13), получим равенство:

$$f^{j_0-1}(I_{j_0}) = [0; z_{j_0}].$$

Тогда в силу пунктов 2) и 3) задания отображения f имеем:

$$f^{j_0}(I_{j_0}) = f(f^{j_0-1}(I_{j_0})) = f([0; z_{j_0}]) = f\left(\left[0; \frac{\mathbf{i}}{2}\right] \cup \left[\frac{\mathbf{i}}{2}; z_{j_0}\right]\right) = [0; 1] \cup \bigcup_{k=j_0}^{\infty} J_k \supset J_{j_0},$$

а в силу пункта 5)

$$f^{2j_0-k}(I_{j_0}) = f^{j_0-k}(f^{j_0}(I_{j_0})) \supset f^{j_0-k}(I_{j_0}) = J_k.$$

Следовательно, $f^{2j_0-k}(U(0)) \cap \{e\} \neq \emptyset$. Из рассуждений, приведенных выше, следует, что

$$[0; 1] \cup Y \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k^{(1)} \subset W^u(0, f).$$

Покажем, что $\left(\frac{\mathbf{i}}{2}; \mathbf{i}\right] \cap W^u(0, f) = \emptyset$. Пусть x — любая точка из $\left(\frac{\mathbf{i}}{2}; \mathbf{i}\right]$. Тогда найдется такое натуральное число $k_0 \geq 1$, что $x \in (z_{k_0+1}; z_{k_0}]$. Выберем окрестность $U(0)$ точки 0 таким образом, чтобы

$$U(0) \cap I_{k_0+1}^{(2)} = \emptyset. \quad (4.14)$$

В силу (4.13) и пункта 3) задания отображения f

$$f^j(I_k) \cap (z_{k_0+1}; z_{k_0}] = \emptyset \quad \text{для любых чисел} \quad k \geq k_0 + 1 \quad \text{и} \quad j \geq 1. \quad (4.15)$$

Из условия (4.14) следует, что $U(0) \cap I_k^{(2)} = \emptyset$ для $1 \leq k \leq k_0$. Тогда в силу (4.11)

$$f^{k-1}(U(0) \cap I_k) \subset \left[0; \frac{\mathbf{i}}{2}\right] \quad \text{для} \quad 2 \leq k \leq k_0.$$

Отсюда и из пункта 2) задания отображения f получаем, что

$$f^j(U(0) \cap I_k) \cap (z_{k_0+1}; z_{k_0}] = \emptyset \quad \text{для всех} \quad j \geq 1 \quad \text{и} \quad 2 \leq k \leq k_0. \quad (4.16)$$

Поскольку $U(0) \cap I_1 \subset [0; \mathbf{i}]$, согласно пунктам 1) и 2) задания отображения f

$$f^j(U(0) \cap I_1) \cap (z_{k_0+1}; z_{k_0}] = \emptyset \quad \text{для любого числа} \quad j \geq 1. \quad (4.17)$$

Из (4.15), (4.16) и (4.17) следует, что $f^j(U(0)) \cap \{x\} = \emptyset$ для любой точки $x \in \left(\frac{\mathbf{i}}{2}; \mathbf{i}\right]$.

Таким образом, $\left(\frac{\mathbf{i}}{2}; \mathbf{i}\right] \cap W^u(0, f) = \emptyset$. Поэтому для любого числа $j \geq 1$

$$f^{-j}\left(\left(\frac{\mathbf{i}}{2}; \mathbf{i}\right]\right) \cap W^u(0, f) = \emptyset.$$

Следовательно, в силу пункта 3) построения отображения f для любой точки $e \in Y \setminus \{1\}$ и произвольной окрестности $U(0)$ точки 0, не содержащей 1, выполнено условие:

$$\bigcup_{j=1}^{+\infty} f^{-j}(e) \cap (W^u(0, f) \cap U(0)) = \emptyset.$$

Таким образом, при невыполнении условия 2) теоремы 2.2, утверждение теоремы 2.2 неверно.

Отметим также, что любая концевая точка e континуума Y является гомоклинической точкой к неподвижной точке 0, но среди прообразов точки e нет гомоклинических точек к неподвижной точке 0, то есть утверждение следствия 2.2 также неверно при нарушении условия 2) следствия 2.2.

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.3

Для доказательства теоремы 2.3 нам понадобятся приспособленное к рассматриваемому случаю понятие подковы, восходящее к С. Смейлу [25], и вспомогательные утверждения.

Определение 5.1. Будем говорить, что отображение $f : X \rightarrow X$ континуума X имеет подкову, если существуют такие непересекающиеся подконтинуумы $A, B \subset X$, что

$$f(A) \cap f(B) \supset A \cup B.$$

Прямым следствием определений 2.6 и 5.1 является следующее утверждение (см., например, [2]).

Теорема 5.1 ([2]). Пусть $f : X \rightarrow X$ — непрерывное отображение континуума X , и f имеет подкову. Тогда топологическая энтропия отображения f положительная.

Нам потребуется следующее свойство топологической энтропии.

Лемма 5.1 ([8]). Для любого непрерывного отображения $f : X \rightarrow X$ компактного топологического пространства X и любого натурального числа $n \geq 1$

$$h(f^n) = n \cdot h(f),$$

где $h(\cdot)$ — топологическая энтропия отображения $(\cdot)$.

Доказательство теоремы 2.3. Для доказательства положительности топологической энтропии отображения f воспользуемся теоремой 5.1 и леммой 5.1. Покажем существование подковы у некоторой итерации отображения f .

Пусть x — гомоклиническая точка к периодической точке p периода m , $U(p)$ — произвольная окрестность точки p в X , не содержащая x . Обозначим через $r = \text{ord } p$, где $r \in \mathbb{N}$. Так как $\text{ord } p$ конечен, $p \notin R^{(1)}(X)$, в силу леммы 3.2 найдется такая окрестность $U_1(p)$ точки p в X , что $U_1(p) \subset U(p)$, и $\overline{U_1(p)}$ — либо дуга (при $r = 1$ или 2), либо гомеоморфно r -оду (при $r \geq 3$).

В силу следствия 2.2 найдутся гомоклиническая точка $x_1 \in U_1(p)$ к периодической точке p и натуральное число n_1 , для которых $f^{mn_1}(x_1) = x$. Так как $\overline{U_1(p)}$ локально связный континуум, существует связная окрестность $U_2(p) \subset U_1(p)$ точки p , для которой $x_1 \notin U_2(p)$. Снова в силу следствия 2.2 найдутся гомоклиническая точка $x_2 \in U_2(p)$ к периодической точке p и натуральное число n_2 такие, что $f^{mn_2}(x_2) = x_1$. Повторим приведенные выше рассуждения $(r + 1)$ раз. В результате построим связные окрестности $U_k(p)$ точки p ($1 \leq k \leq r + 1$), гомоклинические точки $\{x_1, \dots, x_{r+1}\}$ и натуральные числа $\{n_1, \dots, n_{r+1}\}$ со следующими свойствами:

- 1) $U_{k+1}(p) \subset U_k(p)$ для каждого $1 \leq k \leq r$;
- 2) $x_{k+1} \in U_{k+1}(p)$, но $x_k \notin U_{k+1}(p)$ для всех $1 \leq k \leq r$;
- 3) $f^{mn_{k+1}}(x_{k+1}) = x_k$ для $1 \leq k \leq r$.

Поскольку порядок точки p равен r , найдутся различные гомоклинические точки $x_i, x_j \in \{x_1, \dots, x_{r+1}\}$, находящиеся на одной компоненте точки p . Пусть для определенности $i < j$. Поскольку $U_i(p)$ и $U_j(p)$ связные окрестности, и $U_j(p) \subset U_i(p) \subset U_1(p)$, тогда $\overline{U_i(p)}$ и $\overline{U_j(p)}$ либо являются дугами, либо гомеоморфны r -оде. Тогда из свойств 1) – 3) получаем, что

$$x_j \in (p; x_i), \quad \text{и} \quad f^{m(n_{i+1}+\dots+n_k+\dots+n_j)}(x_j) = x_i, \quad \text{где} \quad i+1 \leq k \leq j.$$

Положим $g = f^{m(n_{i+1}+\dots+n_k+\dots+n_j)}$, $y = x_j$. Тогда $g(p) = p$, $y \in (p; g(y))$. Следовательно, в силу непрерывности отображения g

$$g([p; y]) \supseteq [g(p); g(y)] = [p; g(y)] \supset [p; y]. \quad (5.1)$$

Так как y — гомоклиническая точка к неподвижной точке p , согласно определениям 2.4 и 2.5 $\omega(y, g) = \{p\}$. Следовательно, для любой окрестности $U(p)$ точки p , не содержащей точку y , найдется такое натуральное число $s \geq 2$, что $g^s(y) \in U(p)$. Тогда

$$y \in (g^s(y); g(y)). \quad (5.2)$$

Обозначим через V компоненту точки y , содержащую точку $g(y)$. Тогда из (5.2) следует, что

$$g(y) \in V, \quad \text{а} \quad g^s(y) \notin V.$$

Поэтому найдется такое натуральное число $2 \leq j_0 \leq s$, что

$$g^j(y) \in V \quad \text{для любого} \quad 1 \leq j \leq j_0 - 1, \quad \text{а} \quad g^{j_0}(y) \notin V.$$

Тогда точки $g^{j_0}(y)$ и $g^{j_0-1}(y)$ лежат на разных компонентах точки y , то есть

$$y \in (g^{j_0}(y); g^{j_0-1}(y)). \quad (5.3)$$

Из непрерывности отображения g следует, что

$$g^{j_0-1}([y; g(y)]) \supseteq [g^{j_0-1}(y); g^{j_0-1}(g(y))] = [g^{j_0-1}(y); g^{j_0}(y)].$$

Учитывая (5.3), получаем, что

$$g^{j_0-1}([y; g(y)]) \supset [g^{j_0-1}(y); y].$$

Из доказанного включения следует, что

$$g(g^{j_0-1}([y; g(y)])) \supset g([g^{j_0-1}(y); y]),$$

то есть

$$g^{j_0}([y; g(y)]) \supset [g^{j_0}(y); g(y)].$$

Из последнего включения и (5.3) получаем:

$$g^{j_0}([y; g(y)]) \supset [g^{j_0}(y); g(y)] \supset [y; g(y)].$$

Положим $h = g^{j_0}$. Тогда $h([y; g(y)]) \supset [y; g(y)]$. Но тогда

$$h^j([y; g(y)]) \supset [y; g(y)] \quad \text{для любого натурального числа} \quad j \geq 1. \quad (5.4)$$

Из (5.1) следует существование такой точки $y_1 \in (p; y)$, что $g(y_1) = y$. Тогда

$$g([p; y_1]) \supseteq [p; y] \supset [p; y_1].$$

Следовательно, найдется такая точка $y_2 \in (p; y_1)$, что $g(y_2) = y_1$. Повторим приведенные рассуждения j_0 раз. В результате построим набор точек $\{y_1, \dots, y_{j_0}\}$ со следующими свойствами:

$$g(y_1) = y, g(y_j) = y_{j-1}, \quad \text{и} \quad y_j \in (p; y_{j-1}) \quad \text{для} \quad 2 \leq j \leq j_0.$$

Положим $u = y_{j_0}$, $v = y_{j_0-1}$. Тогда $[u; v] \cap [y; g(y)] = \emptyset$, и

$$h([u; v]) = g^{j_0}([u; v]) \supseteq [g^{j_0}(u); g^{j_0}(v)] = [y; g(y)], \quad (5.5)$$

Так как y — гомоклиническая точка отображения f , согласно определению 2.4, $\omega(y, f^m) = \{p\}$. Поскольку $p \in \text{Fix}(f^m)$, имеем $\omega(y, h) = \{p\}$. Следовательно, для любой окрестности $U(p)$ точки p , удовлетворяющей условию $U(p) \cap \{u\} = \emptyset$, найдется такое натуральное число j_1 , что для любого числа $j \geq j_1$ выполнено условие $h^j(y) \in U(p)$. Следовательно,

$$u \in (h^j(y); y) \quad \text{для всех натуральных чисел } j \geq j_1.$$

Тогда с учетом (5.4) имеем:

$$h^j([y; g(y)]) \supset [u; g(y)] \supset [u; v] \cup [y; g(y)] \quad \text{для любого числа } j \geq j_1. \quad (5.6)$$

Следовательно, в силу (5.5) получаем, что

$$h^{j_1+1}([u; v]) \supset h^{j_1}([y; g(y)]) \supset [u; v] \cup [y; g(y)]. \quad (5.7)$$

Из (5.6) и (5.7) следует, что отображение h^{j_1+1} имеет подкову $([u; v], [y; g(y)])$.

Согласно теореме 5.1 отображение h имеет положительную топологическую энтропию. В силу леммы 5.1 топологическая энтропия отображения f также положительная. Теорема 2.3 доказана. $\square$

Автор выражает признательность рецензенту за внимательное прочтение работы и сделанные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. П. С. Александров. *Введение в теорию множеств и общую топологию*. М.: Наука. 1977.
2. Л.С. Ефремова, Е.Н. Махрова. *Одномерные динамические системы* // Усп. мат. наук **76**:5(461), 821–881 (2021).
3. К. Куратовский. *Топология. 1*. М.: Мир. 1966.
4. К. Куратовский. *Топология. 2*. М.: Мир. 1969.
5. Е.Н. Махрова. *Гомоклинические точки и топологическая энтропия непрерывного отображения дендрита* // Соврем. мат. прилож. **54**, 79–86 (2008).
6. А. Пуанкаре. *Новые методы небесной механики. III*. М.: Наука. 1972.
7. В.Ж. Сакбаев, О.Г. Смолянов. *Диффузия и квантовая динамика на графах* // Докл. Акад. наук, Росс. Акад. наук **451**:2, 141–145 (2013).
8. R.L. Adler, A.G. Konheim, M.H. McAndrew. *Topological entropy* // Trans. Am. Math. Soc. **114**, 309–319 (1965).
9. S.J. Agronsky, J.G. Ceder. *What sets can be ω -limit sets in E^n ?* // Real Anal. Exch. **17**(1991/92):1, 97–109 (1992).
10. F. Balibrea, G.-G. Juan Luis. *Continua with empty interior as ω -limit sets* // Appl. Gen. Topol. **6**:2, 195–205 (2005).
11. L. Block. *Homoclinic points of mappings of the interval* // Proc. Am. Math. Soc. **72**:3, 576–580 (1978).
12. J. Charatonik, A. Illanes. *Mappings on dendrites* // Topology Appl. **144**:1–3, 109–132 (2004).
13. V. Chernyshev, A. Tolchennikov, A. Shafarevich. *Behavior of Quasi-particles on Hybrid Spaces. Relations to the Geometry of Geodesics and to the Problems of Analytic Number Theory* // Regul. Chaotic Dyn. **21**:5, 531–537 (2016).
14. L.S. Efremova, E.N. Makhrova. *On homoclinic points of piecewise monotone mappings of dendrites* // Prog. Nonlinear Sci. **1**, 225–228 (2002).
15. L.S. Efremova. *Example of the smooth skew product in the plane with the one-dimensional ramified continuum as the global attractor* // ESAIM, Proc. **36**, 15–25 (2012).

16. L.S. Efremova. *Ramified continua as global attractors of C^1 -smooth self-maps of a cylinder close to skew products* // J. Difference Equ. Appl. **29**:9–12, 1244–1274 (2023).
17. H. Hosaka, H. Kato. *Continuous maps on trees and nonwandering sets* // Topology Appl. **81**:1, 35–46 (1997).
18. Z. Kočan, V. Kornecká-Kurková, M. Málek. *Entropy, horseshoes and homoclinic trajectories on trees, graphs and dendrites* // Ergodic Theory Dyn. Syst. **31**:1, 165–175 (2011).
19. Z. Kočan. *Chaos on one-dimensional compact metric spaces* // Int. J. Bifurcation Chaos Appl. Sci. Eng. **22**:10, 1250259 (2012).
20. A. Lelek. *On plane dendroids and their end points in the classical sense* // Fundam. Math. **49**, 301–319 (1960).
21. E.N. Makhrova. *Monotone maps on dendrites* // Discontin. Nonlinearity Complex. **9**:4, 541–552 (2020).
22. E.N. Makhrova. *On Limit Sets of Monotone Maps on Dendroids* // Appl. Math. Nonlinear Sci. **5**:2, 311–316 (2020).
23. E.N. Makhrova. *Remarks on minimal sets on dendrites and finite graphs* // J. Difference Equ. Appl. **29**:9–12, 1313–1322 (2023).
24. H.–O. Peitgen, P. H. Richter, *The beauty of fractals: Images of complex dynamical systems*. Springer, Cop, Berlin. 1986.
25. S. Smale, *Differentiable Dynamical Systems* // Bull. Am. Math. Soc. **73**, 747–817 (1967).

Елена Николаевна Махрова,
Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского,
пр. Гагарина, 23,
603022, г. Н.Новгород, Россия
E-mail: elena_makhrova@inbox.ru